**Esercizi Geometria 1, foglio 3 (ottobre 2018)**

1. i) Per il sistema lineare sul campo $K = \mathbb{R}$

$$x_1 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0$$
$$-x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 1$$
$$x_1 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 3,$$

trovare la matrice $A$ del sistema e applicare l'algoritmo di Gauss alla matrice $A$ (e alla matrice estesa del sistema) per traformare $A$ in una matrice a gradini $B$, indicando i gradini e gli elementi pivot in ogni passo. Poi scrivere il nuovo sistema lineare (con matrice $B$), indicare i parametri liberi, trovare la soluzione generale dello spazio $W_0$ delle soluzioni del sistema omogeneo associato, una base di $W_0$ e finalmente una soluzione (particolare) del sistema generale.

2. Applicare l'algoritmo di Gauss alla matrice del seguente sistema lineare (sul campo $K = \mathbb{R}$, indicando gli elementi pivot e i gradini dopo ogni passo), poi dire per quali valori di $b$ il sistema lineare ha una soluzione; qual'è la dimensione dello spazio $W_0$ delle soluzioni del sistema omogeneo associato?

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8$$
$$3x_1 - x_2 - 3x_4 = b$$
$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2$$

3. Applicare l'algoritmo di Gauss alla matrice del seguente sistema lineare reale, indicando gli elementi pivot e i gradini in ogni passo). Poi dire per quali valori dei parametri $a$ e $b$ il sistema ha una soluzione, e per questi lavori trovare tutte le soluzioni del sistema.

$$x_1 + x_2 = a$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = b$$
$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_2 - x_3 = 2$$

4. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e $v_1, \dots, v_n$ una base di $V$. Dimostrare che
i) $f$ è iniettiva se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.
ii) $f$ è suriettiva se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $W$.

5. i) Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali di dimensioni finite e $f : V \to W$ un'applicasione lineare iniettiva. Dimostrare che esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_V$.
ii) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare suriettiva. Dimostrare che esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_W$.
(Usare i teoremi del prolungamento a una base e della determinzione di un'applicazione lineare su una base.)