Esercizi Geometria 1, foglio 2 (ottobre 2019)

1. Siano W_1 e W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $W_1 \cup W_2$ è un sottospazio se e solo se $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$.

2. i) Dato un elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_p$, per un numero primo p, dimostrare che l'applicazione $\phi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $\phi(\bar{x}) = \bar{a}\bar{x}$, è iniettiva.

ii) Concludere che ogni elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_p$ ha un elemento inverso rispetto al prodotto.

3. Il prodotto cartesiano $V \times W$ di due spazi vettoriali V e W sullo stesso campo K è uno spazio vettoriale, con la seguente somma e molteplicazione scalare:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad \lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w).$$

Dimostrare che, se $v_1, \ldots, v_n$ è una base di V e $w_1, \ldots, w_m$ una base di W, allora $(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_m)$ è una base di $V \times W$.

4. Sia $w_1, \ldots, w_m$ una base del sottospazio W di V e $w_1, \ldots, w_m, v_1, \ldots, v_r$ un prolungamento a una base di V. Dimostrare che $[v_1], \ldots, [v_r]$ è una base dello spazio quoziente V/W (foglio 1, esercizio 3).

5. Dimostrare che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}$ sul campo $\mathbb{Q}$ non ha una base finita (usare che $\mathbb{Q}$ è numerabile, ma che $\mathbb{R}$ non lo è). Poi dimostrare che non esiste neanche una base numerabile di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$.

6. Una matrice quadrata $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ è simmetrica se $A = {}^tA$, e anti-simmetrica se $A = -{}^tA$.

i) Dimostrare che le matrici simmetriche formano un sottospazio $\mathrm{Sym}(n \times n, \mathbb{R})$ di $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$; trovare una base e la dimensione di questo sottospazio.

ii) La stessa cosa per le matrici anti-simmetriche $\mathrm{Alt}(n \times n, \mathbb{R})$.

iii) Dimostrare che $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) = \mathrm{Sym}(n \times n, K) \oplus \mathrm{Alt}(n \times n, K)$ (somma diretta).