

Esercizi Geometria 1, foglio 2 (ottobre 2018)

1. Siano W_1 e W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale V . Dimostrare che $W_1 \cup W_2$ è un sottospazio se e solo se $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$.

2. i) Il prodotto cartesiano $V \times W$ di due spazi vettoriali V e W sullo stesso campo K è uno spazio vettoriale, con la seguente somma e moltiplicazione scalare:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad \lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w).$$

Dimostrare che, se v_1, \dots, v_n è una base di V e w_1, \dots, w_m una base di W , allora $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)$ è una base di $V \times W$.

ii) Sia $U = V \oplus W$ la somma diretta dei sottospazi V e W di uno spazio vettoriale U . Sia v_1, \dots, v_n una base di V e w_1, \dots, w_m una base di W . Dimostrare che $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$ è una base di U .

3. Sia w_1, \dots, w_m una base del sottospazio W di V e $w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_r$ un prolungamento a una base di V . Dimostrare che $[v_1], \dots, [v_r]$ è una base dello spazio quoziente V/W (foglio 1, esercizio 3).

4. Dimostrare che lo spazio vettoriale \mathbb{R} sul campo \mathbb{Q} non ha una base finita (usare che \mathbb{Q} è numerabile, ma che \mathbb{R} non lo è). Poi dimostrare che non esiste neanche una base numerabile di \mathbb{R} su \mathbb{Q} .

5. Una matrice quadrata $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ è simmetrica se $A = {}^t A$, e anti-simmetrica se $A = -{}^t A$.

i) Dimostrare che le matrici simmetriche formano un sottospazio $\text{Sym}(n \times n, \mathbb{R})$ di $M(n \times n, \mathbb{R})$; trovare una base e la dimensione di questo sottospazio.

ii) La stessa cosa per le matrici anti-simmetriche $\text{Alt}(n \times n, \mathbb{R})$.

iii) Dimostrare che $M(n \times n, \mathbb{R}) = \text{Sym}(n \times n, \mathbb{R}) \oplus \text{Alt}(n \times n, \mathbb{R})$ (somma diretta).