

Esercizi Geometria 1, foglio 1 (ottobre 2018)

1. i) Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e siano u, v e w tre vettori linearmente indipendenti in V . Dimostrare che anche $u + v$, $v - w$ e $u + 2w$ sono linearmente indipendenti.

ii) Per quali $t \in \mathbb{R}$ i tre vettori $(1, 3, 4)$, $(3, t, 11)$ e $(-1, -4, 0)$ sono linearmente indipendenti in \mathbb{R}^3 ?

iii) Dimostrare che due vettori (a, b) e (c, d) in K^2 sono linearmente indipendenti se e solo se $ad - bc \neq 0$.

iv) Nello spazio vettoriale \mathbb{R} sul campo \mathbb{Q} , dimostrare che i vettori (numeri reali) 1 e $\sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti, e anche $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

2. Sia X un insieme, V un K -spazio vettoriale e $\text{Appl}(X, V)$ l'insieme di tutte le applicazioni $f : X \rightarrow V$. Allora anche $\text{Appl}(X, V)$ è uno spazio vettoriale, con la seguente somma e moltiplicazione scalare:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$f, g \in \text{Appl}(X, V)$, $\lambda \in K$. Considerando lo spazio vettoriale $\text{Appl}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ delle funzioni reali $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f(x)$, dimostrare che ognuna delle seguenti famiglie di funzioni è linearmente indipendente in $\text{Appl}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$(\cos(x), \sin(x)); \quad (e^x, e^{2x}); \quad (\cos(x), \sin(x), e^x), \quad (1, x, x^2, \dots, x^n).$$

3. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e W un sottospazio di V . Si dice che due vettori v_1 e v_2 in V sono equivalenti modulo W , $v_1 \sim v_2$ se $v_1 - v_2 \in W$.

i) Dimostrare che questo definisce una relazione di equivalenza su V .

ii) Se $[v] = \{u \in V : u \sim v\}$ denota la classe di equivalenza di v , dimostrare che $[v] = v + W$, dove $v + W = \{v + w : w \in W\}$.

iii) Si denota con $V/W = \{[v] : v \in V\}$ l'insieme delle classi di equivalenza. Si definisce una somma e una moltiplicazione scalare in V/W nel seguente modo:

$$[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]; \quad \lambda[v] = [\lambda v].$$

Dimostrare che questa somma e moltiplicazione scalare in V/W sono ben definite, ovvero non dipendono dalle scelte dei rappresentanti delle classi di equivalenza.

Osservazione. Con questa somma e moltiplicazione scalare V/W diventa uno spazio vettoriale su K che si chiama lo spazio quoziente $V \bmod W$, oppure V su W .

4. i) Trovare gli elementi inversi, rispetto al prodotto, di tutti gli elementi non zero in \mathbb{Z}_{13} (questo gruppo ha 12 elementi, e si ottiene una versione del gruppo ciclico $(\mathbb{Z}_{12}, +)$: perché?)

ii) Trovare tutti gli elementi in \mathbb{Z}_{12} che hanno un inverso rispetto al prodotto. Questi elementi formano un gruppo con quattro elementi (rispetto al prodotto): costruire la tavola di moltiplicazione di questo gruppo; perché non si trova una versione del gruppo ciclico $(\mathbb{Z}_4, +)$ con quattro elementi? (Invece si trova il prodotto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.)