Esercizi di Geometria 3, foglio 6 (maggio 2018)

1. i) Se un'applicazione continua $f : S^1 \to X$ estende a un'applicazione continua $F : B^2 \to X$ (con $S^1 = \partial B^2$), dimostrare che l'omomorfismo indotto $f_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(X, f(x_0))$ è banale.

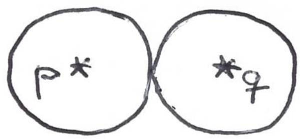
ii) Dimostrare che non esiste una retrazione $r : S^2 \to S^1$.

iii) Dimostrare che non esiste una retrazione $r : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^1$ (come $\mathbb{RP}^1$ si può realizzare come sottospazio di $\mathbb{RP}^2$?).

2. i) Per $n > 1$, sia $p : S^1 \to S^1$ il rivestimento $p(z) = z^n$ ($z \in S^1 \subset \mathbb{C}$). Dimostrare che non esiste un'applicazione continua $q : S^1 \to S^1$ tale che $p \circ q = id_{S^1}$.

ii) Per $n \geq 1$, sia $p : S^n \to \mathbb{RP}^n$ la proiezione. Dimostrare che non esiste un'applicazione continua $q : \mathbb{RP}^n \to S^n$ tale che $p \circ q = id_{\mathbb{RP}^n}$ (distinguere i casi $n > 1$ e $n = 1$).

3. Definire con un disegno una retrazione di deformazione r dal piano meno due punti $\mathbb{R}^2 - \{p, q\}$ alla figura-8 immersa in $\mathbb{R}^2$:



4. Considerando i grafici delle lettere sotto elencate come sottospazi del piano reale, classificare questi spazi topologici rispetto a
i) equivalenze di omotopia;
i) omeomorfismo.
(In tutti e due casi, scrivere una riga per ogni classe di equivalenza, cominciando una nuova riga per ogni nuova classe, e giustificare perché le classi sono distinti.)