Esercizi di Geometria 3, foglio 5 (maggio 2018)

1. Uno spazio X è *countably compact* se ogni ricoprimento aperto numerabile di X ha un sottoricoprimento finito. Dimostrare che uno spazio di Hausdorff X è countably compact se e solo se X è limit point compact (suggerimento: se nessuna sottofamiglia finita di U_n ricopre X, scegliere $x_n \notin U_1 \cup \ldots \cup U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

2. i) Sia $f : I \to X$ un cammino e $\alpha : I \to I$ un'applicazione continua, con $\alpha(0) = 0$ e $\alpha(1) = 1$. Dimostrare che f e $f \circ \alpha$ sono cammini omotopi ($f \circ \alpha$ è una riparametrizzazione di f).

ii) Sia X semplicemente connesso. Dimostrare che ogni due cammini con lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale sono omotopi.

iii) Uno spazio X è *contrattile* se l'applicazione identica $id_X : X \to X$ è omotopa a un'applicazione costante c_{x_0}, per un $x_0 \in X$. Dimostrare che uno spazio contrattile è connesso per archi.

3. Sia $p : E \to B$ un rivestimento. Se B è connesso, dimostrare che ogni fibra $p^{-1}(b), b \in B$, ha la stessa cardinalità (lo stesso numero di elementi).

4. Sia $p : E \to B$ un rivestimento con $p(e_0) = b_0$, e $f : Y \to B$ un'applicazione continua con $f(y_0) = b_0$. Se Y è connesso, dimostrare che un sollevamento $F : Y \to E$ di f con $F(y_0) = e_0$ è unico.

5. Siano $q : X \to Y$ e $r : Y \to Z$ rivestimenti. Se ogni fibra $r^{-1}(z)$ è finita, $z \in Z$, dimostrare che anche la composizione $p = r \circ q : X \to Z$ è un rivestimento.