Esercizi di Geometria 3, foglio 4: spazi compatti (aprile 2018)

1. i) Dare una caratterizzazione di uno spazio compatto in termini di sottoinsiemi chiusi invece di aperti (prendendo complementi, passare da aperti a chiusi e vice versa).

ii) Sia $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$ una successione decrescente di sottoinsieme chiusi non-vuoti in uno spazio compatto X. Dimostrare che l'intersezione $\cap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ non è vuota.

2. Se Y è compatto, dimostrare che la proiezione $\pi : X \times Y \to X$ è un'applicazione chiusa (utilizzare il tube lemma).

3. Generalizzare il tube lemma: Se A e B sono sottospazi compatti di X e Y e N è un intorno di $A \times B$ in $X \times Y$, allora esistono intorni U di A e V in B tale che $A \times B \subset U \times V \subset N$ (considerare primo il caso di $\{a\} \times B \subset X \times Y$, per un $a \in A$).

4. i) Dimostrare che uno spazio metrico compatto X è second countable (suggerimento: per ogni $n \in \mathbb{N}$, considerare un ricoprimento $\mathcal{U}_n$ di X che consiste di un numero finito di palle aperte del raggio $1/n$).

ii) Concludere che il quadrato ordinato I_o^2 non è metrizzabile. Poi dimostrare che I_o^2 è first countable.

5. Dimostrare che i seguenti spazi non sono limit point compact:

i) l'intervallo [0,1] in $\mathbb{R}_l$ (topologia del limite inferiore);

ii) l'intervallo razionale $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ (topologia standard come sottospazio di $\mathbb{R}$);

iii) $[0, 1]^\omega \subset \mathbb{R}^\omega$, con la topologia uniforme e la topologia box. Qual'è la topologia di $\{0, 1\}^\omega \subset \mathbb{R}^\omega$, con la topologia uniforme e la topologia box?

Commento. Per il teorema di Tychonoff, $[0, 1]^\omega$ e $\{0, 1\}^\omega$ con la topologia prodotto sono compatti; inoltre, $\{0, 1\}^\omega$ è omeomorfo al discontinuo di Cantor che è compatto perché chiuso e limitato in $\mathbb{R}$.

6. Sia X è un insieme ordinato con la topologia dell'ordine. Se ogni intervallo chiuso $[a, b]$ in X è compatto, dimostrare che X ha la proprietà dell'estremo superiore.