Esercizi di Geometria 3, foglio 3: spazi connessi (aprile 2018)

1. Sia X ordinato con la topologia dell'ordine. Se X è connesso, dimostrare che X è un continuo lineare.

2. i) Dimostrare che gli intervalli (0,1), (0,1] e [0,1] non sono omeomorfi.

ii) Dimostrare che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ non sono omeomorfi, per $n > 1$.

iii) Dimostrare che un'applicazione continua $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ ha un punto fisso.

iv) Sia $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continua. Dimostrare che esiste $x \in S^1$ tale che $f(x) = f(-x)$. Concludere che S^1 non è omeomorfo a un sottospazio di $\mathbb{R}$.

4. Un'applicazione suriettiva $p : E \to B$ si chiama *applicazione quoziente* se un sottoinsieme U è aperto in B se e solo se $p^{-1}(U)$ è aperto in E (allora B ha la topologia meno fine tale che p è continua). Se B è connesso e ogni fibra $p^{-1}(b)$ è connessa, $b \in B$, dimostrare che E è connesso.

5. i) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$, con la topologia prodotto, è connesso per archi.

ii) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$, con la topologia uniforme e la topologia box, non è connesso.

6. Quali sono le componenti connesse e le componenti per archi di $\mathbb{R}_l$? Quali sono le applicazioni continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$?

7. i) Quali sono le componenti per archi del quadrato ordinato I_o^2?

ii) Uno spazio topologico X è *localmente connesso* (*localmente connesso per archi*) in un punto $x \in X$ se ogni intorno di x contiene un intorno connesso (connesso per archi) di x. Dimostrare che il quadrato ordinato è localmente connesso (cioè, in tutti i punti) ma non localmente connesso per archi (in quali punti?).

iii) Dare un esempio di uno spazio che è connesso ma non localmente connesso, poi anche un esempio di uno spazio che è connesso per archi ma non localmente connesso (considerare il grafico della funzione $\sin(1/x)$).