Esercizi di Geometria 3, foglio 2 (marzo 2018)

1. i) Dimostrare che 0 è nella chiusura di $\mathbb{R}^\omega_+$ in $\mathbb{R}^\omega$, ma che nessuna successione in $\mathbb{R}^\omega_+$ converge a $0 = (0, 0, 0, ...) \in \mathbb{R}^\omega$, nella topologia box.

ii) Dare un esempio di una successione in $\mathbb{R}^\omega_+$ (coordinate positive!) che converge a 0 nella topologia prodotto, ma non nella topologia uniforme. Poi dare un'esempio di una successione in $\mathbb{R}^\omega_+$ che converge a 0 nella topologia uniforme ma non nella topologia box.

2. Sia $\mathbb{R}^\infty$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^\omega$ di tutte le successioni che sono "finalmente zero" ($x_i \neq 0$ solo per un numero finito di indici). Trovare la chiusura di $\mathbb{R}^\infty$ in $\mathbb{R}^\omega$ nella topologia prodotto, uniforme e box.

3. Sia X uno spazio first countable, $A \subset X$ e $x \in \bar{A}$. Dimostrare che esiste una successione a_n in A che converge a x.

4. i) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$ con la topologia prodotto è second countable.

ii) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$ con la topologia uniforme e la topologia box non è second countable.

iii) Dimostrare che $\mathbb{R}^\omega$ con la topologia box non è first countable.

5. i) Siano $f, g : X \to Y$ applicazioni continue. Se Y è ordinato, con la topologia dell'ordine, dimostrare che $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ è chiuso in X.

ii) Sia $h : X \to Y$ l'applicazione $h(x) = \text{minimo } \{f(x), g(x)\}$. Dimostrare che h è continua (applicare il Lemma dell'incollamento).