Esercizi di Geometria 3, foglio 1 (marzo 2018)

1. Sia A un sottospazio di X e B un sottospazio di Y. Dimostrare che la topologia prodotto di $A \times B$ coincide con la topologia sottospazio di $A \times B$ in $X \times Y$.

2. i) Se X_α sono spazi di Hausdorff, $\alpha \in J$, dimostrare che il prodotto $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ è di Hausdorff.

ii) Dimostrare che ogni spazio ordinato è di Hausdorff.

iii) Dimostrare che un sottospazio di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff.

iv) Dimostrare che uno spazio X è di Hausdorff se e solo se la diagonale $\Delta = \{x \times x : x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$.

v) Siano Y uno spazio di Hausdorff e $f, g : X \to Y$ applicazioni continue. Dimostrare che $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X.

3. Dimostrare che una successione x_n in un prodotto $\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$ converge a x se e solo se $\pi_\beta(x_n)$ converge a $\pi_\beta(x)$, per ogni $\beta \in J$ ("convergenza puntuale").

4. i) Dimostrare che la proiezione $\pi_1 : X \times Y \to X$ sulla prima coordinata è un' applicazione aperta.

ii) Dimostrare che la proiezione $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è un'applicazione chiusa.

5. i) Sia $X = (X, d)$ uno spazio metrico. Dimostrare che $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è un'applicazione continua (utilizzare la definizione locale di continuità).

ii) Dimostrare che la topologia metrica è la topologia meno fine su X tale che $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è continua.

6. i) Sia X uno spazio metrico che contiene un sottoinsieme numerabile denso. Dimostrare che X è second countable.

ii) Concludere che $\mathbb{R}_l$ non è metrizzabile.