Esercizi di Geometria 1, foglio 9 (dicembre 2019)

1. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita, e W un sottospazio di V tale che $f(W) \subset W$. Se f è triangolarizzabile, dimostrare che anche la sua restrizione $f|W : W \to W$ è triangolarizzabile (usare il teorema sulla triangolarizzazione).

2. Usando vettori e ortogonalità, dimostrare:

i) Il teorema di Pitagoras sul triangolo rettangolare.

ii) Le due diagonali di un rombo (parallelogramma equilaterale) sono ortogonali.

iii) Il teorema di Talete che l'angolo opposto al diametro di un triangolo iscritto in una semicirconferenza è un angolo retto.

iv) Le tre altezze di un triangolo si intersecano in un punto.

3. Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Fissato $v \in V$, sia $\phi_v : V \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\phi_v(w) = < v, w >$, per ogni $w \in V$.

i) Dimostrare che ϕ_v è lineare (e allora $\phi_v \in V^*$, lo spazio duale di V).

ii) Dimostrare che $\phi : V \to V^*$, $\phi(v) = \phi_v$, è lineare.

iii) Dimostrare che ϕ è iniettiva e, se la dimensione di V è finita, anche suriettiva e allora un isomorfismo.

Commento. L'isomorfismo $\phi : V \to V^*$ è naturale perché non dipende da nessuna scelta (vedere il commento dell'esercizio 3 del foglio 6).

4. i) Per la matrice ortogonale (rotazione) e unitaria

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

trovare una matrice unitaria S e la sua inversa tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale (quale matrice diagonale?).

ii) Per la matrice ortogonale (riflessione)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

trovare una matrice ortogonale S e la sua inversa tale che $S^{-1}AS$ sia una matrice diagonale.

La retta di riflessione è l'autospazio dell'autovalore 1 di A: dimostrare che questa retta ha l'angolo $\alpha/2$ con l'asse della prima coordinata di $\mathbb{R}^2$. (Potrebbe essere utile la formula $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.)

Per la matrice ortogonale S si può scegliere una rotazione (qual'è l'angolo della rotazione?), oppure una riflessione (qual'è l'angolo della retta di questa riflessione con la prima asse delle coordinate?); interpretare in modo geometrico.

5. i) Siano $f, g : V \to V$ endomorfismi di uno spazio vettoriale V che commutano ($f \circ g = g \circ f$). Sia $\mathrm{Aut}_f(\lambda)$ un autospazio di f. Dimostrare che $g(\mathrm{Aut}_f(\lambda)) \subset \mathrm{Aut}_f(\lambda)$.
ii) Siano $f, g : V \to V$ automorfismi unitari di uno spazio unitario V di dimensione finita che commutano. Dimostrare che esiste una base ortonormale di V di autovettori communi di f e g (cioè, f e g sono diagonalizzabili simultaneamente; utilizzare il teorema della forma normale per automorfismi unitari per ogni autospazio di f, invariante sotto g).