Esercizi di Geometria 1, foglio 9 (dicembre 2018)

1. i) Per le rotazioni e riflessioni

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

dimostrare che $A(\alpha)A(\beta) = A(\alpha+\beta)$, e $B(\alpha)B(\beta) = A(\alpha-\beta)$, in modo algebrico e geometrico.

ii) Con $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\,\sin(\alpha)$, dimostrare che $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$.

iii) Dimostrare che i gruppi SO(2) e U(1) sono isomorfi.

2. i) Per la matrice ortogonale (rotazione) e unitaria

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

trovare una matrice unitaria S e la sua inversa tale che $S^{-1}AS$ è diagonale (quale matrice diagonale?).

ii) Per la matrice ortogonale (riflessione)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

trovare una matrice ortogonale S e la sua inversa tale che $S^{-1}AS$ è una matrice diagonale.

La retta di riflessione è l'autospazio dell'autovalore 1 di A: dimostrare che questa retta ha l'angolo $\alpha/2$ con l'asse della prima coordinata di $\mathbb{R}^2$. (Potrebbe essere utile la formula $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.)

Per la matrice ortogonale S si può scegliere una rotazione (qual'è l'angolo della rotazione?), oppure una riflessione (qual'è l'angolo della retta di questa riflessione con la prima asse delle coordinate?); interpretare in modo geometrico.

3. i) Per la matrice ortogonale e unitaria

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

trovare la forma normale unitaria (diagonale) di A, poi anche la forma normale ortogonale. La matrice A definisce una rotazione di $\mathbb{R}^3$: qual'è l'asse di questa rotazione (l'autospazio dell'autovalore 1), e l'angolo di rotazione? Interpretare in modo geometrico.

ii) Per la matrice ortogonale e unitaria

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

trovare la forma normale unitaria (diagonale) di A. Trovare una matrice unitara S e la sua inversa tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale. Poi trovare anche la forma normale ortogonale di A.

iii) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'automorfismo definito da $f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = e_3,\ \dots\ , f(e_{n-1}) = e_n,\ f(e_n) = e_1$. Trovare la matrice A di f rispetto alla base standard (una matrice ortogonale e unitaria), gli autovalori di f e la forma normale unitaria (diagonale) di A.

4. i) Siano $f, g : V \to V$ endomorfismi di uno spazio vettoriale V che commutano ($f \circ g = g \circ f$). Sia $\mathrm{Aut}_f(\lambda)$ un autospazio di f. Dimostrare che $g(\mathrm{Aut}_f(\lambda)) \subset \mathrm{Aut}_f(\lambda)$.

ii) Siano $f, g : V \to V$ automorfismi unitari di uno spazio unitario V di dimensione finita che commutano. Dimostrare che esiste una base ortonormale di V di autovettori communi di f e g (cioè, f e g sono diagonalizzabili simultaneamente; utilizzare il teorema della forma normale per automorfismi unitari per ogni autospazio di f, invariante sotto g).