Esercizi di Geometria 1, foglio 8 (dicembre 2018)

1. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita, e W un sottospazio di V tale che $f(W) \subset W$. Se f è triangolarizzabile, dimostrare che anche la sua restrizione $f|W : W \to W$ è triangolarizzabile (usare il teorema sulla triangolarizzazione).

2. i) Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Dimostrare che

$$< v, w >= (||v+w||^2 - ||v-w||^2)/4$$

(una formula di polarizzazione). Poi dimostrare l'uguglianza del parallelogramma

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2.$$

ii) Per $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sia $|x|$ il massimo di $|x_1|, \ldots, |x_n|$. Dimostrare che $|x|$ definisce una norma su $\mathbb{R}^n$, e che questa norma non è la norma associata a un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ se $n > 1$ (dimostrare che non vale l'uguglianza del parallelogramma).

iii) Sia $||v||$ una norma dello spazio vettoriale reale V tale che vale l'uguglianza del parallelogramma. Dimostrare che $< v, w >= (||v+w||^2 - ||v-w||^2)/4$ definisce un prodotto scalare su V, con norma associata $||v||$.
(Per dimostrare bilinearità rispetto alla molteplicazione scalare di V, considerare prima scalari in $\mathbb{Z}$, e poi in $\mathbb{Q}$; questo implica anche il caso di scalari in $\mathbb{R}$, assumendo la continuità di tutte le applicazioni coinvolte e la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.)

3. Usando vettori e ortogonalità, dimostrare:

i) Il teorema di Pitagoras sul triangolo rettangolare.

ii) Le due diagonali di un rombo (parallelogramma equilaterale) sono ortogonali.

iii) Il teorema di Talete che l'angolo opposto al diametro di un triangolo iscritto in una semicirconferenza è un angolo retto.

iv) Le tre altezze di un triangolo si intersecano in un punto.

4. Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Fissato $v \in V$, sia $\phi_v : V \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\phi_v(w) = < v, w >$, per ogni $w \in V$.

i) Dimostrare che ϕ_v è lineare (e allora $\phi_v \in V^*$, lo spazio duale di V).

ii) Dimostrare che $\phi : V \to V^*$, $\phi(v) = \phi_v$, è lineare.

iii) Dimostrare che ϕ è iniettiva e, se la dimensione di V è finita, anche suriettiva e allora un isomorfismo.

Commento. L'isomorfismo $\phi : V \to V^*$ è naturale perché non dipende da nessuna scelta (vedere il commento dell'esercizio 5 del foglio 5).