Esercizi di Geometria 1, foglio 7 (novembre 2019)

1. Calcolare il determinante della matrice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

2. i) Dimostrare che, per indeterminati $x_1, \dots, x_n$,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

("determinante di Vandermonde": usando trasformazioni elementari sulle colonne, trasformare la prima riga della matrice in $(1, 0, \dots, 0)$, cambiando l'ultima colonna con un multiplo della penultima, poi la penultima con un multiplo della precedente etc.)

ii) Dati n punti $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ in $\mathbb{R}^2$, con $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, dimostrare che esiste esattamente un polinomio reale $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$ del grado $\leq n-1$ tale che $p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n$. (Interpretare $p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n$ come sistema lineare di n equazioni in n indeterminati $a_0, \dots, a_{n-1}$: qual'è la matrice di questo sistema lineare?)

3. i) Per una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ su K, sia $A(x)$ la matrice quadrata $(a_{ij} - x)$, in una indeterminata x. Dimostrare che il determinante di $A(x)$ è un polinomio lineare $p(x) = \alpha x + \beta$ con coefficienti $\alpha, \beta \in K$ (pura esistenza, non computare α e β), poi dimostrare che $\beta = \det(A)$.

ii) Nel caso $a \neq b$, computare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & a & \dots & a \\ b & \lambda_2 & a & \dots & a \\ b & b & \lambda_3 & \dots & a \\ . & . & . & \dots & . \\ b & b & b & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(applicare i) nei casi $x = a$ e $x = b$).