Esercizi di Geometria 1, foglio 7 (novembre 2018)

1. i) Dimostrare che la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile, poi trovare una matrice S tale che $S^{-1}AS$ è diagonale.
ii) Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente matrice reale è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

iii) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente matrice reale è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

su un campo K. Trovare se A è diagonalizzabile o triangolarizzabile sui campi $K = \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z}_5$.

3. Sia A una matrice triangolare della forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Dire quali dei coefficienti a, b e c devono essere 0 affinché la matrice A sia diagonalizzabile, nei seguenti casi:

i) tutti i λ_i sono diversi;
ii) tutti i λ_i sono uguali;
iii) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$;
iv) $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$.

4. Per le seguenti matrici reali A, trovare la forma normale di Jordan di A. Poi trovare in ogni caso una base di Jordan e una matrice S tale che $S^{-1}AS$ è una matrice di Jordan.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. i) Trovare la forma normale di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poi trovare una base di Jordan e una matrice S tale che $S^{-1}AS$ è una matrice di Jordan.

ii) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dare condizioni necessari e anche sufficienti per i coefficienti $a, \ldots, f$ tale che la forma normale di Jordan di A ha un unico blocco di Jordan. Per questo caso, trovare una base di Jordan e una matrice S tale che $S^{-1}AS$ è in forma normale di Jordan.

iii) Trovare la forma normale di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(in dipendenza dai parametri a e b). Poi trovare una base di Jordan e la matrice del cambiamento di base in ogni caso.