**Esercizi di Geometria 1, foglio 6 (novembre 2019)**

1. Per ciascuna delle matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

(con $x \in \mathbb{R}$), trovare matrici quadrate invertibile $S$ e $T$ tale che $SAT$ è una matrice della forma $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Dimostrare che ogni trasposizione $\sigma = (a, b)$ è una permutazione dispari (contare il numero di inversioni $i < j, \ \ \sigma(i) > \sigma(j)$ di $\sigma$).

3. Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita, $V^*$ lo spazio duale di $V$, e $V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}(V^*, K)$ lo *spazio biduale* di $V$ (il duale del duale). Per $v \in V$, sia $\tau_v : V^* \to K$ definita da

$$\tau_v(\phi) = \phi(v),$$

per ogni $\phi : V \to K$ in $V^*$. Dimostrare che:

i) $\tau_v : V^* \to K$ è lineare (e allora $\tau_v$ è un elemento di $V^{**}$).

ii) $\tau : V \to V^{**}$, definita da $\tau(v) = \tau_v$, è lineare.

iii) $\tau : V \to V^{**}$ è un isomorfismo.

**Commento.** Si dice che $\tau : V \to V^{**}$ è un' *isomorfismo naturale*, perché dipende da nessuna scelta. Allora si identifica $V^{**}$ con $V$ attraverso $\tau$, scrivendo semplicemente $v$ al posto di $\tau_v$. Cosi la definizione $\tau_v(\phi) = \phi(v)$ di $\tau_v$ diventa il suggestivo

$$v(\phi) = \phi(v),$$

il primo $v$ interpretato come elemento di $V^{**}$, il secondo come elemento di $V$.

Osserviamo che anche $V$ e $V^*$ sono isomorfi (perché hanno la stessa dimensione), ma che non esiste un'isomorfismo naturale, in generale.