Esercizi di Geometria 1, foglio 5 (novembre 2019)

1. i) Determinare per quali valori $x \in \mathbb{R}$ la matrice reale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

è invertibile, e trovare la matrice inversa per questi valori.

ii) Per un parametro $k \in \mathbb{R}$, calcolare il rango della matrice reale

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix};$$

per quali valori di k questa matrice è invertibile?

2. Determinare il numero di elementi (l'ordine) del gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ (le matrici invertibili $n \times n$ con coefficienti nel campo finito $K = \mathbb{Z}_p$, per un numero primo p). (Contare il numero di basi dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_p)^n$).

3. Dimostrare che una matrice $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ ha rango r se e solo se A ha una sottomatrice invertibile $r \times r$ (i.e., cancellando $m - r$ righe e $n - r$ colonne opportune di A), ma nessuna sottomatrice invertibile $s \times s$, con $s > r$.

4. Sia $(v_i)_{i \in I}$ una base di uno spazio vettoriale V, per un insieme di indici I arbitrario, e siano $v_i^* \in V^*$ tale che $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker).

i) Dimostrare che i vettori v_i^*, $i \in I$, sono linearmente indipendenti.

ii) Dimostrare che i vettori v_i^*, $i \in I$, generano V^* se e solo se V ha dimensione finita.