Esercizi di Geometria 1, foglio 5 (novembre 2018)

1. i) Determinare per quali valori $x \in \mathbb{R}$ la matrice reale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

è invertibile, e trovare la matrice inversa per questi valori.
ii) Per un parametro $k \in \mathbb{R}$, calcolare il rango della matrice reale

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix};$$

per quali valori di k questa matrice è invertibile?

2. Determinare il numero di elementi (l'ordine) del gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ (le matrici invertibili $n \times n$ con coefficienti nel campo finito $K = \mathbb{Z}_p$, per un numero primo p). (Contare il numero di basi dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_p)^n$).

3. Dimostrare che una matrice $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ ha rango r se e solo se A ha una sottomatrice invertibile $r \times r$ (i.e., cancellando $m - r$ righe e $n - r$ colonne opportune di A), ma nessuna sottomatrice invertibile $s \times s$, con $s > r$.

4. Per ciascuna delle matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

(con $x \in \mathbb{R}$), trovare matrici quadrate invertibile S e T tale che SAT è una matrice della forma $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, V^* lo spazio duale di V, e $V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}(V^*, K)$ lo *spazio biduale* di V (il duale del duale). Per $v \in V$, sia $\tau_v : V^* \to K$ definita da

$$\tau_v(\phi) = \phi(v),$$

per ogni $\phi : V \to K$ in V^*. Dimostrare che:

i) $\tau_v : V^* \to K$ è lineare (e allora τ_v è un elemento di V^{**}).

ii) $\tau : V \to V^{**}$, definita da $\tau(v) = \tau_v$, è lineare.

iii) $\tau : V \to V^{**}$ è un isomorfismo.

Commento. Si dice che $\tau : V \to V^{**}$ è un' *isomorfismo naturale*, perché dipende da nessuna scelta. Allora si identifica V^{**} con V attraverso τ, scrivendo semplicemente v al posto di τ_v. Cosi la definizione $\tau_v(\phi) = \phi(v)$ di τ_v diventa il suggestivo

$$v(\phi) = \phi(v),$$

il primo v interpretato come elemento di V^{**}, il secondo come elemento di V.

Osserviamo che anche V e V^* sono isomorfi (perché hanno la stessa dimensione), ma che non esiste un'isomorfismo naturale, in generale.