

Esercizi di Geometria 1, foglio 4 (ottobre 2019)

1. Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e v_1, \dots, v_n una base di V . Dimostrare che
- f è iniettiva se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.
 - f è suriettiva se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano W .

2. i) Siano V e W spazi vettoriali di dimensioni finite e $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare iniettiva. Dimostrare che esiste un'applicazione lineare $g : W \rightarrow V$ tale che $g \circ f = \text{id}_V$.

ii) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare suriettiva. Dimostrare che esiste un'applicazione lineare $g : W \rightarrow V$ tale che $f \circ g = \text{id}_W$.

(Usare i teoremi del prolungamento a una base e della determinazione di un'applicazione lineare su una base.)

3. Siano W_1 e W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita, e sia $f : W_1 \times W_2 \rightarrow V$ l'applicazione $f(w_1, w_2) = w_1 + w_2$ (dove $W_1 \times W_2$ denota il prodotto di W_1 e W_2 definito in esercizio 2 del foglio 2).

i) Dimostrare che f è lineare.

ii) Descrivere il nucleo $\text{Ker}(f)$ e l'immagine $\text{Im}(f)$ di f : quali sono le loro dimensioni?

iii) Applicare la formula di dimensione per applicazioni lineari per ottenere la formula di dimensione per sottospazi.

4. Per uno K -spazio vettoriale V , lo spazio vettoriale $V^* = \text{Hom}(V, K)$ si chiama *spazio duale* di V , gli elementi di V^* (che sono applicazioni lineari $\phi : V \rightarrow K$) si chiamano *forme lineari* di V .

i) Sia v_1, \dots, v_n una base di V ; per il teorema della determinazione di un'applicazione lineare su una base, esistono elementi v_1^*, \dots, v_n^* di V^* tale che

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$$

(simbolo di Kronecker: 1 se $i = j$, 0 se $i \neq j$). Dimostrare che v_1^*, \dots, v_n^* è una base di V^* (si chiama la *base duale* di v_1, \dots, v_n).

ii) Dimostrare che, per ogni $v \in V$ e $\phi \in V^*$,

$$v = v_1^*(v)v_1 + \dots + v_n^*(v)v_n,$$

$$\phi = \phi(v_1)v_1^* + \dots + \phi(v_n)v_n^*.$$