Esercizi di Geometria 1, foglio 4 (ottobre 2018)

1. i) Siano $f, g : V \to W$ applicazioni lineari. Dimostrare che anche la somma $f + g : V \to W$ è lineare.

ii) Siano $f : V \to W$ e $g : W \to U$ applicazioni lineari. Dimostrare che anche la composizione $g \circ f : V \to U$ è lineare.

2. Siano W_1 e W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita, e sia $f : W_1 \times W_2 \to V$ l'applicazione $f(w_1, w_1) = w_1 + w_2$ (dove $W_1 \times W_2$ denota il prodotto di W_1 e W_2 definito in esercizio 2 del foglio 2).

i) Dimostrare che f è lineare.

ii) Descrivere il nucleo $\mathrm{Ker}(f)$ e l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ di f: quale sono le loro dimensioni?

iii) Applicare la formula di dimensione per applicazioni lineari per ottenere la formula di dimensione per sottospazi.

3. Per uno K-spazio vettoriale V, lo spazio vettoriale $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ si chiama *spazio duale* di V, gli elementi di V^* (che sono applicazioni lineare $\phi : V \to K$) si chiamano *forme lineari* di V.

i) Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V; per il teorema della determinazione di un'applicazione lineare su una base, esistono elementi $v_1^*, \ldots, v_n^*$ di V^* tale che

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$$

(simbolo di Kronecker: 1 se $i = j$, 0 se $i \neq j$). Dimostrare che $v_1^*, \ldots, v_n^*$ è una base di V^* (si chiama la *base duale* di $v_1, \ldots, v_n$).

ii) Dimostrare che, per ogni $v \in V$ e $\phi \in V^*$,

$$v = v_1^*(v)v_1 + \ldots + v_n^*(v)v_n,$$

$$\phi = \phi(v_1)v_1^* + \ldots + \phi(v_n)v_n^*.$$

4. Sia $(v_i)_{i \in I}$ una base di uno spazio vettoriale V, per un insieme di indici I arbitrario, e siano $v_i^* \in V^*$ tale che $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker).

i) Dimostrare che i vettori v_i^*, $i \in I$, sono linearmente indipendenti.

ii) Dimostrare che i vettori v_i^*, $i \in I$, generano V^* se e solo se V ha dimensione finita.