Esercizi di Geometria 1, foglio 10 (dicembre 2018)

1. i) Per la matrice simmetrica reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

trovare gli autovalori e la forma normale diagonale di A. Poi trovare una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS$ è una matrice diagonale.

iii) Per la matrice simmetrica reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

trovare gli autovalori e basi degli autospazi. Poi trovare una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS$ è diagonale.

2. Sia V uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita e $f : V \to V$ un endomorfismo anti-autoaggiunto, cioè

$$< v, f(w) >= - < f(v), w >,$$

per tutti $v, w \in V$. Dimostrare che:

i) ogni autovalore di f è in $i\mathbb{R}$ (un numero puramente immaginario o 0);

ii) autovettori di autovalori distinti sono ortogonali;

iii) la matrice di f rispetto a una base ortonormale di V è anti-hermitiana ($A = -{}^t\bar{A}$);

iv) esiste una base ortonormale di autovettori di f.

3. i) Per la matrice simmetrica reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

trovare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ di autovalori di A e una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS$ è una matrice diagonale.

ii) Trovare la forma diagonale, in coordinate rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ (assi principali), della forma quadratica

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_3 = {}^t xAx.$$

Trovare una base $\mathcal{B}'$ ortogonale di Sylvester per la forma quadratica q: qual'è la forma diagonale di q in coordiate rispetto a questa base? Poi fare un disegno della quadrica $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : q(x) = 1\}$ in queste coordinate.

4. Data la forma quadratica reale $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3,$$

scrivere q nella forma $q(x) = {}^t x A x$, con una matrice simmetrica A e trovare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovalori di A (assi principali per q). Qual'è la forma diagonale di q in coordinate rispetto a questa base? Poi trovare una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di Sylvester per q e la forma diagonale di q rispetto a questa base; fare un disegno della quadrica $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : q(x) = 1\}$ in queste coordinate.