Università di Tieste – Facoltà d'Ingegneria.
Laurea triennale in ingegneria chimica, civile, dei materiali, edile, meccanica, navale.

Corso di Analisi Matematica 1

Anno Accademico 2005/2006

Prof. Gino Tironi
Esercitazioni: dott. Alessandro Soranzo

Programma finale alla data del 22 dicembre 2005.

Cenni di logica formale. Proposizioni, connettivi, tabelle di verità. Predicati, quantificatori; negazione di proposizioni contenenti quantificatori.

Insiemi numerici.

Numeri naturali. Un accenno ai numeri naturali $\mathbb{N}$. Proprietà fondamentali. Il principio di induzione (formulazione logica e formulazione insiemistica). *Numeri interi.* Un accenno agli interi relativi $\mathbb{Z}$: coppie di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; relazione d'equivalenza, operazioni. *Numeri razionali.* Un accenno ai razionali $\mathbb{Q}$: è un corpo commutativo ordinato. L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Cenni di calcolo combinatorio. Permutazioni, disposizioni, combinazioni. La potenza n-esima di un binomio: formula di Newton (con dimostrazione).

Numeri reali. Insiemi ordinati: massimo e minimo, limitazioni superiori e inferiori, estremi superiori e inferiori. Unicità del massimo e del minimo (con dimostrazione). Classi separate. Proprietà o principio di Dedekind. Non completezza di $\mathbb{Q}$: in $\mathbb{Q}$ esistono classi separate prive di elemento di separazione. L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Gli assiomi di $\mathbb{R}$. Esistenza dell'estremo superiore (inferiore) in $\mathbb{R}$ (con dimostrazione). Proprietà caratteristiche (con dimostrazione). Insiemi limitati in $\mathbb{R}$. Insiemi superiormente illimitati, insiemi inferiormente illimitati, insiemi illimitati in $\mathbb{R}$. Notazioni $\sup E = +\infty$ e $\inf E = -\infty$. Significato, esempi. La proprietà di Archimede: è verificata in $\mathbb{R}$ (senza dimostrazione). La proprietà di Dedekind, l'esistenza del sup, l'esistenza dell' inf sono equivalenti (senza dimostrazione). Valore assoluto e proprietà; in particolare la disuguaglianza triangolare (con dimostrazione). Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (con dimostrazione). Esistenza ed unicità della radice n-esima di un numero reale positivo; esistenza e unicità delle soluzioni in $\mathbb{R}$ dell'equazione $x^n = a$, per $a \geq 0$, $n \geq 2$, n pari; esistenza e unicità delle soluzioni di $x^n = a$, $a \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ dispari (con dimostrazione). Modelli del campo dei numeri reali. Cenno alle sezioni di $\mathbb{Q}$. Cenno alla scrittura decimale dei numeri reali.

Numeri complessi. Definizione e proprietà dei numeri complessi. $\mathbb{C}$ è un campo (dimostrazione dell'esistenza del reciproco). Forma cartesiana di un numero complesso. Parte reale e parte immaginaria. Relazione di coniugio. Proprietà del coniugio. Forma trigonometrica (polare) dei numeri complessi. Modulo, argomento e argomento principale di un numero complesso. Piano di Argand-Gauss. Formule di De Moivre (con dimostrazione). Potenze di un numero complesso. Soluzioni dell'equazione $z^n = w$ (con dimostrazione). Polinomi e loro radici. Teorema di Cartesio - Ruffini (con dimostrazione).

Funzioni elementari.

Nozione di funzione. Dominio. Codominio e insieme immagine. Immagine e controimmagine di una funzione. Grafico di una funzione. Applicazioni o funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Funzione inversa. Composizione di applicazioni. Caratterizzazione dell'inversa (senza dimostrazione). Funzioni reali di variabile reale. Somma e prodotto di funzioni. L'anello delle funzioni reali $f : E(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è un anello commutativo con unità nel quale non vale la legge dell'annullamento del prodotto. Funzioni simmetriche (pari e dispari). Funzioni periodiche. Funzioni monotone (crescenti, non decrescenti, decrescenti, non crescenti).

Funzioni razionali. Polinomi e funzioni razionali intere. Richiami sulla divisione di polinomi, radici, molteplicità. Principio d'identità dei polinomi. Funzioni razionali fratte. Il teorema fondamentale dell'algebra. Molteplicità di una radice. Radici complesse di un polinomio a coefficienti reali. Fattorizzazione completa in $\mathbb{C}$ di un polinomio in fattori di primo grado. Fattorizzazione in $\mathbb{R}$ di un polinomio in fattori irriducibili di primo e secondo grado (senza dimostrazione).

Funzioni esponenziale e logaritmo. Potenze con esponente in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Loro proprietà. Se $a > 1$ e $x \in \mathbb{Q}$, a^x è crescente. Classi contigue. Se γ è un numero reale, $a > 0$, le classi $\{a^c : c \in \mathbb{Q}, c < \gamma\}$ e

$\{a^d : d \in \mathbb{Q}, d > \gamma\}$ sono contigue (senza dimostrazione). Definizione: se $a > 1$, $a^\gamma = \sup\{a^c : c \in \mathbb{Q}, c < \gamma\}$. Proprietà delle potenze con esponente reale (senza dimostrazione). La funzione esponenziale a^x, $x \in \mathbb{R}$; casi $a > 1$ e $0 < a < 1$. Per $a > 1$, a^x è crescente su $\mathbb{R}$ (con dimostrazione); è decrescente per $0 < a < 1$. Esistenza per $a > 0, a \neq 1$, di una e una sola soluzione dell'equazione $a^y = b, b > 0$. Il logaritmo in base a come inversa dell'esponenziale di base a. Proprietà del logaritmo (con dimostrazione).

Funzioni trigonometriche. Richiami sulle funzioni trigonometriche. Le funzioni trigonometriche inverse arcoseno, arcocoseno, arcotangente.

Successioni di numeri reali e loro limiti.

Successioni, sottosuccessioni e code di una successione. Il numero di Nepero: $e = \sup\{(1 + \frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}^+\}$. $e = 2,718281828459045\ldots$. Limite finito di una successione. Successioni che hanno limite $+\infty$, $-\infty$, ∞. Teorema sul limite delle sottosuccessioni di una successione che tende a $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty, +\infty\}$ per $n \to +\infty$ (con dimostrazione). Intervalli di $\mathbb{R}$. Caratterizzazione (senza dimostrazione). Teorema di Cantor sulle successioni d'intervalli incapsulati (con dimostrazione). Intorni di un numero reale, intorni di $+\infty$, ∞, $-\infty$. Definizione di limite di una successione utilizzando la nozione di intorno (cenno di dimostrazione dell'equivalenza delle definizioni). Teorema dell'unicità del limite di una successione di numeri reali (senza dimostrazione). Permanenza del segno per successioni. Teorema sul limite delle successioni monotone (sd). La successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ con $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ è crescente e superiormente limitata (con dimostrazione). $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Limiti e continuità di funzioni

Limiti di funzioni. Preliminari: esempio del rapporto incrementale e della nozione di tangente al grafico di una funzione. Utilità del calcolo dei limiti di funzioni. Limiti e valore di una funzione in un punto x_0. Punto d'accumulazione di un insieme. $\mathbb{N}$ non ha punti d'accumulazione in $\mathbb{R}$ (con dimostrazione). Definizione di limite nel caso finito: definizione ε, δ. Definizione usando gli intorni. Casi di limite infinito e per x che tende a infinito. Definizione generale di limite, con gli intorni. Esempi di specializzazione della definizione generale. Limite destro e sinistro. Esempi. Limite della restrizione (con dimostrazione). Non esistenza di limiti. Non esiste il limite di $\operatorname{sen} x$ per $x \to \infty$. Piú in generale, non esistenza di limite per $x \to \infty$ di funzioni periodiche non costanti. Limiti destro e sinistro di una funzione in un punto. L'esistenza del limite di una funzione in un punto equivale all'esistenza e all'uguaglianza dei limiti destro e sinistro nel punto. Punti distinti di $\mathbb{R}$ hanno intorni disgiunti. Teorema di unicità del limite (con dimostrazione). Teorema di permanenza del segno e della limitatezza locale (con dimostrazione). Teorema sul limite delle funzioni monotòne (con dimostrazione). Vari casi, esempi e precauzioni nell'uso. Teorema del confronto (con dimostrazione). Limite del valore assoluto (senza dimostrazione). Teoremi sul limite della somma (con dimostrazione nel caso di limiti finiti e nel caso di un limite $l = -\infty$ e l'altra funzione localmente superiormente limitata). Esempi in cui il teorema non è applicabile. Teoremi sul limite del prodotto (con dimostrazione nel caso di limiti finiti). Esempi in cui il teorema non è applicabile. Funzioni localmente discoste da zero. Teorema sul limite della funzione reciproca (senza dimostrazione). Teorema sul limite delle funzioni composte (con dimostrazione): esempi e controesempi. Limiti per x tendente ad infinito delle funzioni razionali. Metodi di calcolo dei limiti usando sostituzioni e i limiti notevoli.

Funzioni continue. Punti isolati. Continuità di una funzione in un punto. Definizioni ε, δ e con gli intorni: equivalenza. Continuità in un insieme. Prolungamento per continuità. Teorema della permanenza del segno (sd). Teorema della limitatezza locale (senza dimostrazione). Continuità della restrizione di una funzione continua (sd). Continuità del valore assoluto di una funzione continua (sd). Continuità della funzione somma di funzioni continue (sd). Continuità della funzione prodotto di funzioni continue (sd). Continuità della funzione reciproca di una funzione continua (sd). Continuità della funzione quoziente di funzioni continue (sd). Continuità della funzione composta di funzioni continue (sd). Teorema sul limite di una funzione composta con una funzione continua (sd). Esempi ed applicazioni delle proprietà dei limiti e delle funzioni continue. Continuità della funzione identica su $\mathbb{R}$. Contuità di $f(x) = x^n$, per $n \geq 1$. Continuità su $\mathbb{R}$ della funzione esponenziale (con dimostrazione). Continuità delle funzioni razionali (sd), del seno, del coseno (con dimostrazione). Continuità della funzione inversa (con dimostrazione). Esempi: continuità di $\log_a(x), \operatorname{arcsen}(x), \arccos(x), \operatorname{arctg}(x)$, di $\sqrt[n]{x}$. Teorema degli zeri (con dimostrazione). Teorema di connessione o dei valori intermedi (con dimostrazione). Applicazioni del teorema di connessione nella verifica dell'esistenza di soluzioni di equazioni definite da funzioni continue. Massimo e minimo di una funzione. Punto di massimo e di minimo. Teorema di Weierstrass (senza dimostrazione).

Limiti fondamentali e notevoli (tutti con dimostrazione).

$$e = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \quad (a\in \mathbb{R}^+,\, a\neq 1) \quad ; \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} \quad (\alpha\in\mathbb{R}).$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}a^x\cdot x^n; \quad (a\in\mathbb{R}^+,\, p\in\mathbb{R},\, n\in\mathbb{Z}) \quad ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+}x^p\cdot\log_a x; \quad (p\in\mathbb{R},\, a\in\mathbb{R}^+,\, a\neq 1).$$

Calcolo differenziale per funzioni reali di una variabile reale.

Derivate e differenziali. Derivata di una funzione in un punto. Varie notazioni per il rapporto incrementale. Derivata destra e sinistra. Le funzioni derivabili sono continue (con dimostrazione), ma non vale il viceversa. Funzioni con derivata infinita in un punto. Derivate successive. Le classi di funzioni $\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{C}^1 \supset \ldots \supset \mathcal{C}^n \supset \ldots \supset \mathcal{C}^\infty$. Derivazione di $c\cdot f$ e di $f+g$. Derivata di $f\cdot g$. Derivata di $\frac{1}{g}$ e di $\frac{f}{g}$. Teorema della derivata della funzione inversa di una funzione strettamente monotona su un intervallo (con dimostrazione). $D\,x^n, n\geq 1$; $D\,\mathrm{sen}\,x$; $D\cos x$; $D\,a^x$ (con dimostrazione). Approssimante lineare. Differenziale. Teorema d'esistenza e unicità (con dimostrazione). Derivata di $\mathrm{tg}\,x$ e di $\mathrm{cotg}\,x$. Derivata delle funzioni razionali. Derivata di una funzione composta $g\circ f$; dimostrazione usando l'approssimante lineare. Derivate di $\log_a x, \mathrm{arcsen}\,x, \arccos x, \mathrm{arctg}\,x$. Derivata di $x^\alpha, x>0, \alpha\in\mathbb{R}$. Derivata di $f(x)^{g(x)}$ e di $\log_{f(x)} g(x)$. Derivata di $\sqrt[n]{x}$, come derivata di funzione inversa.

Proprietà locali del primo ordine. Funzioni crescenti (decrescenti) in un punto. Punti di minimo (massimo) relativo. Punti di minimo (massimo) relativo in senso debole. Esempi. Relazione tra il segno della derivata di una funzione in un punto e il comportamento locale della funzione nel punto (con dimostrazione). Teorema di Fermat (con dimostrazione). Ricerca dei punti di massimo (minimo) relativo di una funzione su un insieme. Esempi. Teorema sulla determinazione dei punti di massimo e minimo relativo di una funzione mediante lo studio del segno della derivata in un intorno del punto (con dimostrazione). Studio di una funzione.

Funzioni derivabili su un intervallo e teoremi di de L'Hôpital. Teorema di Rolle (con dimostrazione), osservazioni e commenti. Teorema di Cauchy (senza dimostrazione), teorema di Lagrange (come corollario del T. di Cauchy). Conseguenze del Teorema di Lagrange. Primitive di una funzione su un intervallo. Interpretazione geometrica dei Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange.

Teorema di de L'Hôpital nel caso $\frac{0}{0}$ (con dimostrazione per $x\to x_0\in\mathbb{R}$), e nel caso $\frac{\infty}{\infty}$ (sd). Applicazione dei teoremi di de L'Hôpital al calcolo dei limiti. Calcolo di limiti in cui le usuali regole algebriche non possono essere applicate: forme del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Teorema sul limite della derivata (sd).

Infiniti e infinitesimi. Classi d'equivalenza: ordini d'infinito e ordini d'infinitesimo. Relazione d'ordine parziale fra infiniti e fra infinitesimi. Infiniti e infinitesimi in un punto $x_0\in\mathbb{R}$ e in ∞. Ordini reali, soprareali, sottoreali, infrareali. Ordini di $f\cdot g$ e di $|f|^r$. Algebra degli ordini.

Approssimazione locale di una funzione. Rappresentazione di un polinomio in potenze di $(x-x_0)$ con $x_0\in\mathbb{R}$ e relazione fra i coefficienti di un polinomio e le sue derivate successive (con dimostrazione). Lemmi di Peano (con dimostrazione) e di Lagrange (senza dimostrazione). Teorema di Taylor: con dimostrazione dell'esistenza e unicità. Resti nelle forme di Peano e di Lagrange (senza dimostrazione). Formule di Taylor-Peano e di Taylor-Lagrange per le funzioni $e^x, \mathrm{sen}\,x, \cos x$. Calcolo di valori approssimati alla n-esima cifra decimale. Esempi di stime dell'errore. Coefficienti binomiali generalizzati. Formule di Taylor centrate nello zero (formule di Mc Laurin) di alcune funzioni elementari: $(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (e in particolare $\sqrt{x+1}$ e $\dfrac{1}{1+x}$), $\log(1+x)$. Esempi.

Proprietà locali del secondo ordine. Convessità di un insieme in $\mathbb{R}^2$. Funzioni convesse e concave su un intervallo. Una condizione sufficiente su f'' (senza dimostrazione). Concavità e convessità locali. Flessi.

Condizioni sufficienti per la concavità e convessità locali (con dimostrazione); una condizione necessaria per un punto di flesso se esiste $f''(x_0)$ (con dimostrazione). Una condizione sufficiente per l'esistenza di un punto di flesso (con dimostrazione). Condizioni sufficienti per i punti di massimo e minimo relativi. Alcuni esempi critici.

Calcolo integrale per funzioni reali di una variabile reale.

Integrale indefinito. Primitive e integrali indefiniti. Tabella di alcuni integrali indefiniti immediati. Derivazione e integrale indefinito. Regole d'integrazione per decomposizione, per parti, per sostituzione (con dimostrazione). Integrazione delle funzioni razionali. Teorema di Hermite della decomposizione di una funzione razionale in frazioni semplici. Alcune sostituzioni che razionalizzano la funzione integranda.

Integrale definito. Problema dell'area di un rettangoloide curvilineo. Decomposizione (o suddivisione) di un intervallo. Ordine per finezza delle decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori. Raffinando la decomposizione, le somme inferiori non diminuiscono e quelle superiori non crescono (con dimostrazione). Le classi delle somme inferiori e superiori sono separate (con dimostrazione). Integrabilità e integrale secondo Riemann. Una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità (con dimostrazione). Integrabilità sui sottointervalli (senza dimostrazione). Integrabilità delle funzioni monotone (con dimostrazione). Integrabilità delle funzioni continue (senza dimostrazione). Non integrabilità della funzione di Dirichlet. Linearità dell'integrale (senza dimostrazione), monotonia dell'integrale (senza dimostrazione), integrabilità del prodotto (senza dimostrazione). Integrabilità del valore assoluto (senza dimostrazione). Additività sul dominio (senza dimostrazione). Teorema della media (con dimostrazione). Integrale orientato. Formula di Chasles. Funzione integrale. Sua continuità (con dimostrazione). Teorema fondamentale del Calcolo (con dimostrazione). La funzione integrale è una primitiva di f su I, se $f \in \mathcal{C}^0(I)$. Formula di Torricelli-Barrow (con dimostrazione). Derivazione delle funzioni definite da integrali $\displaystyle\int_{x_0}^{\beta(x)} f(t)\,dt$ e $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$, se $f(t)$ è continua su un intervallo I e $\alpha(x), \beta(x)\colon J \to I$ sono derivabili sull'intervallo J a valori nell'intervallo I.

Integrali in senso generalizzato (integrali impropri). Funzioni localmente integrabili su un intervallo. Funzioni semplicemente integrabili e funzioni assolutamente integrabili in senso generalizzato su un intervallo. Criterio del confronto per l'assoluta integrabilità di una funzione localmente integrabile su un intervallo (sd). Confronti con le funzioni campione. Criterio dell'ordine di infinitesimo per l'assoluta integrabilità di una funzione localmente integrabile su un intervallo illimitato e criterio dell'ordine di infinito per l'assoluta integrabilità di una funzione illimitata localmente integrabile su un intervallo (sd).