Metodi Matematici per l'Ingegneria.
A.a. 2013-2014, sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

Anno di Corso __________ Laurea in Ingegneria ______________________
Si risolvano gli esercizi : 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○

ESERCIZIO N. 1. Usando il metodo dei residui, si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^4+16}.$$

RISULTATO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+16} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{16 e^{\sqrt{2}}} \left(\cos\sqrt{2} + \operatorname{sen}\sqrt{2}\right)$$

SVOLGIMENTO

Si consideri la funzione

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4+16}$. Le singolarità sono in $z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$, $k=0,1,2,3$ con z_0 e z_1 nel semipiano superiore.

Residui in z_0 e z_1: $\frac{e^{iz_k}}{4z_k^3}$, $k=0,1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z^4+16} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+16} dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4+16} dx$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^{iz_0}}{4z_0^3} + \frac{e^{iz_1}}{4z_1^3}\right) = 2\pi i\left(\frac{e^{2i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4\cdot 2^3 e^{\frac{3}{4}\pi i}} + \frac{e^{2i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4\cdot 2^3 e^{9/4\pi i}}\right)$$

$= \frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{16 e^{\sqrt{2}}}\left(\cos\sqrt{2} + \operatorname{sen}\sqrt{2}\right)$. Poiché $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4+16} dx = 0$,

resta $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+16} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{16 e^{\sqrt{2}}}\left(\cos\sqrt{2} + \operatorname{sen}\sqrt{2}\right)$

ESERCIZIO N. 2. È data la funzione $f(x) = \pi - |x|$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.

(*i*) Se ne determini lo sviluppo in serie di Fourier.

Per la parità di $f(x)$, $b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left\{ \cancel{(\pi - x)\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^\pi} + \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin kx\,dx \right\} = \frac{2}{\pi}\left\{ -\frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_0^\pi \right\} =$$

$$= -\frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ pari} \\ \dfrac{4}{\pi k^2} & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)x$$

(*ii*) Si dica, giustificando l'affermazione, se la convergenza è puntuale o uniforme.

La convergenza è uniforme poiché l'estensione periodica di f su $\mathbb{R}$ è continua, $f'(x)$ è continua a tratti e tutte le altre condizioni sono soddisfatte ($f' \in L^2(-\pi, \pi)$, $f(x) = f(-\pi) + \int_0^x f'(t)\,dt$

(*iii*) Utilizzando l'uguaglianza di Parseval, si calcoli la somma della serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

$$\pi\left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx, \text{ cioè}$$

$$\pi\left(\frac{\pi^2}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(2m+1)^4}\right) = 2\int_0^\pi (\pi - x)^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$\frac{16}{\pi^4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}, \text{ dunque}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N.3. Si trovi la funzione $f(x)$ che ha come trasformata di Fourier $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{1 - i\xi}$. Si valuti di conseguenza la trasformata di $x^2 f'(x)$; si calcoli $\mathcal{F}^2(f)(x)$.

RISULTATO

$$\check{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{1-i\xi}\right)(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \\ e^x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(x^2 f')(\xi) = \frac{2}{(1-i\xi)^3}$$

$$\mathcal{F}^2(f)(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO

$$\check{\mathcal{F}}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Nel nostro caso

$$\check{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{1-i\xi}\right)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{1-i\xi}\,d\xi.$$

Il polo di $\frac{1}{1-i\xi}$ si ha in $1-i\xi=0$, cioè $i\xi=1$, $\xi=-i$, nel semipiano inferiore. Se $x>0$, poiché non ci sono singolarità nel semipiano superiore, per lemma di Jordan, si ha $f(x)=0$. Se $x<0$, per Jordan,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix\xi}}{1-i\xi} = \frac{1}{2\pi}\cdot(-2\pi i)\,R\left(\frac{e^{ix\xi}}{1-i\xi}, -i\right)$$

$$= -i\,\frac{e^x}{-i} = e^x.$$ Dunque

$$\check{\mathcal{F}}(\hat{f})(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \\ e^x & \text{se } x<0 \end{cases}.$$ Si ha poi

$$\mathcal{F}(x^2 f(x))\xi = -\left(\frac{i\xi}{1-i\xi}\right)'' = \frac{2}{(1-i\xi)^3} \;e$$

$$\mathcal{F}^2(f) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 4. È data l'equazione differenziale lineare $y^{(4)} + 2y''' + y'' = f(t)$. Si determini
(i) la risposta impulsiva $h(t)$, cioè relativa a $f(t) = \delta(t)$ (dove $\delta(t)$ è la delta di Dirac),
(ii) la risposta forzata con condizioni iniziali nulle relativa a $f(t) = e^{-t}u(t)$ (dove $u(t)$ è la funzione gradino).

RISULTATO

i) $h(t) = (-2 + t + 2e^{-t} + te^{-t})\, u(t)$.

ii) $y(t) = \left(-3 + t + 3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t}\right) \cdot u(t)$

SVOLGIMENTO

Trasformando con Laplace:

$Y(s^4 + 2s^3 + s^2) = \mathcal{L}(f)$

i) $s^2(s^2+2s+1)\, H(s) = 1$, cioè

$H(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$

$B = \lim_{s\to 0} \frac{s^2}{s^2(s+1)^2} = 1$; $A = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\frac{1}{(s+1)^2} = -2$

$D = \lim_{s\to -1} \frac{(s+1)^2}{s^2(s+1)^2} = 1$; $C = \lim_{s\to -1} \left(\frac{1}{s^2}\right)' = 2$

$H(s) = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$; dunque

$h(t) = (-2 + t + 2e^{-t} + te^{-t})\, u(t)$.

ii) $Y(s) \cdot s^2(s+1)^2 = \frac{1}{s+1}$; $Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^3}$

$Y(s) = -\frac{3}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3}$; dunque

$y(t) = \left(-3 + t + 3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t}\right) u(t)$