Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Laurea in ingegneria chimica, civile, edile,
dei materiali, meccanica, navale.
Anno Accademico 2004/2005
Programma finale alla data del giorno: 31 maggio 2006

Lezioni: Prof. Gino Tironi, Esercitazioni: Dott. Alessandro Soranzo

1 Serie.

1.1 Serie di numeri reali.

Posizione del problema. Termini di una serie. Somme parziali o ridotte di una serie. Primi esempi. Serie resto. Condizione necessaria per la convergenza (Se una serie converge il termine generale a_n tende a 0 (D)). Carattere di una serie e di ogni suo resto (D). Aut-aut delle serie a termini positivi (D). *Tre esempi fondamentali.* La serie geometrica, la serie di Mengoli e sua convergenza (D), la serie armonica e sua divergenza (D). Serie somma di due serie e prodotto di una serie per una costante.

1.2 Serie a termini positivi.

Criterio del confronto (di Gauss) (D). Criterio del rapporto (D'Alembert) e variante con il limite (D). Criterio della radice (Cauchy) e variante con il limite (D). Convergenza di integrali generalizzati e di serie. La serie armonica generalizzata. Convergenza e ordine d'infinitesimo del termine generale a_n (D). La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \log(\frac{n+1}{n})) = \gamma$. ($\gamma = 0,577215664901532..$ costante di Eulero-Mascheroni). Modo di divergere della serie armonica (D).

1.3 Serie a termini misti.

Convergenza assoluta di serie a termini misti. Teorema di Riemann-Dini sulla convergenza delle serie a termini misti (D). Serie a termini di segno alternato: Teorema di Leibniz (SD). La serie di Lebniz, sua convergenza a $\log 2$ (SD).

1.4 Successioni e serie in $\mathbb{C}$.

La convergenza di una successione in $\mathbb{C}$ equivale alla convergenza delle successioni delle parti reali e immaginarie. Serie a valori in $\mathbb{C}$. Una serie a valori in $\mathbb{C}$ assolutamente convergente è convergente (D). Serie geometrica di ragione $z \in \mathbb{C}$.

1.5 Successioni e serie di funzioni.

Successioni di funzioni $f_n : (E \subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (o $f_n : E(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$). Convergenza *puntuale* e *uniforme* di successioni di funzioni. Alcuni esempi di successioni di funzioni semplicemente ma non uniformemente convergenti. Conseguenze della convergenza uniforme: enunciato dei teoremi sui limiti, continuità, derivabilità, integrabilità di successioni e serie di funzioni in presenza della convergenza uniforme (SD). Convergenza puntuale e uniforme di serie di funzioni. Criterio di Weierstrass per la convergenza uniforme (SD). Problema della sviluppabilità di una funzione in serie di funzioni date. Serie di potenze in $\mathbb{R}$. Esempi. Lemma di Abel (D). Dominio di convergenza regolare e accidentale. Raggio di convergenza. Esempi. La somma di una serie di potenze è continua in $]x_0 - R, x_0 + R[$ (SD). La serie derivata a termine a termine ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza (D). La somma della serie di potenze è derivabile ed uguale alla somma della serie derivata in $]x_0 - R, x_0 + R[$ (SD). La somma di una serie di potenze è di classe $\mathcal{C}^\infty(]x_0 - R, x_0 + R[)$, anzi è *analitica*. Un esempio di funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ma non analitica su $\mathbb{R}$. Sviluppabilità in serie di Taylor di una funzione. Alcune condizioni sufficienti (D). Serie di Taylor di e^x, di $\operatorname{sen} x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcsen} x$. Integrazione delle serie di potenze a termine a termine (SD).

1.6 Funzioni e serie nel campo complesso.

Funzioni complesse di variabile complessa. Continuità, limiti, derivabilità. Regole di derivazione. Serie di potenze in $\mathbb{C}$. Lemma di Abel. Raggio di convergenza. Dominio di convergenza accidentale. Esempi. Le serie di potenze definiscono funzioni analitiche nel disco aperto di convergenza (SD). Definizione delle funzioni e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{senh} z$, $\cosh z$. Formule d'Eulero (D). Scrittura esponenziale dei numeri complessi $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$, con un cenno d'applicazione alla cinematica piana. Logaritmi nel piano complesso; logaritmo principale di un numero complesso.

2 Lo spazio $\mathbb{R}^n$.

Spazi vettoriali sul corpo $\mathbb{R}$ dotati di prodotto scalare e dotati di norma. Disuguaglianza di Cauchy-Buniakovskiĭ-Schwarz (D). Ogni prodotto scalare induce una norma. Ogni norma induce una distanza. Distanza in un insieme, sue proprietà. Spazi metrici. Nozioni topologiche in spazi metrici: sfere o palle o bolle aperte; intorni di un punto e loro proprietà; insiemi aperti; punti d'accumulazione e punti aderenti ad un insieme; chiusura di un insieme; insiemi chiusi. Il complementare di un aperto è chiuso; il complementare di un chiuso è aperto (SD). Punti interni, esterni, di frontiera. Esempi di insiemi né aperti né chiusi. Insiemi sia aperti che chiusi. In ogni spazio metrico punti distinti hanno intorni disgiunti (D). Esempi di metriche diverse da quella euclidea in $\mathbb{R}^n$. Applicazioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Esempi. Limiti e continuità per una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e delle sue componenti $f_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Angolo fra due vettori. Vettori ortogonali. Teorema di Pitagora. Insiemi limitati. Insiemi compatti in $\mathbb{R}^n$. Insiemi connessi per archi. Teorema degli zeri per funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Insiemi connessi (in senso topologico). Teorema di connessione per funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (SD). Teorema di compattezza per funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (SD). Teorema di Weierstrass per funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ (SD). Applicazioni lineari. Caso di $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. In particolare forme lineari. Forme lineari su $\mathbb{R}^n$. Teorema di Riesz (D, nel caso $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$). Unicità del vettore associato alla forma. Derivate parziali. Derivate direzionali. Esistenza di funzione che ha tutte le derivate direzionali finite in un punto x^0, ma non è continua in x^0.

3 Integrali multipli.

Intervalli o rettangoli di $\mathbb{R}^n$, in particolare di $\mathbb{R}^2$. Decomposizioni di rettangoli. Ordine parziale delle decomposizioni di un rettangolo. Somme inferiori e superiori per una funzione limitata su un rettangolo limitato di $\mathbb{R}^2$. Integrabilità secondo Riemann e integrale di Riemann:

$$\int\int_I f(x,y)\,dxdy = \int_I f\,dm \quad \text{e}$$

$$\int\int\int_I f(x,y,z)\,dxdydz = \int_I f\,dm \quad ,$$

con $I = [a,b] \times [c,d]$ oppure $I = [a,b] \times [c,d] \times [e,h]$. Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità. Integrabilità delle funzioni continue (SD).

Formule di riduzione sui rettangoli (o intervalli) di $\mathbb{R}^2$ (Teorema di Fubini) (D). Proprietà dell'integrale: monotonía; integrabilità sui sottointervalli, additività sul dominio, integrabilità del valore assoluto, del prodotto, della reciproca (tutto SD). Teorema della media (D). Formule di riduzione per corde e per sezioni piane di integrali tripli (SD). Definizione dell'integrale di $f: E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, limitata su E limitato. Insiemi di misura nulla. Cenno agli insiemi misurabili secondo Peano - Jordan: caratterizzazione e proprietà della misura (SD). Plurirettangoli. Funzioni limitate, definite su un rettangolo di $\mathbb{R}^n$, continue tranne che su un insieme di misura nulla sono integrabili (SD). Insiemi normali in $\mathbb{R}^2$. Il grafico di una funzione integrabile, in particolare continua su $[a,b]$, è trascurabile (SD). Insiemi normali rispetto all'asse x o all'asse y in $\mathbb{R}^2$ sono misurabili (D). Insiemi ammissibili in $\mathbb{R}^2$. Formula di riduzione su insiemi normali (D).

Insiemi normali in $\mathbb{R}^3$ rispetto al piano x, y; insiemi ammissibili in $\mathbb{R}^3$. Formula di riduzione per corde (SD). Formula di riduzione per sezioni piane (SD). Il jacobiano di una funzione $\Phi: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Richiami sul cambiamento di variabile per integrali semplici. Formula del cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^m$ per integrali multipli (SD). Area dell'ellisse. Volume dell'ellissoide. Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$. Coordinate polari - ellittiche. Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$. Coordinate ellissoidali. Un accenno agli integrali generalizzati in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: insiemi localmente misurabili, successioni invadenti l'insieme J (anche illimitato) e adatte alla funzione $f : J \to \mathbb{R}$ (anche illimitata). Calcolo di $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$ e di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ (D).

CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI.

Differenziale di una funzione in un punto. Approssimante lineare e differenziale. Conseguenze della differenziabilità in x^0: continuità di f in x^0 (D) ed esistenza delle derivate direzionali in ogni direzione (in particolare di tutte le derivate parziali) in x^0 (D). I coefficienti della forma lineare differenziale $(df)(x^0)(x - x^0)$ sono le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ (D). Gradiente di una funzione: $\mathrm{grad} f(x^0) = \nabla f(x^0)$ (notazione di Hamilton). Derivate successive. Teoremi di Schwarz e di Young sull'inversione dell'ordine delle derivate (SD). Teorema del differenziale totale (D). Derivazione di funzione composta: il caso di $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, differenziabile in $x^0 \in A$, composta con $g : I \to A \subset \mathbb{R}^n$, derivabile in $t^0 \in I$, con $g(t^0) = x^0$. Per $F(t) = f(g(t))$, si ha $F'(t^0) = \langle (\nabla f)(x^0), g'(t^0) \rangle$ (D). Formula del valore medio. Funzione con differenziale nullo è costante su $A \subset \mathbb{R}^n$, aperto e connesso (per poligonali) (SD). Differenziale di una funzione $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$. Matrice jacobiana o derivata di f. Differenziazione di funzione composta $g \circ f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, con $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \Omega(\subset \mathbb{R}^p)$ e $g : \Omega(\subset \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^m$ (SD). Espressione delle derivate parziali delle componenti di $h = g \circ f$ (SD). Derivate successive della funzione composta $F(t) = f(x(t))$, con $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $x(t) : J(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, con $f \in \mathcal{C}^k(A)$ e $x(t) = x^0 + (x - x^0)t$, $0 \leq t \leq 1$. (Dimostrazione per $F'(t)$ e $F''(t)$). Differenziali successivi. Formula di Taylor per $f \in \mathcal{C}^k(A)$. $f(x) = f(x^0) + df(x^0)(x - x^0) + \ldots + \frac{1}{k!}[d^k f(x^0)(x - x^0, \ldots, x - x^0) + \beta(x)||x - x^0||^k]$ con $\beta(x)$infinitesimo per $x \to x^0$ (D). Forme quadratiche, matrici associate: si possono pensare simmetriche. Forme definite positive o negative, semidefinite o indefinite. Il criterio di Jacobi-Sylvester per le forme quadratiche (SD). Formula di Taylor per $f \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$. La matrice hessiana di una funzione. Punti di massimo e minimo relativo, di sella. Classificazione completa nel caso $n = 2$ (D). Teorema di Fermat (D). Classificazione dei punti stazionari o critici. Condizioni sufficienti: se $d^2 f$ è definito positivo in x^0, il punto è di minimo relativo; se $d^2 f$ è definito negativo in x^0, il punto è di massimo relativo; se $d^2 f$ è indefinito in x^0, il punto è di sella (D). Interpretazione geometrica del gradiente connessa con le derivate direzionali (SD). Linee e superficie di livello di una funzione e gradiente della stessa: il gradiente è ortogonale alle linee e alle superficie di livello (D). Estremi vincolati di funzioni. Caso delle funzioni di due variabili con il vincolo dato da una curva liscia: moltiplicatori di Lagrange, nel caso di dimensione 2 (D). Cenno al Teorema di Dini in $\mathbb{R}^2$ (SD). Moltiplicatori di Lagrange nel caso $n = 3$ con 2 vincoli (SD).

CURVE E SUPERFICIE. Curve in $\mathbb{R}^m$, $(m = 2, 3)$. Curve continue, regolari, generalmente regolari. Curve aperte e chiuse. Semplici e intrecciate. Archi di curva. Archi consecutivi. Curve equivalenti. Lunghezza di una curva. Rettificabilità delle curve regolari (SD). Integrale di Riemann come limite (SD). Lunghezza di curve regolari e generalmente regolari (SD). Ascissa curvilinea. Integrali di linea per campi scalari. L'integrale è invariante per curve equivalenti. Campi vettoriali nel piano e nello spazio. Campi conservativi. Per i campi conservativi l'integrale di linea dipende solo dai punti estremi del cammino (D) , e "viceversa" (Dim. nel caso $n = 2$). Il rotore di un campo vettoriale. Rappresentazione di superficie in forma implicita e in forma parametrica. Equazione del piano tangente a una superficie, nei due casi. Il Teorema di Jordan sulle curve continue, semplici, chiuse (SD). Formule di Green - Gauss nel piano. Dimostrazione per un dominio rettangolare.

Applicazione al calcolo di aree piane (D). Teorema della divergenza di Gauss nel piano (D) e teorema di Stokes nel piano (cenno di dimostrazione). Definizione di area di una superficie nello spazio. Integrali di superficie. Cenno alle superficie orientabili e non. Esempio di una superficie non orientabile: il nastro di Möbius. Cenni al teorema della divergenza di Gauss e al teorema di Stokes nello spazio (SD).

EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Introduzione alle equazioni differenziali: nozioni di base; esempi d'equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali. Teoremi d'esistenza e unicità locale e globale per il problema di Cauchy (o ai valori iniziali) (SD). Un esempio di non unicità locale ($y' = \sqrt{|y|}; y(x_0) = 0$). Un esempio di non esistenza globale ($y' = y^2; y(x_0) = y_0$). Le equazioni a variabili separabili. In particolare, questioni di unicità. Esempi. Equazioni dette omogenee o di Manfredi (esempi). Le equazioni differenziali lineari del prim'ordine a coefficienti continui. Esistenza globale della soluzione (D). Le soluzioni dell'omogenea sono un sottospazio vettoriale di dimensione 1 dello spazio $\mathcal{C}^1(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$ (D). Soluzione dell'equazione completa (D). Struttura della soluzione generale dell'equazione completa (D). Equazioni di Bernoulli. Equazioni d'ordine n: il problema di Cauchy. Problema di Cauchy per i sistemi. Sistemi lineari di n equazioni in n funzioni incognite. Applicazione lineare associata $L : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$. Teorema della base: Il nucleo $\ker(L)$ ha dimensione n (D). Equazioni del second'ordine del tipo $y'' = f(y)$. Esistenza e unicità globale per equazioni differenziali lineari d'ordine n, a coefficienti continui. Equivalenza con i sistemi di n equazioni in n funzioni incognite. Struttura delle soluzioni della completa (SD). Sistema fondamentale, Wronskiano. Nucleo risolvente nel caso generale (SD). Equazioni differenziali a coefficienti costanti: sistema fondamentale delle soluzioni (SD). Termini noti di tipo particolare (SD). Un accenno ai sistemi lineari. Riduzione ad un'unica equazione differenziale nel caso di sistemi lineari del primo ordine 2×2 a coefficienti costanti.