Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Laurea in ingegneria:
Civile e Ambientale (curr. Ambientale, Civile, Edile),
Industriale (curr. Chimica e di processo, dei Materiali, Meccanica).
Anno Accademico 2008/2009
Programma finale alla data del giorno: 28 maggio 2009

Lezioni: Prof. Gino Tironi, Esercitazioni: Dott. Alessandro Soranzo

1 Elementi di Logica

Proposizioni, connettivi. Tabelle di verità. Il bastoncino di Sheffield. Esempi. Proposizioni atomiche e composte. Proposizioni equivalenti. Predicati: unari, binari, ternari, etc. Proposizioni dedotte dai predicati per sostituzione o con l'uso di quantificatori. Quantificatori universali ed esistenziali. (Esempio: Enunciato dell'Ultimo Teorema di Fermat.) Negazione di proposizioni quantificate. Dimostrazione per assurdo.

2 Elementi di Teoria degli Insiemi

Cenni storici. Gli insiemi sono individuati dai loro elementi. L'insieme vuoto. Uguaglianza di insiemi. Inclusione di insiemi. Unione e intersezione di due insiemi; di un numero finito di insiemi; di una famiglia indiciata di insiemi. Differenza di due insiemi. Differenza simmetrica. Alcune proprietà formali delle operazioni. Singoletti. Coppie non ordinate. Coppie ordinate. Insieme prodotto. Applicazioni o funzioni fra insiemi. Dominio, condominio, immagine. Immagine di un sottoinsieme e controimmagine. Formule di De Morgan. Verifica. Complementare. Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive. Composizione di applicazioni. Inversa di un'applicazione e caratterizzazione. In generale $f \circ g \neq g \circ f$. Esempi. Insieme delle applicazioni di A in B denotato da B^A o ${}^AB$. Insieme prodotto di tre o più fattori. $A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$. $A \times B \times C$ pensato come insieme delle applicazioni f da $\{1, 2, 3\}$ in $A \cup B \cup C$ con $f(1) \in A, f(2) \in B, f(3) \in C$. Prodotto di una famiglia di insiemi $(A_i)_{i \in I}$ pensato allo stesso modo: $\{f : (f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i), f(i) \in A_i \forall i \in I\}$. Insieme delle parti $\mathcal{P}(A) = \{E : E \subseteq A\}$. Funzioni caratteristiche. Relazioni binarie e loro proprietà. Relazioni d'equivalenza. Classi d'equivalenza. Partizioni ed equivalenze. Insieme quoziente. Esempi: In $(A, \subseteq)$ $C, D \subseteq A$ sono in relazione se la differenza simmatrica $C \Delta D$ è finita. Si tratta di una relazione d'equivalenza. Applicazione canonica dall'insieme A all'insieme quoziente $A/\sim$. Relazioni d'ordine in senso debole e forte. Esempi ($\mathbb{N}$ con la relazione d'ordine per grandezza $\leq$, l'insieme non vuoto A con la relazione d'ordine per inclusione $\subseteq$). Massimo e minimo. Elementi massimali e minimali. Estremo superiore ed estremo inferiore.

3 Insiemi numerici

3.1 I numeri naturali $\mathbb{N}$

Cenno storico. Gli assiomi di Peano. Ogni insieme M non vuoto dei naturali ha minimo(con dimostrazione per induzione). Ogni insieme non vuoto e superiormente limitato dei naturali ha max (sd). Operazioni d'addizione e di moltiplicazione in N definite per induzione. Loro proprietà formali (verifica dell'associatività). Divisione in N. Esistenza ed unicità. Numeri primi. Esistono infiniti numeri primi (con dimostrazione). Rappresentazione dei numeri naturali in una base $B > 1$. Teorema d'esistenza e unicità. Regole pratiche per passare da una scrittura in base dieci ad una scrittura in base B. E viceversa. Giustificazione. Esempi.

3.2 Gli interi relativi $\mathbb{Z}$

Insufficienza dei numeri naturali. Coppie equivalenti in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Classi d'equivalenza in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$. Operazioni in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e compatibilità con l'equivalenza. Operazioni in $\mathbb{Z}$. Relazione d'ordine e sua compatibilità con le operazioni in $\mathbb{Z}$. Divisione in $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ è un anello commutativo con unità. Esempi di anelli non commutativi e di anelli senza unità. La legge d'annullamento del prodotto vale in $\mathbb{Z}$. Esempio di anello con nullifici (o divisori dello zero) dove non vale la legge d'annullamento del prodotto.

3.3 I numeri razionali $\mathbb{Q}$

Insufficienza di $\mathbb{Z}$. L'insieme delle frazioni $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$, con $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Equivalenza di frazioni. $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'/\sim$. Operazioni in $\mathbb{Q}$. Esistenza del reciproco per ogni razionale non nullo. $\mathbb{Q}$ è un campo o corpo commutativo. : $\mathbb{Q}$ è un corpo ordinato. L'ordine di $\mathbb{Q}$ è denso in sé. In ogni corpo vale la legge di annullamento del prodotto.

3.4 I numeri reali $\mathbb{R}$

Insufficienza di $\mathbb{Q}$. L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$. Postulato di Dedekind. Corpi ordinati completi. $\mathbb{Q}$ non è completo (sd). Esiste un campo completo minimale che ha $\mathbb{Q}$ come sottocorpo: $\mathbb{R}$. Esistenza dell'estremo superiore in $\mathbb{R}$ (con dim). Sua caratterizzazione (dim). Esistenza dell'inf (sd) e sua caratterizzazione. Il postulato di Dedekind, l'esistenza dell'estremo inferiore e l'esistenza dell'estremo superiore sono equivalenti. Insiemi superiormente illimitati: $\sup A = +\infty$. Insiemi inferiormente illimitati e $\inf A = -\infty$. Proprietà di Archimede (con dimostrazione). Il valore assoluto. Proprietà del valore assoluto. In particolare, disuguaglianza triangolare nelle due forme : $|a+b| \leq |a| + |b|$ e $\Big||a| - |b|\Big| \leq |a-b|$ (dimostrazione). Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: per ogni numero reale α , per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un razionale q tale che $|\alpha - q| < \varepsilon$ (dimostrazione). Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ in forma equivalente: tra due reali c'è sempre un razionale (dim.). Numeri irrazionali. Anche gli irrazionali sono densi in $\mathbb{R}$: tra due numeri reali è compreso un irrazionale (dim.). Radice n-esima di un numero reale: per ogni $a \geq 0$, per ogni $n \geq 1$ esiste un solo reale $\alpha \geq 0$ soluzione dell'equazione $x^n = a$ (dim). Esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione $x^n = a$ per n dispari e $a < 0$ (dim). Soluzioni di $x^n = a$ per n pari e $a \geq 0$. Scrittura decimale dei numeri reali. Le scritture decimali sono un modello di $\mathbb{R}$ (sd). Cenno alla completezza dell'insieme delle scritture decimali. Somma prodotto e inversa di scritture decimali: cenni. Intervalli, loro caratterizzazione (sd). Classi contigue. Teorema di Cantor sugli intervalli incapsulati (dim).

3.5 Topologia di $\mathbb{R}$

Intorni di un punto $x^0 \in \mathbb{R}$. Proprietà degli intorni. Proprietà di Hausdorff. Punti d'accumulazione. Punti isolati. Punti aderenti. Chiusura di un insieme. Insieme derivato. Punti interni, parte interna. Insiemi aperti. Insiemi chiusi. Proprietà degli aperti con dimostrazione. Proprietà dei chiusi, con verifica che il complementare di un chiuso è aperto. Proprietà della chiusura di Kuratowski. Chiusura e insieme derivato: $\overline{A} = A \cup A'$. Punti interni, esterni, di frontiera. La frontiera è chiusa. $\mathbb{N}$ non ha punti d'accumulazione in $\mathbb{R}$. Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$ (dim). Insiemi compatti in $\mathbb{R}$. Teorema di Heine-Pincherle-Borel (sd). Insiemi connessi in $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ sono connessi tutti e soli gli intervalli.

3.6 Cardinalità degli insiemi: cenni

Ordine per grandezza delle cardinalità. Insiemi numerabili. L'unione di due insiemi numerabili è un insieme numerabile (dim). L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è un insieme numerabile. Se A è infinita card $A \geq \aleph_0$. $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili (dim). $\mathbb{R}$ non è numerabile (dim). Se A è infinito ed N è numerabile e disgiunto da A, allora card $(A \cup N) =$ card A (sd). Teorema di Cantor: Per ogni insieme A, card $A <$ card $\mathcal{P}(A)$ (dim). La cardinalità di $\mathbb{R}$ è uguale a quella dell'intervallo aperto $]0,1[$ (dim). La cardinalità di $\mathbb{R}^n$ uguaglia quella di $\mathbb{R}$ (cenno di dim per n=2).

3.7 I numeri complessi

Richiami sulle funzioni trigonometriche. Definizione e proprietà dei numeri complessi. $\mathbb{C}$ è un campo (dimostrazione dell'esistenza del reciproco). Forma cartesiana di un numero complesso. Parte reale e parte immaginaria. Relazione di coniugio. Proprietà del coniugio. Forma trigonometrica (polare) dei numeri complessi. Modulo, argomento e argomento principale di un numero complesso. Piano di Argand-Gauss. Formule di De Moivre (con dimostrazione). Potenze di un numero complesso. Soluzioni dell'equazione $z^n = w$ (con dimostrazione). $|z+w| \leq |z|+|w|$ (dim). Topologia del campo complesso $\mathbb{C}$. Intorni di un punto in $\mathbb{C}$. Punti interni, insiemi aperti, punti d'accumulazione, punti aderenti in $\mathbb{C}$. Chiusura, insiemi chiusi, frontiera in $\mathbb{C}$.

4 Calcolo combinatorio

Numero degli elementi dell'insieme prodotto di due insiemi finiti. Numero dei sottoinsiemi di un assegnato insieme finito o "combinazioni". Proprietà dei coefficienti binomiali (dim). Formula di Newton per lo sviluppo della potenza di un binomio (dim). Permutazioni. Disposizioni. Numero delle applicazioni fra due insiemi finiti.

5 Funzioni elementari

5.1 Generalità

Anello delle funzioni reali di variabile reale. Ci sono nullifici. Le funzioni $f \wedge g = \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ e $f \vee g = \max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$. Funzioni pari, dispari, periodiche. Periodo minimo: può non esistere. Funzioni monotone e strettamente monotone.

5.2 Funzioni razionali

Polinomi in una indeterminata. Divisione di polinomi: unicità (dim) (esistenza attraverso il noto algoritmo). Funzioni razionali intere. Radici. Teorema di Cartesio-Ruffini. Principio d'identità dei polinomi in prima e seconda forma (dimostrazione). Molteplicità delle radici. Teorema Fondamentale dell'Algebra (sd). Riducibilità dei polinomi. I polinomi in $\mathbb{C}$ sono riducibili in fattori di primo grado. Polinomi a coefficienti reali e radici complesse non reali (dimostrazione). Riducibilità dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$: sono riducibili in fattori di primo e secondo grado (dimostrazione). Funzioni razionali fratte.

5.3 Esponenziale e logaritmo

Potenze di a reale, con esponente naturale non nullo. Proprietà formali. $a^0 = 1$ se $a \neq 0$. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n > 0$. Potenze con esponente razionale, per $a > 0$. Sono crescenti per $a > 1$, decrescenti per $0 < a < 1$. La funzione a^r è positiva e illimitata. Un lemma. Definizione di a^γ con a e γ reali. Se $a > 1$, $a^\gamma = \sup\{a^c : c < \gamma, c \in \mathbb{Q}\} = \inf\{a^d : d > \gamma, d \in \mathbb{Q}\}$. Per $0 < a < 1$, $a^\gamma = 1/(1/a)^\gamma . 1^\gamma = 1, 0^\gamma = 0$ se $\gamma > 0$. Valgono le proprietà canoniche dell'esponenziale anche per l'esponente reale (sd). Se γ razionale, le due definizioni coincidono. La funzione esponenziale $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. a^x è crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, costante se $a = 1$ (dim). Per ogni $x > 0$ c'è un solo $y \in \mathbb{R}$ tale che $a^y = x$ (dim. unicità). Il logaritmo in base a è crescente per $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$. $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$. Proprietà del logaritmo; in particolare cambiamento di base (dim). Funzioni x^α e $f(x)^{g(x)}$. Il numero di Nepero e. La successione $(1+1/n)^n$ è crescente e superiormente limitata. $e = \sup\{(1+1/n)^n : n = 1, 2, 3, ..\}$. Il logaritmo in base 10 (denotato da Log) e quello in base e, denotato da log o ln.

5.4 Funzioni trigonometriche e loro inverse

Definizione di sin, cos, tan, cotan. Loro proprietà fondamentali: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Formule di addizione, di duplicazione. Formule di prostaferesi. Definizione di $\arcsin, \arccos, \arctan$. Verifica che $\tan x$ è biiettiva tra $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $\mathbb{R}$. Successioni, sottosuccessioni.

6 Limiti e continuità

6.1 Limiti di successioni

Esempi vari di successioni e loro comportamento per $n \to +\infty$. Limite finito di successioni. Limite $+\infty, -\infty, \infty$. Definizione di limite con gli ϵ, n_0. Intorni di $+\infty, -\infty, \infty$. Definizione di limite usando gli intorni. Equivalenza delle definizioni con l'uso degli intorni e delle definizioni con ϵ, n_0. $\lim_{n+\infty}(1+1/n)^n = e$. Verifica in un caso particolare di una definizione di limite di successione. Alcuni teoremi sui limiti di successioni: successioni monotone, unicità del limite. Limite delle sottosuccessioni (dimostrazione) e delle code. Permanenza del segno. Teorema di Bolzano - Weierstrass per le successioni (dim). Compattezza sequenziale: equivale a compattezza in $\mathbb{R}$ (dim).

6.2 Limiti di funzioni

Esempi di funzioni reali di variabile reale e loro limiti. Limite finito, $+\infty, -\infty, \infty$. Esempi e controesempi sulla definizione di limite nei vari casi. Importanza dell'ordine dei quantificatori. Definizione usando gli intorni. Limite destro e limite sinistro. Equivalenza tra le definizioni ε, δ e quella con gli intorni. Teoremi di unicità del limite, della permanenza de segno, della limitatezza locale, della restrizione (tutti con dim), con applicazioni alla non esistenza di limiti. Teorema sul limite delle funzioni monotone (dim). Criterio di Cauchy per l'esistenza del limite finito (facoltativo). Teorema sul limite delle funzioni composte. Un esempio critico sul limite di funzioni composte.

6.3 Continuità

Definizione di continuità in un punto. Equivalenza delle definizioni. Funzione continua in un insieme. Prolungamento per continuità. Teoremi di permanenza del segno, limitatezza locale, restrizione, valore assoluto per funzioni continue. Continuità della somma, del prodotto, della reciproca. Continuità di x^n, delle funzioni razionali, del seno, del coseno, della tangente (tutte con dim). Continuità dell'esponenziale. Limite di funzione composta $g \circ f$ se g continua (dim).

Continuità della composta di funzioni continue (dim). Continuità della funzione inversa (dim). Continuità della radice n-esima, dell'arcoseno, arcocoseno, arcotangente, del logaritmo in base a. Esempio: l'inversa è continua anche se la diretta non lo è. Il teorema non vale se la funzione diretta non è definita su un intervallo. Teorema degli zeri (dim con metodo di bisezione). Teorema di connessione (dim). Applicazione del teorema di connessione: la funzione esponenziale è suriettiva. Teorema di compattezza (dim). Ogni insieme compatto ha massimo e minimo. Teorema di Weierstrass (dim). Teorema di Weierstrass (seconda dimostrazione): si richiede a scelta una delle due dimostrazioni. Continuità uniforme. Esempi di funzioni uniformemente continue e continue ma non uniformemente. Teorema di Heine-Cantor (dim facoltativa).

6.4 Limiti fondamentali e notevoli

$$e = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \quad (a\in\mathbb{R}^+,\, a\neq 1) \quad ; \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} \quad (\alpha\in\mathbb{R}).$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}a^x\cdot x^n; \quad (a\in\mathbb{R}^+,\, p\in\mathbb{R},\, n\in\mathbb{Z}) \quad ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+}x^p\cdot\log_a x; \quad (p\in\mathbb{R},\, a\in\mathbb{R}^+,\, a\neq 1).$$

Di tutti i limiti si richiede la dimostrazione.

7 Calcolo differenziale per funzioni di una variabile

7.1 Derivate

Rapporto incrementale e derivata. Funzioni derivabili e con derivata infinita. Esempi vari di funzioni derivabili e non in un punto. NB. Si richiede esplicitamente la dimostrazione del seguente fatto: Derivabilità implica continuità (dim). Interpretazione geometrica della derivata. Equazione della tangente in un punto al grafico di una funzione. Derivata della funzione costante, di x^n, $\operatorname{sen} x$, $\cos x, \tan x, \text{cotan}x, e^x, a^x$ (dim). Derivazione di funzione composta (dim). Derivazione della funzione inversa (dim). Derivazione della somma, del prodotto, della reciproca e del quoziente (dim). Derivata di $\sqrt[n]{x}, \operatorname{arcsen} x, \arccos x, \arctan x, \log x,\ log_a(x)$ (dim). Derivata di x^α (dim). Derivate di ordine successivo. Le classi $C^0(I), C^1(I), .., C^n(I), .., C^\infty(I)$. I polinomi, $e^x, \operatorname{sen} x, \cos x, \ldots$ sono funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Esempio di funzione ovunque continua e ovunque non derivabile: cenno. Crescenza e decrescenza locale e globale. Massimi e minimi relativi. Segno della derivata in un punto e crescenza o decrescenza locale (dim). Teorema di Fermat (dim). Crescenza in ogni punto di un intervallo e crescenza sull'intervallo (sd). Teorema per riconoscere i max (min) di una funzione definita in un intervallo. Approssimante lineare: esistenza e unicità (dim). Differenziale di una funzione. Invariarianza del differenziale primo. Differenziale secondo.

7.2 Funzioni derivabili su un intervallo

Teorema di Rolle (dim). Osservazioni e controesempi al teorema di Rolle. Teorema di Cauchy (dim). Ipotesi aggiuntive per scriverlo in forma di quoziente. Teorema di Lagrange (dim). Equivalenza logica dei tre teoremi. Interpretazione geometrica dei teoremi di Lagrange, Rolle, Cauchy. Interpretazione cinematica del teorema di Lagrange. Conseguenze del teorema di Lagrange: Funzioni con derivata nulla su intervallo sono costanti. Funzioni con derivata uguale su intervallo differiscono per costante. Funzione con derivata positiva su intervallo è crescente. Teorema di de l'Hôpital; caso $0/0$ con dimostrazione. Caso ∞/∞ senza dimostrazione. Esempi e controesempi. Teorema di Darboux (dim). Nozione di primitiva e primitive immediate.

7.3 Approssimazione locale di funzioni. Formula di Taylor

Infiniti. Infiniti equivalenti. Ordine d'infinito. Relazione d'ordine fra gli ordini d'infinito. Equivalenza di infinitesimi. Ordini d'infinitesimo. Relazione d'ordine tra gli ordini d'infinitesimo. Prodotto ed elevazione a potenza di infiniti e di infinitesimi. Principio di sostituzione. Ordini reali, soprareali, sottoreali, infrareali, sia per gli infiniti che per gli infinitesimi. Infiniti e infinitesimi in $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$.

Relazione tra i coefficienti di un polinomio e le sue derivate successive. Esistenza e unicità di un polinomio di grado $\leq n$ tale che le sue derivate k-esime in x_0 ($k = 0, 1, \ldots, n$) abbiano assegnato valore (dim). Approssimazione globale e locale di una funzione. Lemma di Peano (con dimostrazione). Un corollario: applicazione all'ordine di infinitesimo di una funzione. Lemma di Lagrange (dim). Polinomio approssimante n-esimo. Teorema di Taylor su esistenza e unicità del polinomio approssimante n-esimo (dim). Si tratta di condizione solo sufficiente. Formula di Taylor -Peano (dim). Formula di Taylor - Lagrange (dim). Approssimazione numerica di funzioni in un intorno di un punto. Formula di Taylor - Lagrange per e^x. Il numero e di Nepero è irrazionale (dim facoltativa). Formule di Taylor - Lagrange per $\operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{senh} x, \cosh x, \log(1+x), (1+x)^\alpha$. Valutazione dell'errore. Insiemi convessi. Funzioni convesse e concave in un intervallo. Convessità e concavità locali, anche a destra o a sinistra. Teorema: *Se f è convessa su I, intervallo, allora il rapporto incrementale è crescente su I. Esistono nei punti interni finite le derivate destra e sinistra e si ha: $x_1 < x_2$ implica $f'_s(x_1) \leq f'_d(x_1) < f'_s(x_2) \leq f'_d(x_2)$. La funzione convessa f è ovunque continua ed è derivabile tranne che in un insieme numerabile di punti* (dim facoltativa). Le funzioni $f(x)$ e $f(x) + ax + b$ hanno lo stesso carattere di convessità sia globale che locale. Se f è derivabile nell'intervallo I la funzione f è convessa su I se e solo se f è convessa in ogni punto di I. Condizioni sufficienti per la convessità (concavità) in un punto usando la derivata seconda nel punto (dim). Esempi critici sulla definizione di convessità e concavità locali e sul punto di flesso. Condizione necessaria ($f''(x_0) = 0$) e condizione sufficiente ($f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq o$) per un flesso (dim). Criteri analoghi che usano le derivate n-esime, $n > 3$ (dim facoltativa). Flesso e cambiamento di segno di f'' in un punto x_0 (dim facoltativa). Se $f''(x) > 0$ in ogni punto di un intervallo I, f è convessa in I (dimostrazione diretta, facoltativa).

8 Calcolo integrale per funzioni reali di una variabile reale.

8.1 Integrale indefinito.

Primitive e integrali indefiniti. Tabella di alcuni integrali indefiniti immediati. Derivazione e integrale indefinito. Regole d'integrazione per decomposizione, per parti, per sostituzione (con dimostrazione). Integrazione delle funzioni razionali. Teorema di Hermite della decomposizione di una funzione razionale in frazioni semplici. Alcune sostituzioni che razionalizzano la funzione integranda.

8.2 Integrale di Riemann

Integrale di Riemann su un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$ per una funzione limitata. Decomposizioni dell'intervallo. Ordine per finezza delle decomposizioni. La relazione d'ordine è parziale ed è superiormente reticolata (se δ' e δ'' sono due decomposizioni di I esiste una decomposizione δ piú fine di entrambe che è la meno fine tra le piú fini: $\delta = \delta' \vee \delta''$). Somme integrali superiori e inferiori per una funzione limitata. Si ha: (i) $s(f, \delta) \leq S(f, \delta)$; (ii) $\delta \prec \delta' \Rightarrow s(f, \delta) \leq s(f, \delta'), S(f, \delta) \geq S(f, \delta'), (iii) \forall \delta, \delta' \in \Delta_I$ vale $s(f, \delta) \leq S(f, \delta')$ (dim). Una funzione è integrabile secondo Riemann se e solo se le classi delle somme inferiori e superiori sono contigue. Integrale di Riemann come elemento di separazione. Integrale inferiore $\sup\{s(f, \delta) : \delta \in \Delta_I\} = \int_{\star I} f dx$ e integrale superiore $\inf\{S(f, \delta) : \delta \in \Delta_I\} = \int_I^{\star} f dx$. Le costanti sono integrabili. La funzione di Dirichlet non è R-integrabile. Calcolo dell'integrale di $f(x) = x$ su $[0, 1]$ in base alla definizione. Insiemi trascurabili e insiemi di misura nulla secondo Lebesgue. Una funzione limitata è R-integrabile sull'intervallo compatto I se e solo se è continua in $I \setminus Z$, con Z di misura nulla secondo Lebesgue (sd). Le funzioni momotone sono integrabili su I (dim). Le funzioni continue sono integrabili su I (dim). Funzione limitata su I, continua su $I \setminus T$, con T trascurabile, è R-integrabile (sd). Interpretazione geometrica dell'integrale. Le seguenti proposizioni sono state tutte dimostrate. Integrabilità di $f + g$; di αf; Monotonia (Isotonia) dell'integrale; Integrabilità della restrizione; Additività rispetto al dominio; Integrabilità del valore assoluto e disuguaglianza; Integrabilità del prodotto. Si chiede la dimostrazione di due proposizioni a scelta dello studente. Integrabilità della reciproca e del quoziente (sd). Teorema della media (dim). Integrale orientato. Formula di Chasles (dim). Funzione integrale. La funzione integrale è uniformemente continua (dim). Teorema fondamentale del Calcolo: forma puntuale e forma globale (dim). Formula di Torricelli-Barrow (dim). Se f' è integrabile $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx$ (dim facoltativa). Formula d'integrazione per parti e per sostituzione dell'integrale di Riemann (dim). Teorema del confronto per integrali impropri su $[a, +\infty[$(dim). Ordine d'infinitesimo in $+\infty$ e convergenza degli integrali (dim). Integrali su $]-\infty, a]$ o su $\mathbb{R}$. Integrali assolutamente e semplicemente convergenti: un esempio. Integrali impropri o generalizzati di funzioni illimitate. Ricordo di proprietà tipiche (già dimostrate nel caso di integrali su intervalli illimitati). Convergenza assoluta implica convergenza (sd). Teorema confronto (sd).Ordine d'infinito e convergenza (sd).

9 Serie numeriche

Serie: prime considerazioni. Esempi di serie convergenti, divergenti, indeterminate. Serie resto. Una condizione necessaria per la convergenza di una serie (dim). Carattere di una serie e dei suoi resti (dim). Aut-aut per le serie a termini positivi (dim). Serie geometrica, suo carattere (dim). Serie di Mengoli e sua somma (dim). Divergenza della serie armonica (dim). Serie somma di due serie e suo carattere (dim). Serie prodotto per una costante. Serie a termini positivi. Criterio del confronto o di Gauss (dim). Convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Criterio del rapporto (di D'Alembert) (dim). Corollario con il limite (dim). Esempio. Criterio della radice (di Cauchy) (dim). Corollario con il limite (dim). Esempio. Il criterio del rapporto è piú debole di quello della radice (sd). Esempio di serie decidibile con il criterio della radice ma non con quello del rapporto. Convergenza di serie e di integrali impropri. Valutazione della somma per mezzo di integrali impropri (dim). Valutazione del resto. Serie armonica generalizzata e suo carattere (dim). Divergenza di tipo logaritmico della serie armonica (dim). Se a_n, b_n sono non negativi, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\mathrm{ord}_{+\infty}(b_n) \geq \mathrm{ord}_{+\infty}(a_n)$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Se $\mathrm{ord}_{+\infty}(a_n) \geq 1+\varepsilon, \varepsilon > 0$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \log(\frac{n+1}{n}))$. Ancora sul modo di divergere della serie armonica. La costante γ di Eulero-Mascheroni. Serie a termini misti. Convergenza assoluta e semplice. La convergenza assoluta implica la convergenza semplice, ma non vale il viceversa. Le serie a termini di segno alternato. Teorema di Leibniz. La serie logaritmica. Serie diluite: hanno lo stesso carattere della serie data (dim). Serie incastro. Associazione dei termini di una serie (dim). Non vale se la serie è indeterminata o diverge a ∞. Permutazioni di $\mathbb{N}^+$. Permutazioni di una serie. Le serie a termini positivi sono permutabili (dim). Le serie assolutamente convergenti sono permutabili (cenno di dim). Teorema di Riemann sulle serie semplicemente convergenti (cenno di dim).

Prodotti infiniti. Formula di Eulero che esprime $\dfrac{\sin x}{x}$ come prodotto infinito (cenno). Conseguenze: la formula di Wallis, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Dissociazione dei termini di una serie. Prodotto alla Cauchy di due serie. Teorema di Mertens (dim facoltativa). Teorema di condensazione di Cantor (dim. facoltativa). Applicazione alla convergenza di alcune serie. Calcolo dell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ con l'uso della formula di Wallis (facoltativo). Cenno sulle serie della funzione esponenziale e delle funzioni trigonometriche. Cenno alla formula di Eulero: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Cenno alla formula di Stirling: $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.