

CORSO DI
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA.

Gino Tironi

Versione del giorno 13 dicembre, 2011.

Indice

1	Funzioni di una variabile complessa	1
1.1	Piano e sfera complessi. Continuità.	1
1.2	Monogeneità. Funzioni olomorfe.	4
1.3	Integrale di Riemann - Stieltjes.	8
1.4	Integrazione complessa. Teorema di Cauchy.	13
1.5	Formule integrali di Cauchy.	22
1.6	Teorema di Morera. Principio di massimo.	24
1.7	Sviluppi in serie di Taylor e di Laurent.	26
1.8	Singolarità e teorema di Liouville.	29
1.8.1	Una prima dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra	33
1.9	Il Calcolo dei residui.	34
1.9.1	ESEMPI ED ESERCIZI.	36
1.9.2	ESERCIZI.	37
1.9.3	Integrali fra limiti infiniti.	38
1.9.4	Il residuo all'infinito.	39
1.9.5	ALTRI ESEMPI ED ESERCIZI.	40
1.9.6	ESERCIZI.	42

1.9.7	Residui e decomposizione di funzioni razionali in fratti semplici	45
1.10	Valore principale dell'integrale.	47
1.10.1	Esercizi	48
1.11	L'indicatore logaritmico.	49
1.11.1	L'indice di avvolgimento.	53
1.12	Serie di Residui.	54
1.12.1	ESEMPLI.	56
1.13	Prolungamento analitico.	58
1.13.1	Elementi non prolungabili.	60
1.13.2	Caso della monodromia.	61
1.13.3	Caso della polidromia.	61
1.13.4	Qualche esempio di funzione polidroma	62
1.13.5	ESERCIZI	65
1.14	Cenni sulla rappresentazione conforme.	70
1.14.1	Le trasformazioni bilineari di Möbius.	71
1.15	La funzione Gamma di Eulero.	73
1.15.1	La Formula di Stirling.	76
2	Equadiff a d.p. : un'introduzione	79
2.1	Considerazioni preliminari	79
2.2	Alcuni esempi significativi	80
2.3	Equadiff del I.o ordine. Caratteristiche	85
2.4	Problema di Cauchy	87

2.5	Equazioni lineari del prim'ordine	90
2.6	Esempi ed esercizi	93
2.7	Il Teorema di Cauchy–Kovalevskaja	98
2.8	Onde di rarefazione e onde d'urto	100
2.9	Equazioni del second'ordine	103
2.10	Equazione del calore	106
2.11	Equazione di Laplace	112
2.12	Equazione delle onde	120
2.12.1	L'equazione completa	125
2.12.2	Unicità della soluzione	127
2.13	Equazioni dell'idrodinamica	129
2.13.1	Fluidi perfetti. Alcuni casi speciali	130
2.13.2	Azioni dinamiche	132
2.13.3	Paradosso di D'Alembert	133
2.13.4	Teorema di Kutta-Joukowski	133
2.13.5	Effetto della viscosità sulla resistenza al moto.	134
3	Serie di Fourier	137
3.1	Considerazioni preliminari	137
3.2	Lemma di Riemann-Lebesgue	139
3.3	Serie di Fourier trigonometriche	140
3.4	Convergenza puntuale	142
3.5	Convergenza uniforme	144

3.6	Cambiamento di scala	145
3.7	Qualche esempio	146
3.8	Serie di Fourier di funzioni continue	147
3.9	Il fenomeno di Gibbs	151
4	Un'introduzione all'integrale di Lebesgue	157
4.1	Definizioni e prime proprietà	157
4.2	Alcuni teoremi importanti	165
4.3	Integrali su insiemi misurabili	168
4.3.1	Continuità assoluta	171
5	Spazi L^p	173
5.1	Gli spazi $L^p(A)$, con $p = 1, 2, \infty$	173
5.2	Sottospazi densi di $L^p(\Omega)$	178
5.3	Gli spazi L^p , con $p \geq 1$	179
6	Cenno alle distribuzioni	185
6.1	Introduzione	185
6.2	Distribuzioni	186
6.3	Alcuni esempi fondamentali	188
6.3.1	Un esempio importante	192
6.3.2	La convoluzione	193
6.4	Distribuzioni ed equazioni alle derivate parziali	196
7	Un'introduzione alle trasformate di Fourier	201

7.1	Definizione e prime proprietà	201
7.2	Altre proprietà della trasformata	203
7.3	Convoluzione e approssimazione	207
7.4	Trasformata di Fourier e convoluzione. Antitrasformata	208
7.5	Lo spazio di Schwartz	210
7.6	Il teorema di Plancherel e la trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$	212
7.7	Una applicazione all'equazione del calore	213
7.8	Distribuzioni temperate e loro trasformate	214
7.9	Interpolazione trigonometrica	218
7.10	Le "Fast Fourier Transforms" (FFT)	220
8	Trasformata di Laplace	223
8.1	Tempo e frequenza	223
8.2	Funzioni trasformabili	224
8.3	Una nota sulla convergenza assoluta.	226
8.4	Proprietà delle trasformate.	228
8.5	Smorzamento, ritardo, cambiamento di scala.	231
8.6	Trasformazione della derivata.	234
8.7	Prodotto di convoluzione.	237
8.8	L'antitrasformata.	239
8.9	Calcolo dell'antitrasformata	243
8.10	Equazioni differenziali ordinarie	247
8.11	Circuiti elettrici	250

8.12	Equazioni alle derivate parziali	252
8.13	Comportamento asintotico	257
8.14	Esercizi	259
9	Alcuni esercizi del tipo dato agli esami	263
9.1	Uso dei residui	263
9.2	serie di Fourier	265
9.3	Trasformate di Fourier	266
9.4	Trasformate di Laplace e equazioni lineari ordinarie	267

Capitolo 1

Funzioni di una variabile complessa

1.1 Piano e sfera complessi. Continuità.

Ricordiamo che un numero complesso, nella sua *forma algebrica*, si scrive $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, dove i è l'unità immaginaria, tale che $i^2 = -1$. Rappresentando la parte reale di z , $\Re z$, sull'asse x e il coefficiente dell'immaginario, $\Im z$, sull'asse y , ogni numero complesso z individua un unico punto di un piano cartesiano Oxy e, viceversa, ogni punto individua un unico numero complesso. Il piano cartesiano, quando lo si pensi luogo della rappresentazione dei numeri complessi, si dice il *piano di Gauss*.

È noto che un numero complesso si può rappresentare anche in *forma trigonometrica*: $z = \rho e^{i\theta}$, dove ρ è il *modulo* di z e θ il suo *argomento* o *anomalia*. ρ è un numero reale non negativo e θ è un numero reale che ogni $z \neq 0$ individua a meno di multipli di 2π .

Il legame tra x , y e ρ , θ è il seguente: dati x e y si ottengono ρ e θ dalle equazioni:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad . \quad (1.1)$$

Dati ρ e θ , x e y si ottengono da $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.

ρ e θ si possono interpretare come le coordinate polari del punto rappresentativo di z nel piano di Argand – Gauss¹

Conviene pensare che il piano complesso \mathbb{C} sia dotato di un unico punto all'infinito, che verrà indicato con $z = \infty$.

¹Jean Robert Argand (1768–1822); Carl Friedrich Gauß (1777–1855). Gauß usò per la prima volta la rappresentazione dei numeri complessi come punti del piano, nella sua tesi nel 1799; aveva scoperto questa rappresentazione nel 1797. Caspar Wessel usò la rappresentazione in una memoria presentata all'Accademia danese delle Scienze nel 1797, pubblicata nel 1798-99. Argand la propose nel suo “Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques” nel 1806. Infine a Gauß si deve il nome di “numeri complessi (1831)”, Werke, II, pag. 102.

Intorno di un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ è ogni insieme U che contiene una *sfera aperta* (o *palla* o *disco*) avente centro in z_0 e raggio $r > 0$: U è intorno di z_0 se esiste $r > 0$ tale che $S_{z_0}^r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset U$. Un intorno di ∞ è ogni soprainsieme di $S_\infty^r = \{z : |z| > r\}$.

Il fatto che \mathbb{C} si pensi dotato di un unico punto all'infinito, può essere giustificato, rappresentando i punti del piano complesso mediante una proiezione stereografica sulla superficie di una sfera, che diremo *sfera complessa* o di Riemann.

Prendiamo dunque una sfera di centro l'origine e raggio 1, riferita a coordinate cartesiane ξ, η, ζ . Proiettiamo i suoi punti dal polo nord della sfera stessa, $N = (0, 0, 1)$, sul piano equatoriale della sfera. Il piano equatoriale sia il piano $u = 0$ di un sistema cartesiano x, y, u , nel quale gli assi x e ξ , y e η , u e ζ coincidono. Se $P = (x, y) = z$ è un punto del piano equatoriale, la congiungente NP incontra la sfera complessa in un punto $P' = (\xi, \eta, \zeta)$.

Una semplice similitudine di triangoli mostra che la relazione tra le coordinate di P e P' è data da

$$1 - \zeta = \frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} \quad . \quad (1.2)$$

Cioè se (ξ, η, ζ) è un punto della sfera complessa, allora $x = \frac{\xi}{1-\zeta}$, $y = \frac{\eta}{1-\zeta}$ se $\zeta \neq 1$. Se P' sta sulla semisfera superiore, allora $\zeta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}$, e $\zeta \rightarrow 1$ se $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$ e $\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ tende a ∞ per $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$. Cioè, il punto corrispondente al polo nord della sfera è il punto ∞ del piano di Gauss. Se $P = (x, y) = z$ è un punto del piano di Gauss, il corrispondente punto sulla sfera complessa, ha equazioni

$$\xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \quad . \quad (1.3)$$

Si noti che la sfera unitaria è un insieme chiuso e limitato (cioè compatto) di \mathbb{R}^3 . Le trasformazioni tra i punti del piano di Gauss e quelli della sfera complessa sono continue e biettive con inverse continue tra \mathbb{C} e la sfera privata del polo nord N . Tali trasformazioni individuano dunque un'immersione continua di \mathbb{C} in un insieme compatto che ha, per così dire, un solo punto in più di \mathbb{C} . Quest'immersione si dice allora una *compattificazione a un punto* o di *Alexandroff* di \mathbb{C} . In generale, una *compattificazione* di uno spazio topologico (X, τ) è la coppia formata da uno spazio topologico compatto (cX, τ') e da un'applicazione continua $c : (X, \tau) \rightarrow (cX, \tau')$ tale che $\overline{c(X)} = cX$, essendo la chiusura presa nella topologia di cX .

Sia $f : E(\subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione definita su un sottoinsieme E di \mathbb{C} a valori complessi e sia z_0 un punto d'accumulazione di E . Diremo che $f(z)$ ha *limite* ℓ per z che tende a z_0 , in simboli

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell \quad (1.4)$$

con $\ell \in \mathbb{C}$, se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall z \in E, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon$. Ovviamente la definizione può essere data equivalentemente in termini di intorni; una definizione analoga vale se al posto di z_0 o di ℓ o di entrambi c'è ∞ .

Diremo che $f(z)$ è *continua* in un punto $z_0 \in E$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall z \in E, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Equivalentemente se, per ogni intorno V di $f(z_0)$ esiste un intorno U di z_0 tale che $f(U) \subset V$. Una funzione $f(z)$ che sia continua in ogni punto $z_0 \in E$, si dice continua in E .

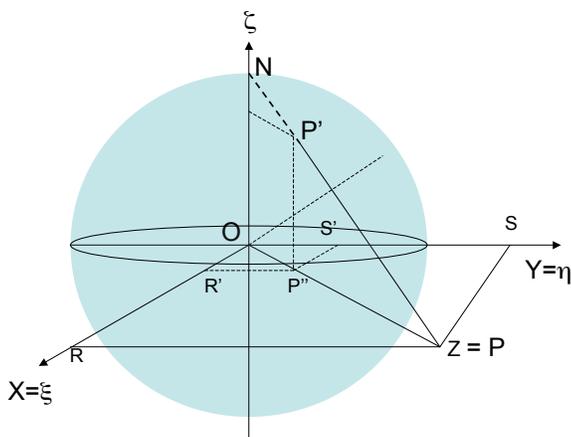


Figura 1.1: La sfera di Riemann.

Se $z = x + iy$ e $f(z)$ è una funzione di variabile complessa, allora, separando la parte reale e quella immaginaria, si ha $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. $u(x, y)$ è la parte reale di $f(z)$, mentre $v(x, y)$ è il coefficiente dell'immaginario. Se $\ell = u_0 + iv_0$, è $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell$ se e solo se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0 \quad .$$

Similmente $f(z)$ è continua in z_0 se e solo se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono continue in (x_0, y_0) .

Ricorderemo un fondamentale teorema della topologia del piano, che ci sarà utile in seguito. Si tratta del teorema di Jordan sulle curve continue semplici chiuse, formulato (e dimostrato in modo non completo) da Camille Jordan nel 1887. La prima dimostrazione completa e rigorosa è dovuta al topologo americano Oswald Veblen (1905).

Un'applicazione continua $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ si dice un *arco continuo* se $z(0) \neq z(1)$; si dice una *curva chiusa continua* se $z(0) = z(1)$. Un arco continuo si dice *semplice* se $t_1 \neq t_2$ implica $z(t_1) \neq z(t_2)$. Una curva chiusa continua è *semplice* se $z(0) = z(1)$ e $t_1 < t_2$, $z(t_1) = z(t_2)$ implica $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$.

Teorema 1.1.1 (Jordan). *Se Γ è il sostegno di una curva continua semplice chiusa, il complemento di Γ nel piano è l'unione di due insiemi aperti, connessi (per archi) (cioè di due domini) disgiunti. Ogni punto di Γ è punto di frontiera di ciascuno dei due domini.*

Ricordiamo che per un aperto di \mathbb{R}^n l'essere connesso equivale all'essere connesso per archi. Uno dei due domini è limitato e si dice l'*interno* di Γ : $(\Gamma)_i$. Il dominio illimitato si dice l'*esterno* di Γ : $(\Gamma)_e$.

In generale, consideremo funzioni definite all'interno di una curva semplice chiusa Γ e all'esterno di k curve semplici chiuse $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$. I sostegni delle curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ sono interni a Γ e ciascuno di essi è esterno ai rimanenti: cioè per ogni r ($1 \leq r \leq k$) si ha $\Gamma_r \subset (\Gamma)_i \cap \{\cap_{s \neq r} (\Gamma_s)_e\}$. La curva Γ può "andare all'infinito, cioè mancare e qualche curva Γ_r può ridursi a un punto (cioè Γ_r può essere la curva costante). Si veda la Figura 1.2.

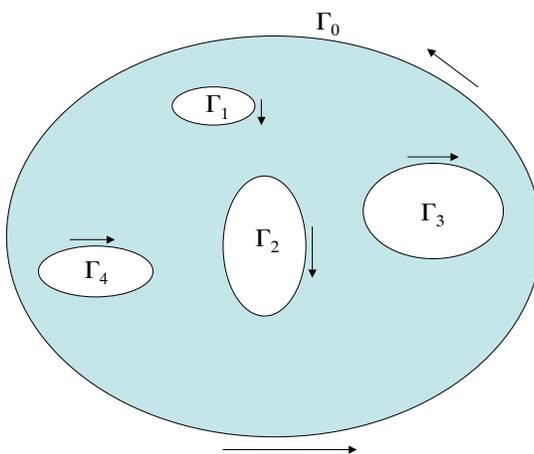


Figura 1.2: Dominio molteplicemente connesso in \mathbb{C} .

1.2 Monogenità. Funzioni olomorfe.

Diremo che la funzione $f(z)$, definita in un dominio D , è *differenziabile* o *derivabile* in $z_0 \in D$ se il rapporto incrementale di $f(z)$ ha limite finito per $z \rightarrow z_0$. Cioè se esiste finito il

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} . \quad (1.5)$$

Tale limite si dice *derivata* di f in z_0 e si denota con $f'(z_0)$. Se $f(z)$ è differenziabile in ogni punto di D essa si dice *olomorfa* in D . Essa si dice olomorfa in z_0 se è derivabile in un intorno di z_0 .

Altri termini usati al posto di olomorfa sono *analitica*, *monogena*, *regolare* o *analitico-regolare*.

Le usuali regole sulla derivabilità della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni, valgono anche nel caso complesso.

È facile stabilire che ogni funzione $f(z) = z^n$, $n \geq 1$, è derivabile su tutto \mathbb{C} . Infatti

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1}) = nz_0^{n-1} . \quad (1.6)$$

In base alla validità delle regole di derivazione sopra ricordate ogni polinomio è derivabile e ogni funzione razionale fratta $\frac{P(z)}{Q(z)}$ è derivabile nei punti in cui $Q(z) \neq 0$.

Una funzione $f(z)$ è olomorfa in $z = \infty$ se $f(\frac{1}{w})$ è olomorfa in $w = 0$. In particolare, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ è olomorfa in $z = \infty$ se $grP(z) \leq grQ(z)$.

Convieni mettere in evidenza la seguente conseguenza della derivabilità d'una funzione complessa.

Teorema 1.2.1 *Sia $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ definita in un intorno di $z_0 = x_0 + iy_0$. Se esiste finita $f'(z_0)$ allora vale*

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Inoltre le parti reale e immaginaria $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono differenziabili in (x_0, y_0) .

Dimostrazione: Se esiste il

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

allora tale limite esiste indipendentemente dal modo e, quindi dalla direzione lungo la quale z tende a z_0 . In particolare il limite si può calcolare prendendo z del tipo $z = x + iy_0$, cioè facendo tendere z a z_0 lungo una retta parallela all'asse x , oppure facendo tendere z a z_0 lungo una parallela all'asse y , cioè prendendo $z = x_0 + iy$. In ciascuno dei due casi il limite deve valere $f'(z_0)$.

Ora

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right] = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) . \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \left[\frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \right] = \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) . \end{aligned}$$

Dunque si ha

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) . \tag{1.8}$$

Dunque valgono le condizioni (1.1) che si dicono condizioni di monogeneità o equazioni di Cauchy-Riemann.

È inoltre facile dimostrare che $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono differenziabili nel punto (x_0, y_0) . Infatti, dalla derivabilità di $f(z)$ in z_0 segue che

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \beta(z, z_0) \cdot (z - z_0) \quad ,$$

con $\beta(z, z_0)$ funzione infinitesima per $z \rightarrow z_0$. Detto $f'(z_0) = \gamma + i\delta$, separando la parte reale e quella immaginaria, si ottiene

$$\begin{aligned} u(x, y) + i v(x, y) &= u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) + (\gamma + i\delta)(x - x_0 + i(y - y_0)) + \\ &\quad + \beta(z, z_0) \cdot (z - z_0) \quad . \end{aligned}$$

Ossia

$$\begin{aligned} u(x, y) + i v(x, y) &= u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) + (\gamma \cdot (x - x_0) - \delta \cdot (y - y_0)) + \\ &\quad + i(\delta \cdot (x - x_0) + \gamma \cdot (y - y_0)) + \beta(z, z_0) \cdot (z - z_0) \quad . \end{aligned}$$

Dunque

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + (\gamma \cdot (x - x_0) - \delta \cdot (y - y_0)) + \Re\{\beta(z, z_0) \cdot (z - z_0)\}$$

e

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + (\delta \cdot (x - x_0) + \gamma \cdot (y - y_0)) + \Im\{\beta(z, z_0) \cdot (z - z_0)\}$$

Ciò mostra che $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono differenziabili in (x_0, y_0) e, inoltre, che valgono le già ricordate condizioni di monogeneità. \square

È allora immediato riconoscere la validità del seguente

Corollario 1.2.1 *Se $f(z)$ è una funzione olomorfa in un dominio D , allora le sue parti reale e immaginaria soddisfano in D le equazioni di Cauchy-Riemann in ogni punto $z = x + iy \in D$*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad .$$

Le condizioni di monogeneità sono dunque una condizione necessaria per la derivabilità o differenziabilità di una funzione di variabile complessa. Tuttavia esse non sono sufficienti. Ciò è evidenziato dal seguente esempio molto semplice dovuto a D. Menchoff. Si consideri

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{per } z \neq 0, \\ 0 & \text{per } z = 0. \end{cases}$$

Allora $\frac{f(h)}{h} = \left(\frac{h}{|h|}\right)^4$ ha valore 1 se h è reale o puramente immaginario. In generale il rapporto incrementale vale $e^{4i\theta}$ se $h = |h|e^{i\theta}$. Perciò non esiste il limite del rapporto incrementale per $h \rightarrow 0$; ossia $f(z)$ non è derivabile in $z_0 = 0$. Tuttavia esistono le derivate parziali delle parti reale e immaginaria di $f(z)$ in $(0, 0)$ e soddisfano ivi le condizioni di monogeneità. Infatti si ha

$$u_x(0, 0) = v_y(0, 0) = 1 \quad , \quad u_y(0, 0) = -v_x(0, 0) = 0 \quad .$$

Vale tuttavia il seguente

Teorema 1.2.2 *Si supponga che $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sia definita in un intorno U di z_0 e che $u(x, y)$ e $v(x, y)$ siano differenziabili in (x_0, y_0) (in particolare, che le derivate parziali esistano in U e siano continue in (x_0, y_0)). Allora, se valgono le equazioni di Cauchy-Riemann, esiste finita $f'(z_0)$.*

Dimostrazione: Il rapporto incrementale in z_0 , con $z \in U \setminus \{z_0\}$, è dato da

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = \\ &= \left[\frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} + i \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \right] = \\ &= \frac{u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \beta_1(x, y)|z - z_0|}{z - z_0} + \\ &+ i \frac{v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \beta_2(x, y)|z - z_0|}{z - z_0}. \end{aligned}$$

Qui $\beta_1(x, y)$ e $\beta_2(x, y)$ sono funzioni infinitesime per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Tenendo conto che $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ e che $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$, l'espressione precedente del rapporto incrementale diviene:

$$[u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)] + [\beta_1(x, y) + i\beta_2(x, y)] \frac{|z - z_0|}{z - z_0}.$$

Poiché il fattore $\frac{|z - z_0|}{z - z_0}$ è limitato, mentre il fattore $[\beta_1(x, y) + i\beta_2(x, y)]$ è infinitesimo, si vede facilmente che il rapporto incrementale ha limite finito per $z \rightarrow z_0$, dato da $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$. \square

Si può dunque concludere con il seguente

Corollario 1.2.2 *Sia $f(z)$ definita in un dominio D ; se essa ha ivi parti reale e immaginaria differenziabili (in particolare, se le loro derivate parziali sono continue), se inoltre sono soddisfatte le condizioni di monogeneità, allora $f(z)$ è olomorfa in D .*

Abbiamo già osservato che le funzioni razionali fratte $\frac{P(z)}{Q(z)}$ sono olomorfe eccezione fatta per i punti nei quali $Q(z) = 0$. Ricordando quanto già si è stabilito per le funzioni che sono somma di una serie di potenze, possiamo concludere che la somma di una serie di potenze $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ è una funzione olomorfa nei punti interni del cerchio di convergenza. Perciò le funzioni esponenziale, seno e coseno, definite dalle seguenti serie assolutamente convergenti in tutto \mathbb{C} , sono olomorfe su \mathbb{C} .

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (1.9)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1.10)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad . \quad (1.11)$$

1.3 Integrale di Riemann - Stieltjes.

Facciamo una digressione sulle funzioni a variazione limitata e l'integrale di Riemann - Stieltjes. Considereremo funzioni definite su un intervallo $I = [a, b]$ a valori reali o complessi (in generale a valori in \mathbb{R}^n). Prendiamo una suddivisione $\pi = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$ e consideriamo la somma

$$S_\pi(f) = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \quad . \quad (1.12)$$

Diremo che la funzione $f(t)$ è a *variazione limitata* sull'intervallo $[a, b]$ se l'insieme delle somme $S_\pi(f)$ è limitato. Si dice *variazione totale* di f su $[a, b]$ il numero

$$V_a^b(f) = \sup\{S_\pi(f) : \pi \text{ è una suddivisione di } [a, b]\} \quad .$$

L'insieme di tutte le funzioni a variazione limitata su $[a, b]$ si denoterà con $VL(a, b)$ o con $BV(a, b)$.

Proveremo ora alcune proprietà fondamentali dell'insieme delle funzioni di variazione limitata a valori complessi.

$$f \in VL(a, b) , [\alpha, \beta] \subset [a, b] \Rightarrow f \in VL(\alpha, \beta) \text{ e } V_\alpha^\beta(f) \leq V_a^b(f) \quad (1.13)$$

Infatti basterà raffinare un'assegnata suddivisione inserendo i punti α e β tra quelli della suddivisione stessa e trascurare eventualmente i contributi alla variazione totale dovuti ai punti antecedenti α o seguenti β .

Sono poi di agevole dimostrazione, a partire dalla definizione, le seguenti proprietà valide per $f \in VL(a, b)$

$$V_\alpha^\beta(f) \geq |f(\beta) - f(\alpha)| \quad (1.14)$$

Infatti, basta osservare che $\{\alpha, \beta\}$ è la minima, nel senso dell'inclusione, di ogni suddivisione di $[\alpha, \beta]$. Da questa disuguaglianza, tenendo fisso il punto α in $[a, b]$ e facendo variare β , si deduce che ogni funzione a variazione limitata è, in particolare, limitata sul $[a, b]$. Infatti si ha $|f(x) - f(\alpha)| \leq V_\alpha^x(f) \leq V_a^b(f)$, e quindi $|f(x)| \leq |f(\alpha)| + V_a^b(f)$.

Infine si ha che la variazione totale è additiva

$$V_\alpha^\beta(f) = V_\alpha^\gamma(f) + V_\gamma^\beta(f) \text{ se } a \leq \alpha < \gamma < \beta \leq b \quad . \quad (1.15)$$

Basterà raffinare ogni assegnata suddivisione di $[\alpha, \beta]$ con l'inserimento del punto γ per provare la disuguaglianza \leq , e ricordare la definizione di estremo superiore per dedurne la disuguaglianza opposta \geq .

Converrà ricordare che le proprietà sopra citate sono quelle della lunghezza di una curva rettificabile, e che si dimostrano allo stesso modo. Osserveremo ulteriormente che la variazione $V_a^t(f)$ con $a \leq t \leq b$ è non-decrescente sull'intervallo $[a, b]$. Infatti se $t_1 < t_2$ si ha $V_a^{t_2}(f) - V_a^{t_1}(f) = V_{t_1}^{t_2} \geq |f(t_2) - f(t_1)| \geq 0$.

Teorema 1.3.1 *L'insieme $VL(a, b)$ è stabile per la somma, il prodotto di una funzione per una costante $\alpha \in \mathbb{C}$ e il prodotto di funzioni. Cioè $VL(a, b)$ forma un'algebra sul corpo dei complessi.*

Dimostrazione: La tesi segue dalle disuguaglianze di immediata verifica

$$V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g) \quad , \quad V_a^b(\alpha f) = |\alpha| V_a^b(f) \quad \text{e}$$

$$V_a^b(fg) \leq \sup |f| V_a^b(g) + \sup |g| V_a^b(f) \quad .$$

Ciò è conseguenza della seguente disuguaglianza

$$\begin{aligned} & |f(t_i)g(t_i) - f(t_{i-1})g(t_{i-1})| \leq \\ & \leq |f(t_i)||g(t_i) - g(t_{i-1})| + |g(t_{i-1})||f(t_i) - f(t_{i-1})| \quad . \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3.2 *Sia $f \in VL(a, b)$, a valori reali. Allora f è differenza di due funzioni non-negative, non-decrescenti.*

Dimostrazione: Sia $f(t)$ a variazione limitata. Potremo pensare che $f(a) \geq 0$, senza ledere la generalità; infatti, come vedremo nel corso della dimostrazione, nulla cambia se al posto di $f(t)$ consideriamo la traslata $f(t) + k$. Se poniamo $g(t) = f(a) + V_a^t(f)$ la funzione $g(t)$ è non-negativa ($f(a)$ e $V_a^t(t)$ sono ≥ 0) e inoltre è non-decrescente poiché così è la variazione $V_a^t(f)$. Sia poi $h(t) = f(a) + V_a^t(f) - f(t)$. Poiché $V_a^t(f) \geq |f(t) - f(a)|$, $h(t) \geq 0$ per ogni $t \in [a, b]$. Sia poi $t_1 < t_2$; allora $h(t_2) - h(t_1) = V_a^{t_2}(f) - V_a^{t_1}(f) - f(t_2) + f(t_1) = V_{t_1}^{t_2}(f) - [f(t_2) - f(t_1)] \geq |f(t_2) - f(t_1)| - [f(t_2) - f(t_1)] \geq 0$. Ovviamente è $f(t) = g(t) - h(t)$. □

Teorema 1.3.3 *Sia $f \in VL(a, b)$, a valori complessi. Allora f è combinazione lineare di quattro funzioni non-negative, non-decrescenti.*

Dimostrazione: La parte reale e la parte immaginaria di f sono a variazione limitata. Infatti $V_a^t(\Re f) \leq V_a^t(f)$ e $V_a^t(\Im f) \leq V_a^t(f)$. Perciò sia $\Re f$, che $\Im f$ sono differenza di due funzioni con le proprietà suddette. Si ottiene allora

$$f(t) = \sum_{k=0}^3 i^k g_k(t) = g_0(t) + ig_1(t) - g_2(t) - ig_3(t) \quad .$$

Ovviamente la decomposizione di $f(t)$ non è univocamente determinata; ci sono infinite decomposizioni possibili: per esempio, tutte quelle che corrispondono a $g_k(t) + \text{costante}$. \square

È noto (Teorema sul limite delle funzioni monotone) che ogni funzione monotona su un intervallo ha limite destro e sinistro finiti in $t_0 \in (a, b)$. Per la decomposizione appena ricordata, si può concludere con il seguente

Teorema 1.3.4 *Ogni funzione a variazione limitata su un intervallo $[a, b]$ ha limiti finiti destro e sinistro in ogni punto $t_0 \in (a, b)$.* \square

Diremo *salto destro* di f in $t \in [a, b]$ il numero $S_+(f, t) = |f(t) - f(t^+)|$. Il *salto sinistro* è $S_-(f, t) = |f(t) - f(t^-)|$. Qui $f(t^+) = \lim_{u \rightarrow t^+} f(u)$ e $f(t^-) = \lim_{u \rightarrow t^-} f(u)$. Se $\alpha \in [a, b]$, allora $S_+(f, \alpha) + S_-(f, \alpha) \leq V_a^b(f)$. I punti di discontinuità di f sono esattamente quelli nei quali si ha $S_+(f, \alpha) + S_-(f, \alpha) > 0$. Una funzione monotona e a valori reali su un intervallo, per es. una funzione non-decrescente, è tale che in ogni punto t_0 dell'intervallo stesso, esistono sia i limiti da destra che da sinistra e si ha, nel caso ipotizzato, $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \leq f(t_0) \leq \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$. Dunque, i punti di discontinuità di una funzione monotona su un intervallo individuano una famiglia d'intervalli aperti disgiunti. Una siffatta famiglia può essere al più numerabile sulla retta reale (in ognuno degli intervalli cade un punto razionale diverso e \mathbf{Q} è numerabile!). Ogni funzione a variazione limitata, a valori reali o complessi, su un intervallo è combinazione lineare di due o quattro funzioni monotone a valori reali. Dunque anch'essa può avere al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità. Si è dimostrato il seguente

Teorema 1.3.5 *Una funzione a variazione limitata su un intervallo ammette al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità.* \square

Infine, definiamo funzione a variazione limitata su un intervallo $[a, \infty)$ una funzione che è a variazione limitata su ogni intervallo limitato $[a, k]$ e tale che sia finito il $\lim_{k \rightarrow \infty} V_a^k(f)$. Tale limite si dice allora variazione totale di f su $[a, \infty)$: $V_a^\infty(f)$. Allo stesso modo si definiscono le funzioni a variazione limitata su \mathbb{R} .

Occupiamoci ora di un'importante generalizzazione dell'integrale di Riemann introdotta da Thomas Jan Stieltjes nel 1894. Consideriamo due funzioni, una continua e l'altra a variazione limitata su un intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset \mathbb{R}$: $f \in C(a, b)$ e $g \in BV(a, b)$. Ricordiamo che f risulta uniformemente continua su $[a, b]$. Consideriamo una suddivisione $\pi = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$ e sia $\sigma = \{s_k\}$ una scelta di punti dell'intervallo con $s_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Consideriamo inoltre la somma

$$S_{\pi, \sigma}(f, g) = \sum_{k=1}^n f(s_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})] \quad .$$

Definiamo *diametro della suddivisione* π il numero

$$\text{diam}(\pi) = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) \quad .$$

Diciamo infine *modulo di continuità* di $f \in C(a, b)$ il numero

$$\mu(\delta; f) = \max\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| \leq \delta\} \quad .$$

Notiamo che se f è una funzione uniformemente continua il suo modulo di continuità è infinitesimo con δ .

Allora possiamo dimostrare il seguente

Teorema 1.3.6 *Se $f \in C(a, b)$ e $g \in VL(a, b)$ esiste un numero J (reale o complesso) tale che*

$$|J - S_{\pi, \sigma}(f, g)| \leq 4\sqrt{2}\mu(\delta; f)V_a^b(g) \quad (1.16)$$

se $\text{diam}(\pi) \leq \delta$.

Definizione 1.3.1 *Il numero J , l'esistenza del quale è affermata dal precedente teorema, si dice integrale di Stieltjes di $f(t)$ rispetto a $g(t)$ sull'intervallo $[a, b]$ e si denota con*

$$\int_a^b f(t)dg(t) \quad . \quad (1.17)$$

Dimostrazione: Cominciamo ad osservare che se due somme relative alla stessa suddivisione π avente $\text{diam}(\pi) \leq \delta$ si riferiscono alle scelte σ_1 e σ_2 , allora è

$$|S_{\pi, \sigma_1}(f, g) - S_{\pi, \sigma_2}(f, g)| \leq \sum_{k=1}^n |f(s_{k,1}) - f(s_{k,2})||g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq \mu(\delta; f)V_a^b(g) \quad ,$$

per la definizione di variazione totale di g e avendo tenuto conto che $|s_{k,1} - s_{k,2}| \leq \delta$ per ogni k .

Siano ora π_1 e π_2 due suddivisioni di $[a, b]$ di diametro $\leq \delta$, tali che $\pi_1 \subseteq \pi_2$ (cioè tale che π_2 sia un *raffinamento* di π_1), e consideriamo due somme corrispondenti a queste suddivisioni: $S_{\pi_1, \sigma_1}(f, g)$ e $S_{\pi_2, \sigma_2}(f, g)$. Sia $T_1 = f(s)[g(\beta) - g(\alpha)]$ un termine di $S_{\pi_1, \sigma_1}(f, g)$. L'intervallo $[\alpha, \beta]$ è suddiviso dai punti $\{t_{\alpha, j}\}$ di π_2 . Vale allora $\sum_j [g(t_{\alpha, j}) - g(t_{\alpha, j-1})] = g(\beta) - g(\alpha)$. Il termine T_1 è allora sostituito da

$$T_2 = \sum_j f(s_{\alpha, j})[g(t_{\alpha, j}) - g(t_{\alpha, j-1})]$$

in $S_{\pi_2, \sigma_2}(f, g)$. poiché $|s_{\alpha, j} - s| \leq \delta$, abbiamo

$$|T_1 - T_2| = \left| \sum_j [f(s) - f(s_{\alpha, j})][g(t_{\alpha, j}) - g(t_{\alpha, j-1})] \right| \leq \mu(\delta; f) V_\alpha^\beta(g) \quad ,$$

e quindi

$$|S_{\pi_2, \sigma_2}(f, g) - S_{\pi_1, \sigma_1}(f, g)| \leq \mu(\delta; f) V_a^b(g) \quad .$$

Siano ora due somme arbitrarie, corrispondenti alle suddivisioni π_1 e π_2 con le scelte σ_1 e σ_2 . Sia $\pi_3 = \pi_1 \cup \pi_2$; tale suddivisione è un raffinamento di π_1 e di π_2 . Allora si ha

$$\begin{aligned} |S_{\pi_2, \sigma_2}(f, g) - S_{\pi_1, \sigma_1}(f, g)| &\leq |S_{\pi_2, \sigma_2}(f, g) - S_{\pi_3, \sigma_3}(f, g)| + \\ &+ |S_{\pi_3, \sigma_3}(f, g) - S_{\pi_1, \sigma_1}(f, g)| \leq 2\mu(\delta; f) V_a^b(g) \quad . \end{aligned}$$

Definiamo ora $L'_\delta = \sup\{\Re S_{\pi, \sigma}(f, g) : \text{diam}(\pi) \leq \delta\}$, $l'_\delta = \inf\{\Re S_{\pi, \sigma}(f, g) : \text{diam}(\pi) \leq \delta\}$ e $L''_\delta = \sup\{\Im S_{\pi, \sigma}(f, g) : \text{diam}(\pi) \leq \delta\}$, $l''_\delta = \inf\{\Im S_{\pi, \sigma}(f, g) : \text{diam}(\pi) \leq \delta\}$; sia poi $I_\delta = [l'_\delta, L'_\delta] + i[l''_\delta, L''_\delta]$. Evidentemente è $I_\delta \subseteq I_\rho$ se $\delta \leq \rho$ e inoltre $L'_\delta - l'_\delta, L''_\delta - l''_\delta \leq 4\mu(\delta, f) V_a^b(g)$. Prendendo per i valori di δ , per esempio, i numeri del tipo $\frac{1}{n}$, si trova una successione d'intervalli chiusi inscatolati I_n , aventi diagonale arbitrariamente piccola ($\leq 4\sqrt{2}\mu(\frac{1}{n}; f) V_a^b(g)$). Dunque esiste un unico numero J comune a tutti gli intervalli I_n e tale J soddisfa la disuguaglianza enunciata. \square

Passiamo ora brevemente in rassegna le proprietà dell'integrale di Riemann-Stieltjes. Dalla definizione seguono immediatamente le seguenti proprietà di bilinearità e di additività dell'integrale

$$\int_a^b [\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] dg(t) = \alpha \int_a^b f_1(t) dg(t) + \beta \int_a^b f_2(t) dg(t) \quad , \quad (1.18)$$

$$\int_a^b f(t) d[\alpha g_1(t) + \beta g_2(t)] = \alpha \int_a^b f(t) dg_1(t) + \beta \int_a^b f(t) dg_2(t) \quad , \quad (1.19)$$

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^c f(t) dg(t) + \int_c^b f(t) dg(t) \quad , \quad \text{per } a \leq c \leq b \quad . \quad (1.20)$$

Inoltre vale la disuguaglianza

$$\left| \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq \max |f(t)| \cdot V_a^b(g) \quad (1.21)$$

poiché essa è vera per le somme.

Ricordando che per ogni termine di una somma vale

$$|f(s)[g(\beta) - g(\alpha)]| \leq |f(s)|V_\alpha^\beta(g) = |f(s)|\{V_\alpha^\beta(g) - V_\alpha^\alpha(g)\} \quad ,$$

si ottiene

$$\left| \int_a^b f(t)dg(t) \right| \leq \int_a^b |f(t)|dV_a^t(g) \quad . \quad (1.22)$$

Osserviamo che anche il membro destro dell'equazione è un integrale di Stieltjes, poiché $|f(t)|$ è continua e $V_a^t(g) \in BV(a, b)$. La precedente disuguaglianza viene scritta spesso con la seguente, diversa notazione : $|\int_a^b f(t)dg(t)| \leq \int_a^b |f(t)||dg(t)|$, dove $|dg(t)|$ sta al posto di $dV_a^t(g)$. Se $g(t)$ ha derivata continua, allora si ha, come è noto, $\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt$.

Infine, scambiando i ruoli di f e di g , si perviene alla *formula d'integrazione per parti*. Infatti, si ha

$$\begin{aligned} S_{\pi, \sigma} &= \sum_{k=1}^n f(s_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})] = f(s_n)g(b) - f(s_1)g(a) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} g(t_k)[f(s_{k+1}) - f(s_k)] \quad . \end{aligned}$$

Prendendo il limite dell'uguaglianza per $\text{diam}(\pi) \rightarrow 0$, si ottiene

$$\int_a^b f(t)dg(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(t)df(t) \quad . \quad (1.23)$$

Se si sa solamente che $f \in C(a, b)$ e $g \in BV(a, b)$, allora questa formula fornisce la definizione dell'integrale del membro destro. Se $f, g \in C(a, b) \cap BV(a, b)$, allora la formula stabilisce la formula d'integrazione per parti, estremamente utile per valutare gli integrali di Stieltjes.

1.4 Integrazione complessa. Teorema di Cauchy.

Sia Γ una curva rettificabile del piano complesso. Intenderemo con ciò una curva d'equazione $z = z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, dove $z(t)$ è una funzione continua e di variazione limitata su $[0, 1]$. Γ è orientata dalla parametrizzazione. Cioè $z_1 = z(t_1)$ precede $z_2 = z(t_2)$ se $t_1 < t_2$. $-\Gamma$ rappresenta la stessa curva con l'orientazione opposta, cioè d'equazione $z = z(1 - t)$. La lunghezza di Γ è data da $\ell(\Gamma) = V_0^1(z)$. Se $f(z)$ è una funzione continua definita sul sostegno della curva Γ (con ciò intenderemo che f è definita su un aperto di \mathbb{C} , $\Omega \supset \Gamma([0, 1])$). Spesso il sostegno $\Gamma([0, 1])$ sarà semplicemente indicato con Γ), allora $f(z(t))$ è una funzione continua su $[0, 1]$.

Definizione 1.4.1 *Se f è una funzione continua sul sostegno della curva continua rettificabile Γ definiamo*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_0^1 f(z(t))dz(t) \quad ,$$

dove l'integrale al secondo membro è inteso nel senso di Riemann-Stieltjes.

Le proprietà già dimostrate per l'integrale di Stieltjes permettono immediatamente di verificare che valgono le seguenti uguaglianze

I. Linearità.

$$\int_{\Gamma} [\alpha f_1(z) + \beta f_2(z)] dz = \alpha \int_{\Gamma} f_1(z) dz + \beta \int_{\Gamma} f_2(z) dz \quad . \quad (1.24)$$

II. Additività rispetto al cammino. Se Γ_1 e Γ_2 sono due curve rettificabili consecutive, cioè tali che $z_1(1) = z_2(0)$ e con $\Gamma_1 + \Gamma_2$ intendiamo la curva Γ_1 seguita dalla Γ_2 , cioè la curva d'equazione

$$z(t) = \begin{cases} z_1(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ z_2(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (1.25)$$

allora si ottiene

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz \quad . \quad (1.26)$$

III. Cambiando l'orientazione della curva, cambia il segno dell'integrale.

$$\int_{-\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz \quad . \quad (1.27)$$

IV. Valgono le seguenti disuguaglianze che discendono dalle (1.9) e (1.10)

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \Gamma} |f(z)| \cdot \ell(\Gamma) \quad (1.28)$$

e

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| = \int_0^1 |f(z(t))| ds(t) \quad , \quad (1.29)$$

dove $s(t)$ è la lunghezza dell'arco della curva Γ .

V. Se la curva Γ è generalmente regolare allora

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(z(t)) z'(t) dt \quad . \quad (1.30)$$

Concludiamo con alcuni esempi fondamentali

Esempio 1.4.1 Se Γ è una qualsiasi curva rettificabile che congiunge i punti a e b del piano complesso, allora:

$$\int_{\Gamma} dz = \int_a^b dz = b - a \quad . \quad (1.31)$$

Infatti, quale che sia la suddivisione di $[a, b]$, si ha $\sum_{k=1}^n [z(t_k) - z(t_{k-1})] = z(1) - z(0) = b - a$.

Esempio 1.4.2 Analogamente, per ogni curva rettificabile Γ vale

$$\int_{\Gamma} z dz = \int_a^b z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \quad . \quad (1.32)$$

Infatti, dalla formula d'integrazione per parti, si ottiene

$$\int_a^b z dz = \int_0^1 z(t) dz(t) = [z(1)]^2 - [z(0)]^2 - \int_0^1 z(t) dz(t) \quad . \quad (1.33)$$

In particolare, se Γ è una curva rettificabile semplice chiusa, tale che $z(0) = z(1)$ allora $\int_{\Gamma} dz = 0$ e $\int_{\Gamma} z dz = 0$.

Esempio 1.4.3 Se Γ è un cerchio di centro a e raggio r , d'equazione $z = a + re^{i\vartheta}$, vale

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i \quad .$$

Infatti Γ è una curva regolare con $z(\vartheta)$ differenziabile. Perciò si può applicare la formula del punto V. $z - a = re^{i\vartheta}$; $dz = ire^{i\vartheta} d\vartheta$ e si ottiene

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\vartheta}}{re^{i\vartheta}} d\vartheta = i \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi i \quad .$$

Una curva semplice chiusa si potrà pensare dotata di un'orientazione intrinseca indipendente dalla sua parametrizzazione. Precisamente l'orientazione sarà detta positiva se, scelto un punto z_0 all'interno del circuito Γ , partendo da un punto $z \in \Gamma$ e ritornando al punto di partenza dopo avere percorso una sola volta tutto il circuito, l'argomento del numero complesso $z - z_0$ risulta aumentato di 2π . L'orientazione positiva si dirà anche *antioraria*.

Teorema 1.4.1 Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un dominio D e sia Γ una curva continua, semplice, chiusa, rettificabile tale che $\Gamma^* = \Gamma \cup (\Gamma)_i \subset (D)_i$, dove $(D)_i$ indica la parte interna di D . Allora

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad . \quad (1.34)$$

Dimostrazione: La dimostrazione sarà fatta in più passi. Innanzitutto dimostreremo che la tesi vale quando Γ è il perimetro di un triangolo di vertici z_1, z_2, z_3 . Successivamente estenderemo questo risultato ad una poligonale chiusa arbitraria ed infine perverremo al risultato nel caso generale. La

dimostrazione qui esposta, che non richiede ipotesi aggiuntive di continuità di $f'(z)$ o di regolarità di Γ , è dovuta essenzialmente a Goursat (1883), modificata da Prigsheim e Knopp (1918).

a) Sia dunque $\Gamma = \Delta$ il perimetro di un triangolo di vertici z_1, z_2, z_3 , orientato in senso antiorario o positivo, e sia $\Delta^* = \Delta \cup (\Delta)_i$. Per assurdo si supponga che $\int_{\Delta} f(z)dz \neq 0$. Sia ℓ il perimetro di Δ . Se suddividiamo il triangolo con linee congiungenti i punti medi dei suoi lati, otteniamo quattro triangoli $\Delta_{01}, \Delta_{02}, \Delta_{03}$ che contengono rispettivamente i vertici z_1, z_2, z_3 e Δ_{04} che contiene z_4 , baricentro del triangolo. Se i singoli triangoli Δ_{0i} con $i = 1, 2, 3, 4$ sono orientati positivamente, avremo

$$\int_{\Delta} f(z)dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\Delta_{0k}} f(z)dz \quad ,$$

poiché i contributi di Δ_{04} cancellano i contributi dei lati di Δ_{0k} ($k = 1, 2, 3$) che non sono semilati di Δ . Se supponiamo che $\int_{\Delta} f(z)dz \neq 0$, almeno uno dei Δ_{0k} darà contributo non nullo. Diciamo Δ_1 uno di quelli che dà contributo di modulo massimo (quello d'indice minimo, se ce n'è più d'uno). Sarà:

$$\left| \int_{\Delta} f(z)dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\Delta_1} f(z)dz \right| \quad .$$

Ripetendo questo procedimento per infiniti passi, troveremo una successione di triangoli (Δ_n) tale che sia

$$(D)_i \supset \Delta_0^* \supset \Delta_1^* \supset \dots \supset \Delta_n^* \supset \dots$$

Il perimetro di Δ_n è $\frac{\ell}{2^n}$; il suo diametro è perciò al più $\frac{1}{2} \frac{\ell}{2^n}$ e tende a zero per n che tende all'infinito. Ne segue che ci sarà un solo punto z_0 comune a tutti i domini triangolari Δ_n^* . Ed inoltre vale

$$\left| \int_{\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Delta_n} f(z)dz \right| \quad .$$

Poiché, per l'olomorfismo di $f(z)$ in $z_0 \in D$, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad \text{per } 0 < |z - z_0| < \delta \quad ,$$

è $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \eta(z, z_0)$ con $|\eta(z, z_0)| \leq \epsilon |z - z_0|$ per $|z - z_0| < \delta$. Pur di scegliere n abbastanza grande si potrà rendere $|z - z_0| < \delta$ per $z \in \Delta_n^*$.

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_n} f(z)dz &= \int_{\Delta_n} [f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \eta(z, z_0)]dz \\ &= [f(z_0) - z_0 f'(z_0)] \int_{\Delta_n} dz + f'(z_0) \int_{\Delta_n} z dz + \int_{\Delta_n} \eta(z, z_0) dz \quad . \end{aligned}$$

I primi due integrali sono nulli, come si è dimostrato in precedenza. Inoltre

$$\left| \int_{\Delta_n} \eta(z, z_0) dz \right| \leq \epsilon \frac{\ell^2}{2 \cdot 4^n}$$

poiché $|\eta(z, z_0)| < \epsilon \cdot \frac{\ell}{2 \cdot 2^n}$ e inoltre vale la proprietà **IV**. Segue allora

$$\left| \int_{\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Delta_n} f(z)dz \right| \leq \frac{1}{2} 4^n \frac{\ell^2}{4^n} \epsilon = \frac{1}{2} \ell^2 \epsilon \quad .$$

Per l'arbitrarietà di ϵ , segue finalmente

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0 \quad .$$

Questo conclude il primo passo della dimostrazione.

b) Sia ora Π un poligono semplice chiuso avente la parte interna e il perimetro contenuti in D . È intuitivo, ma si può dimostrare in modo rigoroso e relativamente semplice (dimostrazione omessa), che ogni poligono semplice chiuso si può *triangolare*; cioè che si possono trovare triangoli

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$$

tali che: (i) le parti interne a due triangoli Δ_i e Δ_k non abbiano punti in comune per $i \neq k$, e (ii) $\cup \Delta_k^* = \Pi^*$, dove l'asterisco indica l'unione dell'interno con la frontiera (cioè la chiusura di $(\Delta_k)_i$) della curva semplice chiusa in considerazione. Ne segue che

$$\int_{\Pi} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} f(z)dz = 0 \quad .$$

Dunque, la tesi vale per arbitrari poligoni. Si veda la Figura 1.3.

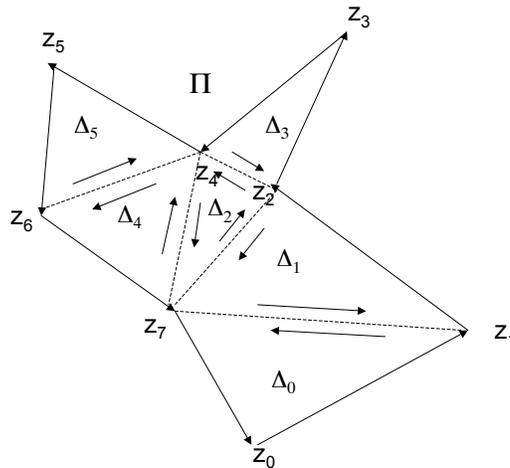


Figura 1.3: Integrazione su un poligono semplice chiuso.

c) Supponiamo ora che Γ sia un'arbitraria curva semplice, chiusa, rettificabile tale che $\Gamma^* \subset D$. Osserviamo, innanzi tutto, che Γ^* ha una distanza positiva d dal complementare di D . Si scelga un numero $0 < \rho < d$ e sia R l'insieme dei punti aventi da Γ^* una distanza non maggiore di ρ . Perciò vale $\Gamma^* \subset R \subset D$, essendo l'inclusione propria nei due casi. Sia poi $\mu(\delta, f)$ il modulo di continuità della restrizione di f a R .

Sia ora dato un numero reale $\epsilon > 0$. Possiamo trovare un insieme finito di punti z_1, z_2, \dots, z_n su Γ che soddisfano le seguenti richieste:

- (i) z_j precede z_k su Γ se $j < k$;
- (ii) tutti i segmenti $[z_k, z_{k+1}]$ sono contenuti in R . Si intende che $z_{n+1} = z_1$;
- (iii) il poligono $\Pi = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ è semplice;
- (iv) se δ è scelto in modo che $\mu(\delta, f) < \frac{\epsilon}{2\ell}$, dove ℓ è la lunghezza di Γ , allora per ogni k si ha $|z_{k+1} - z_k| < \delta$;
- (v) $|\int_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Queste condizioni si possono tutte soddisfare, salvo eventualmente la (iii). Ma se quest'ultima è violata, comunque sarà vero che

$$\int_{\Pi} f(z)dz = 0 \quad ,$$

perché, se non semplice Π , sarà l'unione di un numero finito di poligoni semplici ed eventualmente di un numero finito di segmenti percorsi due volte in direzioni opposte quando z percorre Π . Osserviamo che la somma finita soddisfacente la condizione (v) si può scrivere come un integrale. Avremo allora

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Pi} f(z)dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [f(z) - f(z_k)]dz \right| \leq \\ &\leq \mu(\delta, f) \cdot \ell < \frac{\epsilon}{2\ell} \cdot \ell = \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che la lunghezza di Π non supera quella di Γ . Combinando questa stima con quella di (v), si trova finalmente

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| &= \left| \int_{\Gamma} f(z)dz - \int_{\Pi} f(z)dz \right| \leq \left| \int_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \right| + \\ &+ \left| \int_{\Pi} f(z)dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad . \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ϵ il teorema è dimostrato. □

Il precedente teorema è fondamentale. Ne offriamo perciò una dimostrazione alternativa, basata sul Teorema di Gauss – Green nel piano. Si richiedono per questa dimostrazione ipotesi più restrittive sulla regolarità del cammino lungo il quale si integra e sulla continuità delle derivate della parte reale e immaginaria della funzione olomorfa, ipotesi che, come abbiamo visto in precedenza, non sono necessarie. Tuttavia, la dimostrazione risulta essere più rapida e comunque è istruttiva.

Teorema 1.4.2 Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un dominio D e sia Γ una curva semplice, chiusa, a tratti regolare tale che $\Gamma^* = \Gamma \cup (\Gamma)_i \subset (D)_i$. Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è tale che le derivate parziali di $u(x, y)$ e di $v(x, y)$ sono continue in $(D)_i$, allora

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \quad .$$

Dimostrazione: Posto $z = x + iy$, l'integrale si può così esprimere separando la parte reale da quella immaginaria

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \int_{\Gamma} (v(x, y)dx + u(x, y)dy).$$

Ricordando le formule di Gauss-Green:

$$\int_{\Gamma} X(x, y)dx = - \int \int_{\Gamma^*} \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} dx dy$$

e

$$\int_{\Gamma} Y(x, y)dy = \int \int_{\Gamma^*} \frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} dx dy,$$

si ottiene

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = - \int \int_{\Gamma^*} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int \int_{\Gamma^*} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad .$$

I due integrali sono nulli poiché valgono le condizioni di monogenità. □

Sono interessanti alcune notevoli estensioni del teorema precedente

Teorema 1.4.3 Sia Γ una linea chiusa, semplice, continua e rettificabile e sia la sua parte interna $(\Gamma)_i$ convessa rispetto a un punto interno z_0 . Se $f(z)$ è olomorfa in $(\Gamma)_i$ ed è continua in $\Gamma^* = \Gamma \cup (\Gamma)_i$, allora è

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \quad .$$

Non dimostriamo questo teorema.

Ricordiamo che $(\Gamma)_i$ si dice convesso o stellato rispetto a un suo punto z_0 se per ogni $z \in (\Gamma)_i$ il segmento d'estremi z_0 e z è tutto contenuto in $(\Gamma)_i$.

Teorema 1.4.4 (Dei due circuiti). Supponiamo che Γ_1 e Γ_2 siano due curve semplici, chiuse, rettificabili, continue che hanno la stessa orientazione e tali che Γ_1 giaccia all'interno di Γ_2 . Se $f(z)$ è olomorfa in $D \supset (\overline{\Gamma_2})_i \cap (\overline{\Gamma_1})_e$, allora

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz \quad . \tag{1.35}$$

Dimostrazione: L'affermazione è banale se $f(z)$ è olomorfa in tutto Γ_2^* , perché allora i due integrali sono nulli. Altrimenti, si prenda un punto z_0 interno a Γ_1 (e quindi a Γ_2) e si tracci una linea orizzontale² per z_0 . Il prolungamento di questa linea intersecherà almeno due volte sia Γ_1 che Γ_2 . Poiché l'insieme intersezione è un insieme compatto contenuto nella retta, andando verso destra si troverà un ultimo punto z_1 in Γ_1 e un primo punto susseguente z_2 in Γ_2 . Il segmento di linea di estremi z_1 e z_2 giace per intero in $(\Gamma_2)_i \cap (\Gamma_1)_e$. Analogamente, alla sinistra di z_0 c'è un ultimo punto z_3 in Γ_1 e un primo punto seguente z_4 in Γ_2 ; il segmento (z_4, z_3) giace per intero in $(\Gamma_2)_i \cap (\Gamma_1)_e$. I due segmenti di retta tagliano $(\Gamma_2)_i \cap (\Gamma_1)_e$ in due parti, una superiore e una inferiore. Se le due curve Γ_1 e Γ_2 sono orientate positivamente, i punti z_1 e z_3 dividono Γ_1 in due archi Γ_{11} e Γ_{12} . Analogamente z_2 e z_4 dividono Γ_2 negli archi Γ_{21} e Γ_{22} . Siano Δ_1 e Δ_2 i bordi del dominio superiore e inferiore rispettivamente. Allora $\Delta_1 = [z_1, z_2] \cup \Gamma_{21} \cup [z_4, z_3] \cup (-\Gamma_{11})$ e $\Delta_2 = (-\Gamma_{12}) \cup [z_3, z_4] \cup \Gamma_{22} \cup [z_2, z_1]$. Gli integrali estesi a Δ_1 e a Δ_2 sono nulli. Dunque

$$0 = \int_{\Delta_1} + \int_{\Delta_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_{21}} - \int_{\Gamma_{11}} + \int_{\Gamma_{22}} - \int_{\Gamma_{12}} f(z)dz \quad .$$

poiché gli integrali lungo i segmenti di retta si cancellano. Raggruppando i termini si ottiene il risultato voluto. \square

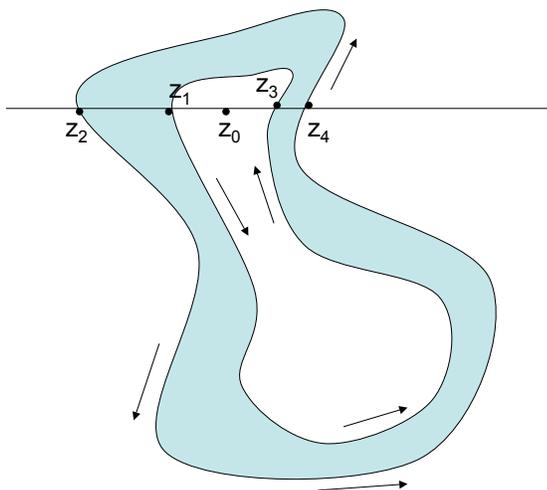


Figura 1.4: Cammini chiusi semplici, uno interno all'altro.

La Figura 1.4 illustra la situazione descritta nel Teorema 1.4.4.

D'ora in poi una curva semplice, chiusa, continua, rettificabile (a variazione limitata) si dirà un "circuito o un " laccio. Allora, più in generale, possiamo affermare la validità del seguente teorema

²cioè una parallela all'asse $x = \Re(z)$

Teorema 1.4.5 Se $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ sono $n + 1$ circuiti e se $f(z)$ è una funzione olomorfa in un dominio D che contiene la chiusura della parte di piano interna a Γ_0 e esterna a $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, cioè $D \supset \overline{D_0}$, con

$$D_0 = (\Gamma_0)_i \cap (\Gamma_1)_e \cap \dots \cap (\Gamma_n)_e \quad ,$$

allora

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z)dz \quad .$$

La dimostrazione elementare di questo teorema si basa sulla possibilità di operare dei “tagli che spezzino D_0 in due o più domini *semplicemente connessi*.”

Ricordiamo che un dominio D del piano complesso si dice *semplicemente connesso* se il suo complementare è connesso sulla sfera complessa di Riemann.

Omettiamo la dimostrazione del teorema, rimandando per un’idea intuitiva della dimostrazione stessa alla seguente Figura 1.5.

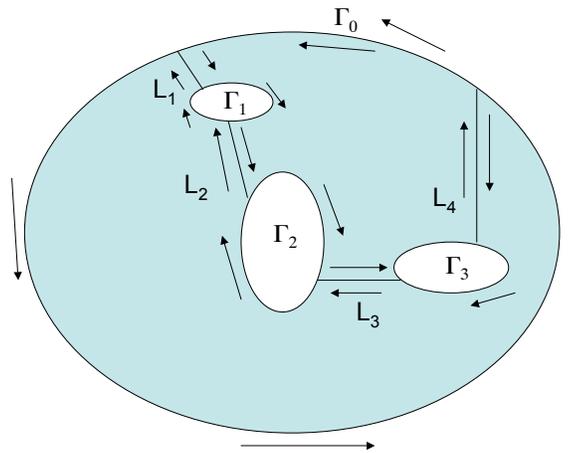


Figura 1.5: Formula di Cauchy in dominio molteplicemente connesso.

I tagli L_1, L_2, L_3 e L_4 dividono D_0 in due domini semplicemente connessi e sommando i singoli contributi si ottiene la formula annunciata per il caso specifico.

Come semplice applicazione del teorema precedente, vogliamo calcolare l’integrale $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a}$ dove Γ è un circuito che non passa per il punto a . Se a è esterno a Γ , allora $f(z) = \frac{1}{z-a}$ è olomorfa in $\Gamma^* = \Gamma \cup (\Gamma)_i$ e l’integrale è nullo. Se $a \in (\Gamma)_i$, per il teorema precedente l’integrale è uguale a quello esteso a un cerchio di centro a e raggio ε . Prendendo ε sufficientemente piccolo il cerchio è contenuto in $(\Gamma)_i$. Ma quest’ultimo integrale è stato calcolato nell’Esempio 1.4.3, e vale $2\pi i$.

1.5 Formule integrali di Cauchy.

Nelle considerazioni che seguono penseremo che i circuiti siano orientati secondo la convenzione sopra esposta.

I risultati di questo paragrafo, e molti altri che seguiranno, sono conseguenze dirette del fondamentale Teorema di Cauchy dimostrato nel paragrafo precedente.

Teorema 1.5.1 (Formula integrale di Cauchy). *Sia Γ un circuito positivamente orientato e sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un dominio $D \supset \Gamma^*$; se z è un punto interno a Γ , vale*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad . \quad (1.36)$$

Dimostrazione: Dal Teorema 1.4.4 segue che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad ,$$

dove C è un cerchio di raggio $\rho = |\xi - z|$ così piccolo da essere contenuto per intero in $(\Gamma)_i$. Ricordando che $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\xi - z} d\xi = 1$, segue che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \quad .$$

Nell'ultimo integrale, l'integrando si può valutare come segue $\frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = f'(z) + \eta(\xi, z)$, con $\eta(\xi, z)$ che tende a zero per $\xi \rightarrow z$. Perciò l'integrando è maggiorato in modulo da una certa costante M se $\xi \in C$ con C cerchio di raggio ρ sufficientemente piccolo. Il modulo dell'integrale è maggiorato da $\frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \ell(C) = \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot 2\pi\rho = M \cdot \rho$, che tende a zero al tendere a zero di ρ . Ma il termine a sinistra dell'uguaglianza è indipendente da ρ e quindi deve essere nullo. \square

Una conseguenza immediata del precedente teorema è la seguente proposizione che si ottiene prendendo come curva Γ un cerchio di centro il punto a e raggio r , tale che $\Gamma^* \subset D$.

Teorema 1.5.2 (Teorema della media) *Se C è un cerchio di centro a e raggio r tale che $C^* \subset D$, allora si ha*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \quad .$$

Dimostrazione: Infatti si ha

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi \quad .$$

Posto $\xi = a + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, avendo fatto le dovute sostituzioni e semplici calcoli, si trova la formula voluta. \square

Utilizzando l'enunciato del Teorema 1.4.3 si trova che la conclusione precedente vale anche nell'ipotesi che $f(z)$ sia olomorfa in $(\Gamma)_i$ e continua in Γ^* . Se z è esterno a Γ , allora si ha $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = 0$.

Infine, se la regione in cui $f(z)$ è olomorfa è interna a un circuito Γ_0 ed esterna a $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, allora la formula scritta continua a valere se $\Gamma = \Gamma_0 - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_n$. Altro fondamentale risultato è il seguente teorema che vale per $f'(z)$.

Teorema 1.5.3 (Formula di Cauchy per la derivata). *Sotto le ipotesi del precedente Teorema 4.1, si ha*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi \quad .$$

Dimostrazione: Se $z \in (\Gamma)_i$ l'integrale è una funzione $f_1(z)$ ben definita; dimostremo che coincide con $f'(z)$. Si osservi che

$$\frac{1}{h} \cdot \left[\frac{1}{\xi-z-h} - \frac{1}{\xi-z} \right] - \frac{1}{(\xi-z)^2} = \frac{h}{(\xi-z-h)(\xi-z)^2} \quad .$$

Allora

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_1(z) = \frac{h}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2(\xi-z-h)} d\xi \quad .$$

Si dica $R(\delta)$ quella parte di $(\Gamma)_i$ per la quale z (e $z+h$) distano da Γ non meno di δ . Detto M il massimo di $|f(z)|$ su Γ e $\ell(\Gamma)$ la lunghezza di Γ , l'integrale è maggiorato in modulo da

$$\frac{|h|}{2\pi} \cdot \delta^{-3} \cdot M \cdot \ell(\Gamma) \quad \text{per } z, z+h \in R(\delta) \quad .$$

Dunque esso tende a zero uniformemente rispetto a z quando $h \rightarrow 0$. Ma il termine sinistro ha limite $f'(z) - f_1(z)$ per $h \rightarrow 0$. Perciò si ha

$$f'(z) = f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi \quad .$$

□

Il teorema ora dimostrato assicura che se $z \in \Gamma_i$, il risultato si può ottenere derivando sotto il segno d'integrale. Più in generale vale il seguente risultato

Teorema 1.5.4 (Formula di Cauchy per le derivate successive). *Sia $f(z)$ olomorfa nel dominio $D = (\Gamma_0)_i \cap (\Gamma_1)_e \cap \dots \cap (\Gamma_n)_e$. Allora $f(z)$ ha derivate di ogni ordine in D e si ha*

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{m+1}} d\xi \quad , \quad (1.37)$$

per $z \in D$ e per ogni $m \in \mathbf{N}$.

Dimostrazione: (Cenno) Procedendo per induzione, supponiamo che la tesi valga per $m - 1$. Già sappiamo che essa vale per $m = 0$ e per $m = 1$, come abbiamo precedentemente dimostrato. Supponiamo dunque che esista $f^{(m-1)}(z)$ e che sia data dalla formula detta. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \cdot [f^{(m-1)}(z+h) - f^{(m-1)}(z)] &= \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(\xi-z-h)^m} - \frac{1}{(\xi-z)^m} \right] d\xi \\ &= \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) d\xi \frac{1}{h} \frac{h \cdot m \cdot (\xi-z)^{m-1} + \dots}{(\xi-z)^m (\xi-z-h)^m} \\ &= \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) d\xi \frac{m \cdot (\xi-z)^{m-1} + \dots}{(\xi-z)^m (\xi-z-h)^m}. \end{aligned}$$

I puntini indicano termini contenenti il fattore h o sue potenze di grado superiore. Si può dimostrare che per $h \rightarrow 0$, con $z, z+h \in R(\delta)$, l'integrale tende uniformemente rispetto a z a

$$\frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) \frac{m}{(\xi-z)^{m+1}} d\xi = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{m+1}} d\xi \quad .$$

□

Dunque una funzione olomorfa in un dominio D risulta avere in D non solo la derivata prima in senso complesso ma derivate di ogni ordine.

1.6 Teorema di Morera. Principio di massimo.

Quanto abbiamo ricordato dopo il Teorema 1.5.3 è importante perché ci permette di dimostrare una proposizione reciproca del Teorema di Cauchy, scoperta da Giacinto Morera nel 1886

Teorema 1.6.1 (di Morera). *Si supponga che $f(z)$ sia una funzione continua in un dominio semplicemente connesso D e tale che per ogni triangolo Δ con $\Delta^* \subset D$ valga*

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0 \quad .$$

Allora $f(z)$ è olomorfa in D .

Dimostrazione: Si supponga che $a \in D$ e sia $D(a)$ un dominio stellato rispetto ad a e contenuto in D . Per $z \in D(a)$, si definisca $F(z, a) = \int_a^z f(t) dt$, dove l'integrale si calcola lungo il segmento di retta congiungente a con z . Si prenda h in modo che $z+h \in D(a)$ e ciò accada anche per ogni punto del segmento $[z, z+h]$. Allora

$$F(z+h, a) - F(z, a) = \int_a^{z+h} f(t) dt - \int_a^z f(t) dt = \int_z^{z+h} f(t) dt$$

poiché l'integrale esteso al triangolo di vertici $a, z, z+h$ vale 0. Dunque

$$\frac{1}{h} \cdot [F(z+h, a) - F(z, a)] = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(t) dt = f(z) - \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(z) - f(t)] dt \quad .$$

Per la continuità di $f(z)$ il termine integrale nell'ultimo membro tende a 0 per $h \rightarrow 0$. Perciò vale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot [F(z+h, a) - F(z, a)] = f(z) \quad .$$

Dunque $F(z, a)$ è funzione olomorfa di z in $D(a)$ e dunque in un intorno di a . Ma, per quanto si è dimostrato in precedenza, anche la sua derivata $f(z)$ è derivabile nello stesso dominio $D(a)$, cioè in un intorno di a . Cioè $f(z)$ è olomorfa in un intorno di ogni punto $a \in D$. Dunque è olomorfa in D . \square

Per le funzioni olomorfe vale una notevole proprietà di massimo.

Teorema 1.6.2 *Sia $f(z)$ olomorfa in D e sia Γ un circuito tale che $\Gamma^* \subset D$. Allora per ogni $z \in (\Gamma)_i$ vale*

$$|f(z)| \leq M(f, \Gamma) \quad ,$$

essendo $M(f, \Gamma)$ il massimo di $|f(z)|$ su Γ . Se poi $|f(z)|$ assume il valore massimo in un punto $a \in (\Gamma)_i$, allora $f(z)$ è costante in Γ^ .*

Dimostrazione: Basta ricordare che, per ogni intero $k \geq 1$, si ha

$$[f(z)]^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[f(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi \quad .$$

Passando ai moduli e ricordando la maggiorazione dell'integrale

$$|f(z)|^k \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi d(z, \Gamma)} \cdot [M(f, \Gamma)]^k \quad ,$$

dove $d(z, \Gamma)$ è la distanza di z da Γ . Estraendo la radice, si ottiene

$$|f(z)| \leq \left[\frac{\ell(\Gamma)}{2\pi d(z, \Gamma)} \right]^{\frac{1}{k}} \cdot M(f, \Gamma) \quad .$$

Prendendo il limite della disuguaglianza per $k \rightarrow \infty$, si ha finalmente

$$|f(z)| \leq M(f, \Gamma) \quad .$$

Sia $a \in (\Gamma)_i$ un punto nel quale $|f(z)|$ assume il valore massimo; si può prendere un valore $r > 0$ così piccolo che $a + r \cdot e^{i\vartheta} \in (\Gamma)_i$ per ogni $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Si ricordi inoltre che $|f(a)| \geq |f(z)|$ per ogni $z \in \Gamma^*$. Ricordando il teorema della media, $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r \cdot e^{i\vartheta}) d\vartheta$, e quindi

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r \cdot e^{i\vartheta})| d\vartheta \leq |f(a)| \quad ,$$

poiché $|f(a + r \cdot e^{i\vartheta})| \leq |f(a)|$. Dunque l'integrale vale proprio $|f(a)|$ e quindi

$$\int_0^{2\pi} [|f(a)| - |f(a + r \cdot e^{i\vartheta})|] d\vartheta = 0 \quad .$$

Questo significa (essendo le funzioni continue e la differenza non negativa) che l'integrando vale zero. Per l'arbitrarietà di r in un intorno di a la funzione $f(z)$ ha modulo costante. Ma si dimostra che se una funzione olomorfa porta un disco $D_r = \{z: |z| < r\}$ su un sottoinsieme di un cerchio $\{w: |w| = \rho\}$ allora $f(z)$ deve essere costante. Infatti dimostreremo (nel paragrafo 14) che una funzione olomorfa conserva gli angoli (è una trasformazione *conforme*) fra gli archi uscenti da un punto z_0 nel quale sia $f'(z_0) \neq 0$. Ora se in tutti i punti di D_r è $f'(z) = 0$ allora f è costante in D_r e quindi ovunque, come vedremo in seguito (Teorema 1.8.1). Se in qualche punto del disco è $f'(z_0) \neq 0$, si possono fare uscire da quel punto due archi che formino un angolo di $\frac{\pi}{2}$, per es. Dall'immagine che sta su un arco di circonferenza dovrebbero uscire due archi che formano un angolo retto. Ma ciò è impossibile perché lungo la circonferenza due archi uscenti dallo stesso punto possono formare solo un angolo nullo o piatto. Dunque non solo il modulo della funzione deve essere costante in un intorno di a ma la funzione stessa. La funzione è allora costante in Γ^* , poiché $(\Gamma)_i$ è un insieme connesso (per archi). \square

Dunque se f è olomorfa su un aperto $D \subset \mathbb{C}$ si può concludere in generale quanto segue: *Se $f(z)$ è una funzione olomorfa in un dominio D limitato ed è continua in $D \cup \partial D$ (dove ∂D è la frontiera di D), se $M = M(f, \partial D)$ è il massimo di $|f(z)|$ su ∂D , allora in ogni punto di D è $|f(z)| < M$, a meno che $f(z)$ non sia costante in D .*

1.7 Sviluppi in serie di Taylor e di Laurent.

Abbiamo visto che le funzioni olomorfe in un aperto del campo complesso \mathbb{C} sono addirittura di classe \mathcal{C}^∞ ora dimostreremo che esse ammettono una proprietà ancora più forte.

Teorema 1.7.1 (Sviluppo in serie di Taylor). *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa nel cerchio $|z - a| < R$, allora si ha*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z - a)^n \quad , \quad (1.38)$$

e la serie converge assolutamente in tale cerchio.

Dimostrazione: Osserviamo che è

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n \quad .$$

La serie scritta converge assolutamente se $|z - a| < |\xi - a|$. Se poi è $|\xi - a| = R_1$ e $|z - a| \leq \rho R_1$, con $0 < \rho < 1$, allora la serie converge uniformemente rispetto a ξ e a z . Si prenda ora R_1 tale che $0 < R_1 < R$. Se Γ_1 è il cerchio $|\xi - a| = R_1$, si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \text{ per } |z - a| \leq \rho R_1 \text{ (} 0 < \rho < 1 \text{)} \quad .$$

Ora, per la convergenza uniforme della serie, si può integrare a termine a termine e quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \quad .$$

Ricordando le formule di Cauchy delle derivate successive, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Perciò, finalmente possiamo scrivere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (z - a)^n \quad .$$

Dalle considerazioni sopra svolte, segue che la serie converge assolutamente e uniformemente per $|z - a| \leq \rho R_1$, con $R_1 < R$. Ma R_1 e ρ sono arbitrari purché soddisfino le condizioni $R_1 < R$ e $0 < \rho < 1$. Si conclude che la serie converge assolutamente per ogni z tale che sia $|z - a| < R$ e uniformemente rispetto agli z tali che $|z - a| \leq \rho R$ con $0 < \rho < 1$. \square

Ne segue che una funzione olomorfa $f(z)$ può essere rappresentata dalla somma di una serie di potenze in $(z - a)$ in un intorno di ogni punto interno al suo dominio di olomorfismo D . La serie converge ed ha per somma la funzione all'interno del cerchio di centro a avente il raggio massimo compatibile con il fatto che i punti interni al cerchio siano pure interni a D . Funzioni localmente rappresentabili come somma di una serie di potenze sono dette *analitiche*. La teoria di tali funzioni è stata studiata dal matematico tedesco Weierstraß.

Il teorema appena dimostrato della sviluppabilità in serie delle funzioni olomorfe permette l'unificazione della teoria di Cauchy delle funzioni olomorfe con quella di Weierstraß delle funzioni analitiche. Infatti è già noto che le funzioni analitiche sono derivabili in senso complesso all'interno del loro cerchio di convergenza. Mentre ora abbiamo dimostrato, come conseguenza dei teoremi di Cauchy sulle derivate, che le funzioni olomorfe sono analitiche.

Qualora la funzione $f(z)$ sia olomorfa in un dominio non semplicemente connesso, il comportamento locale della funzione sarà bene illustrato utilizzando la sua sviluppabilità in serie detta di Laurent. Vale il seguente teorema

Teorema 1.7.2 (Sviluppabilità in serie di Laurent). *Se $f(z)$ è olomorfa nella corona*

$$0 \leq R_1 < |z - a| < R_2 \leq \infty \quad ,$$

allora si ha

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \quad \text{con } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \quad , \quad (1.39)$$

dove Γ è un cerchio di centro a e raggio r , $R_1 < r < R_2$. La serie converge assolutamente nella corona circolare.

Dimostrazione: Prendiamo i seguenti numeri, rappresentanti raggi di cerchi concentrici, $R_1 < R_3 < R_5 < R_6 < R_4 < R_2$. Se $R_5 \leq |z-a| \leq R_6$ e indichiamo con Γ_1 il cerchio d'equazione $|\xi-a| = R_3$ e con Γ_2 il cerchio $|\xi-a| = R_4$, allora la formula di Cauchy per un dominio non semplicemente connesso ci dà:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi \quad .$$

Il primo integrale definisce una certa funzione $f_2(z)$ all'interno di Γ_2 . Per questa, come si è visto, è

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \quad .$$

Per il secondo integrale si ha invece

$$-\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(z-a) - (\xi-a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^n \quad .$$

La serie converge assolutamente e uniformemente per $|\xi-a| = R_3$ e $|z-a| \geq R_5$. Si deduce allora che vale, integrando a termine a termine:

$$-f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (z-a)^{-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\xi) (\xi-a)^{n-1} d\xi \quad .$$

Ma gli integrali che intervengono nel calcolo di $f_2(z)$ e $-f_1(z)$ sono indipendenti dal cammino d'integrazione, purché sia $R_1 < |\xi-a| < R_2$. Inoltre è $f(z) = f_2(z) - f_1(z)$; allora

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} (z-a)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \quad .$$

La serie converge assolutamente e uniformemente per $R_5 \leq |z-a| \leq R_6$ se $R_1 < R_5 < R_6 < R_2$. Perciò converge assolutamente in $R_1 < |z-a| < R_2$ per l'arbitrarietà di R_5 e R_6 . \square

La parte comprendente potenze negative di $z-a$ si dice *principale o singolare*. Si dice *regolare* quella che contiene le potenze positive o nulle di $z-a$.

1.8 Singolarità e teorema di Liouville.

Si è dimostrato che una funzione olomorfa $f(z)$ in una regione anulare $0 \leq R_1 < |z - a| < R_2 \leq \infty$, è sviluppabile in serie di Laurent. In particolare, se $R_1 = 0$, il punto $z = a$ si dice una *singolarità isolata* della $f(z)$. Se $R_2 = \infty$, allora $z = \infty$ si dice singolarità isolata. In base alla natura della componente singolare (o principale) della serie di Laurent, si può dare una classificazione delle singolarità di una funzione olomorfa.

Supponiamo dunque che sia $R_1 = 0$. Allora la serie di Laurent converge per $0 < |z - a| < R_2$. Consideriamo i vari casi possibili

(a) Lo sviluppo di Laurent non contiene potenze negative. Allora vale

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \text{ per } 0 < |z - a| < R_2.$$

Quando $z \rightarrow a$, si ha $f(z) \rightarrow a_0$. Se definiamo $f(a) = a_0$, otteniamo una funzione continua anche in $z = a$. Si dice allora che $f(z)$ ha in $z = a$ una *singolarità eliminabile*.

(b) Vi sia un numero finito di potenze negative. Cioè $a_{-n} = 0$ per $n > m$, ma $a_{-m} \neq 0$.

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - a)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \text{ per } 0 < |z - a| < R_2.$$

Il punto $z = a$ si dirà in questo caso un *polo di ordine* (o *molteplicità*) m . Il polinomio di grado m in $(z - a)^{-1}$ si dice la *parte principale* di $f(z)$ in $z = a$. È immediato riconoscere che $(z - a)^m \cdot f(z)$ ha una singolarità eliminabile per $z = a$. Infatti

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = a_{-m} \neq 0 \quad .$$

Possiamo allora definire un polo proprio grazie a questa proprietà.

Definizione 1.8.1 Una funzione $f(z)$ olomorfa in $0 < |z - a| < R_2$ ha in $z = a$ un polo se esiste un intero p tale che $(z - a)^p f(z)$ abbia una singolarità eliminabile in $z = a$. Il minimo valore ammissibile per p è l'ordine del polo.

(c) Infine si possono avere infinite potenze negative. Si dice in questo caso che $f(z)$ ha una *singolarità essenziale* in $z = a$.

Il comportamento di una funzione in una singolarità essenziale è completamente diverso da quelli finora considerati. Infatti, mentre in un polo si ha $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$, e quindi in un certo senso

si può assegnare valore ∞ a una funzione in un polo, invece non è possibile pensare di assegnare alcun valore alla funzione in una singolarità essenziale. Infatti un noto e importante teorema (il Teorema di Picard, 1880) afferma che:

In ogni intorno di una singolarità essenziale $z = a$ di $f(z)$, per ogni $c \in \mathbb{C}$, con l'eccezione al più di un valore di c , l'equazione $f(z) = c$ ha infinite soluzioni.

Per esempio, non è difficile provare che in ogni intorno dello zero, per ogni $c \neq 0, c \in \mathbb{C}$, l'equazione $e^{\frac{1}{z}} = c$ ha infinite soluzioni.

In $z = \infty$ le considerazioni sulle singolarità procedono in modo analogo. Se non vi sono potenze positive nello sviluppo di Laurent di $f(z)$ diremo che $z = \infty$ è una singolarità eliminabile. Se vi è un numero finito di potenze positive

$$f(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \quad ,$$

$z = \infty$ è un polo di ordine m di $f(z)$. Ciò suggerisce una definizione analoga a quella data in precedenza per un polo in $z = a$. Se vi sono infinite potenze positive, allora $z = \infty$ è una singolarità essenziale.

Trarremo ora ulteriori conseguenze dal teorema di sviluppo in serie di Taylor. Abbiamo visto che una funzione $f(z)$ si può rappresentare localmente nel suo dominio di olografismo come la somma di una serie di potenze $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, per $|z-a| < R$, con $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Poiché la funzione identicamente nulla è ovviamente olografica, concludiamo che, se una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ ha somma identicamente nulla per $|z-a| < R$, allora tutti i suoi coefficienti a_n sono nulli.

Anzi possiamo affermare di più

Teorema 1.8.1 (di Weierstraß- Principio d'identità, I forma). *Se $f(z)$ è olografica in un dominio D aperto e connesso, ed esiste una successione $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di punti di D che ha ivi almeno un punto d'accumulazione e si ha $f(z_n) = 0$, allora $f(z)$ è identicamente nulla in D .*

Dimostrazione: Se a è un punto d'accumulazione per l'insieme $\{z_n\}$, esiste certamente una sottosuccessione che converge ad a . Possiamo limitarci a considerare quella sottosuccessione, ridenominandola per semplicità $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dunque avremo $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Per ipotesi, esiste $R > 0$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{per } |z-a| < R \quad .$$

Ma $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$. La prima uguaglianza discende dalla continuità di $f(z)$ e dal fatto che $z_n \rightarrow a$; la seconda dal fatto che il limite della successione costante (0) è 0. Dunque $a_0 = f(a) = 0$. Si ha allora $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{n-1}$. Ora

$$a_1 = f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = 0 \quad .$$

Dunque a_0 e a_1 sono nulli. Supponiamo che non tutti i coefficienti lo siano e sia $a_n \neq 0$ quello avente indice minimo $n > 1$. Allora

$$f(z) = (z - a)^n \sum_{m=n}^{\infty} a_m (z - a)^{m-n} .$$

Il fattore $(z - a)^n$ è non nullo per $z \neq a$; inoltre, poiché

$$\lim_{z \rightarrow a} \sum_{m=n}^{\infty} a_m (z - a)^{m-n} = a_n \neq 0 ,$$

esiste un cerchio di centro a e raggio $\delta > 0$ tale che in esso sia

$$\left| \sum_{m=n}^{\infty} a_m (z - a)^{m-n} \right| > 0 .$$

Ma allora $f(z)$ nel cerchio di centro a e raggio δ non possiede alcuno zero distinto da a , contro l'ipotesi che a sia punto d'accumulazione di zeri di $f(z)$. Allora $f(z)$ deve essere identicamente nulla nel cerchio $|z - a| < R$. Ma la proprietà si estende a tutto D . Infatti diciamo

$$A = \{z \in D: f^{(n)}(z) = 0, \forall n \in \mathbf{N}\} .$$

Dimostreremo che A è non vuoto, aperto e chiuso e quindi, poiché D è connesso che $A = D$. Ovviamente $a \in A$, dunque $A \neq \emptyset$. Ora se $z \in \bar{A}$ esiste una successione (z_k) di punti di A che converge a z . Per ogni numero naturale n vale $f^{(n)}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(n)}(z_k) = 0$ e dunque $z \in A$. Cioè A è chiuso. Ma se $z_0 \in A$ quanto è stato dimostrato in precedenza fa comprendere che esiste $R_0 > 0$ tale che $f(z)$ è sviluppabile in serie con centro z_0 e raggio R_0 e che in questo disco $f(z)$ è identicamente nulla. Perciò sarà $f^{(n)}(z) = 0$ per ogni $n \geq 0$ e per ogni z tale che $|z - z_0| < R_0$; ossia A è intorno di z_0 . Per l'arbitrarietà del punto si conclude che A è aperto. Dunque $A = D$. Alternativamente si può costruire una catena finita di punti di D , $b_0 = a, b_1, \dots, b_k = b$ con $b \in D$ arbitrario, in modo tale che le seguenti condizioni siano soddisfatte: (I) Tutti i punti sono in D ; (II) b_1 sia un punto del cerchio $|z - a| < R$; poiché $f(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor in b_1 , se R_2 è il raggio di convergenza della serie, sia b_2 un punto del cerchio $|z - b_1| < R_2$; e così via. . . È possibile arrivare da a a b con un numero finito di passi; infatti il raggio di convergenza della serie di potenze in $a \in D$ è la distanza di a dalla frontiera ∂D di D . Avendo l'accortezza di scegliere i successivi punti su un cammino continuo che congiunge a con b e si mantiene a distanza finita $\geq \rho$ da ∂D , allora ogni raggio di convergenza $R \geq \rho$; poiché l'arco continuo di estremi a e b è un sottoinsieme compatto di D , un numero finito di cerchi potrà ricoprirla. I punti b_i saranno allora scelti nel modo voluto. Ora b_1 è un punto del cerchio $|z - a| < R$ dove $f(z)$ è identicamente nulla; allora $f^{(n)}(b_1) = 0$ per $n \geq 0$. Perciò $f(z)$ è identicamente nulla in $|z - b_1| < R_2$, e così via. . . Finalmente $f(b) = 0$. Per l'arbitrarietà di $b \in D$ si ha che $f(z)$ è identicamente nulla in D . \square

Come corollario si ha il seguente

Teorema 1.8.2 (Principio d'identità, II forma). *Se $f(z)$ e $g(z)$ sono due funzioni olomorfe in due domini aperti e connessi, D_1 e D_2 rispettivamente, e se in $D = D_1 \cap D_2$ esiste una successione (z_n) che ha almeno un punto d'accumulazione in D e tale che*

$$f(z_n) = g(z_n) ,$$

allora $f(z) \equiv g(z)$ in D .

$g(z)$ si dice il *prolungamento analitico* di $f(z)$ in D_2 e $f(z)$ si dice il prolungamento analitico (o *continuazione*) di $g(z)$ in D_1 . È sufficiente applicare il Teorema 1.8.1 alla funzione olomorfa $h(z) = f(z) - g(z)$. \square

Riguardo agli zeri delle funzioni olomorfe possiamo affermare quanto segue

Teorema 1.8.3 *Sia $f(z)$ olomorfa in un cerchio $|z - a| < R$ e sia $f(a) = 0$, ma $f(z)$ non sia identicamente nulla. Allora esiste un numero naturale $n \geq 1$ tale che*

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \text{ ma } f^{(n)}(a) \neq 0 \quad . \quad (1.40)$$

Inoltre esiste $0 < r < R$, tale che $f(z) \neq 0$ in $|z - a| < r$, per $z \neq a$.

Dimostrazione: Vale $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ con $a_0 = 0$. Ma non tutti gli a_n possono essere nulli, perché allora sarebbe $f(z) \equiv 0$. Perciò deve esistere un minimo numero n per il quale sia $a_{n-1} = 0$ ma $a_n \neq 0$. Inoltre, poiché a non può essere punto d'accumulazione di zeri della funzione, deve esistere un cerchio $|z - a| < r$ nel quale $z = a$ è il solo zero di $f(z)$. \square

Dal teorema precedente deduciamo la seguente definizione di *zero d'ordine n* d'una funzione olomorfa.

Definizione 1.8.2 *La funzione olomorfa $f(z)$ ha in $z = a$ uno zero di ordine o molteplicità n , se esiste una funzione $g(z)$ olomorfa in un intorno di $z = a$ e tale che $g(a) \neq 0$, per la quale è*

$$f(z) = (z - a)^n g(z) \quad . \quad (1.41)$$

Daremo ora una valutazione, ricavata dalle formule integrali di Cauchy, dei moduli delle derivate successive di una funzione olomorfa. Sia $f(z)$ olomorfa in $|z - a| < R$; posto

$$M(r, a; f) = \max_{0 \leq \vartheta \leq 2\pi} |f(a + re^{i\vartheta})|$$

con $0 < r < R$, dalla formula di Cauchy $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$, con $C = \{z : |z - a| = r\}$, si deduce la disuguaglianza

$$|f^{(n)}(a)| \leq n! \cdot r^{-n} \cdot M(r, a; f) \quad .$$

Definizione 1.8.3 *Diremo funzione intera una funzione olomorfa in tutto il piano complesso. Essa è dunque rappresentabile con una serie di potenze avente raggio di convergenza infinito oppure con un polinomio.*

Vale allora il seguente

Teorema 1.8.4 (Teorema di Liouville). *Una funzione intera e limitata è costante.*

Dimostrazione: Nelle ipotesi dette si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad ;$$

Poniamo $M(r, 0; f) = M(r, f)$. Per ipotesi esiste un numero positivo M tale che $M(r, f) \leq M$ per ogni r . Allora otteniamo che

$$|a_n| \leq r^{-n} M(r, f) \leq M \cdot r^{-n} \quad .$$

Poiché r è arbitrario, se $n > 0$, segue che il secondo membro tende a zero per r che tende all'infinito. Ma a_n non dipende da r . Perciò $a_n = 0$ per ogni $n > 0$. Cioè $f(z) \equiv a_0$, è una funzione costante. \square

Vale anche la seguente estensione del precedente teorema

Corollario 1.8.1 *Se $f(z)$ è intera e se*

$$M(r_k, f) \leq M \cdot r_k^\alpha$$

con M, α positivi assegnati, su una successione di raggi r_k che tende all'infinito per $k \rightarrow \infty$, allora $f(z)$ è un polinomio di grado non superiore ad α .

Infatti, dalle disuguaglianze stabilite nel teorema precedente, si vede che

$$|a_n| \leq M \cdot r_k^{\alpha-n}$$

e quindi, ragionando come sopra, si trova che $a_n = 0$ per $n > \alpha$. \square

1.8.1 Una prima dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra

Ricordiamo l'enunciato

Teorema 1.8.5 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado maggiore o uguale a 1 ha almeno una radice in \mathbb{C} .*

Dimostrazione: Per assurdo, supponiamo che esista un polinomio $P_n(z)$, $n \geq 1$, che sia privo di radici in \mathbb{C} . Cioè tale che $P_n(z) \neq 0$, per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora la funzione $f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$ è olomorfa su tutto \mathbb{C} , dunque è una funzione intera. Ora, se $n \geq 1$, come facilmente si vede, si ha $\lim_{z \rightarrow \infty} P_n(z) = \infty$ e quindi $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Ciò significa che dato $\varepsilon > 0$ (per esempio $\varepsilon = 1$), esiste $R > 0$, tale che se $|z| > R$ allora $|f(z)| < \varepsilon (= 1)$. Nel disco $D_R = \{z : |z| \leq R\}$ la funzione $|f(z)|$ ha un massimo (Teorema di Weierstrass). Sia $M (> 0)$ tale valore massimo. Se $K = \max(M, 1)$, si ha $|f(z)| \leq K$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dunque la funzione intera $f(z)$ è limitata e quindi costante, per il Teorema di Liouville 1.8.4. Ma allora anche $P_n(z) = \frac{1}{f(z)}$ dovrebbe essere costante, cosa palesemente falsa. \square

1.9 Il Calcolo dei residui.

Si è dimostrato che se $f(z)$ è olomorfa in un aperto che contiene la regione compresa tra due circuiti Γ e Γ' , orientati in modo concorde (tutti e due positivamente o tutti e due negativamente), allora si ha

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma'} f(z)dz \quad .$$

Supponiamo ora che $f(z)$ sia olomorfa in un dominio D fatta eccezione per una singolarità isolata in $z = a$. Se Γ e Γ' sono circuiti semplici che contengono a nel loro interno, allora vale ancora la formula suddetta. Anzi il circuito Γ' può essere ridotto a un cerchio di raggio arbitrariamente piccolo di centro a . È allora chiaro che l'integrale $\int_{\Gamma} f(z)dz$ dipende solo dal comportamento di $f(z)$ in un intorno del suo punto singolare $z = a$.

In generale il numero

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)dz \tag{1.42}$$

nel quale Γ è un qualsiasi circuito orientato positivamente tale che $f(z)$ sia olomorfa in un aperto che racchiude Γ e i suoi punti interni, fatta eccezione per il punto $z = a$, si dice il *residuo di $f(z)$ in $z = a$* . Questo numero sarà indicato con il simbolo $R(f; a)$.

Supponiamo poi che il circuito orientato positivamente Γ contenga più singolarità isolate nei punti a_1, a_2, \dots, a_n . Se $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ sono circuiti orientati positivamente tutti interni a Γ e a due a due esterni l'uno all'altro che contengono ciascuno nel suo interno un solo punto singolare, cioè $a_k \in (\Gamma_k)_i$, allora si avrà

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z)dz \quad ,$$

e quindi, poiché $\int_{\Gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \cdot R(f; a_k)$

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \cdot [R(f; a_1) + \dots + R(f; a_n)] \quad .$$

Abbiamo così dimostrato il seguente

Teorema 1.9.1 (Teorema dei residui). *Se $f(z)$ è olomorfa all'interno e su Γ , circuito orientato positivamente, eccettuati i punti a_1, a_2, \dots, a_n allora l'integrale di $f(z)$ esteso a Γ è uguale alla somma dei residui nelle singolarità interne a Γ , moltiplicato per $2\pi i$. \square*

Con la locuzione “olomorfa all'interno e su Γ intendiamo che $f(z)$ è olomorfa in un aperto contenente Γ^* , o, se si preferisce che è olomorfa in $(\Gamma)_i$ ed è continua in Γ^* , ipotesi sufficiente ad assicurare la validità del teorema integrale di Cauchy.

Poiché in un intorno di una singolarità isolata $z = a$, $f(z)$ ammette lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z - a)^n$$

e poiché $\int_{\Gamma} (z - a)^n dz = 0$ per ogni $n \neq -1$, mentre $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a} = 1$, si ha che il residuo di $f(z)$ in $z = a$ coincide con il coefficiente a_{-1} del suo sviluppo di Laurent in un intorno del punto singolare $z = a$. In particolare se $z = a$ è un polo semplice, si ha

$$R(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot f(z) \quad . \quad (1.43)$$

Se $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ e $z = a$ è uno zero semplice di $Q(z)$ allora

$$R(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{Q(z) - Q(a)} \cdot P(z) = \frac{P(a)}{Q'(a)} \quad . \quad (1.44)$$

Se $z = a$ è un polo multiplo, si potranno seguire due vie: o calcolare direttamente lo sviluppo in serie di Laurent (via in generale unica se $z = a$ è una singolarità essenziale), oppure utilizzare le seguenti considerazioni.

Se $f(z)$ ha in $z = a$ un polo d'ordine n , si ha

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - a)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

Dunque

$$(z - a)^n \cdot f(z) = a_{-n} + \dots + a_{-1}(z - a)^{n-1} + a_0(z - a)^n + a_1(z - a)^{n+1} + \dots$$

e quindi

$$R(f; a) = a_{-1} = \frac{1}{(n - 1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - a)^n \cdot f(z) \right]_{z=a} \quad . \quad (1.45)$$

Presentiamo ora alcuni esempi ed esercizi sul calcolo di integrali con il metodo dei residui.

1.9.1 ESEMPI ED ESERCIZI.

Esempio 1.9.1 *Si calcoli*

$$\oint_{|z|=3\pi} \frac{dz}{e^z - 1} .$$

La funzione integranda presenta singolarità per $e^z = 1$, cioè per $z_k = 2k\pi i$. Prenderemo in considerazione solo quelle interne al cerchio di centro l'origine e raggio 3π , cioè $z = 0$ e $z = \pm 2\pi i$. In tutti questi punti la singolarità è un polo semplice; dunque avremo:

$$R(f; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1;$$

$$R(f; \pm 2\pi i) = \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi i} \frac{z \mp 2\pi i}{e^z - 1} = 1 .$$

Perciò

$$\oint_{|z|=3\pi} \frac{dz}{e^z - 1} = 2\pi i \{R_0 + R_{2\pi i} + R_{-2\pi i}\} = 6\pi i .$$

Esempio 1.9.2 *Calcolare*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} .$$

Conviene osservare che se si pone $z = e^{i\theta}$, si ottiene per le formule d'Eulero: $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ e $\sin \theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$; l'integrale nella variabile θ che va da 0 a 2π diviene un integrale nella variabile z che percorre la circonferenza $|z| = 1$. Inoltre da $z = e^{i\theta}$ segue $dz = i \cdot e^{i\theta} d\theta = iz d\theta$. Cioè $d\theta = \frac{1}{iz} dz$. Inoltre $\sin^2 \theta = [\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})]^2 = -\frac{1}{4}(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2})$. Dunque

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz} \frac{dz}{1 - \frac{1}{4}(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2})} = -\frac{4}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{z^4 - 6z^2 + 1} .$$

Le singolarità di $f(z)$ sono date dalle soluzioni di $z^4 - 6z^2 + 1 = 0$; cioè $z^2 = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Di queste, $z = \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ sono interne alla circonferenza $|z| = 1$, le altre sono esterne. In questi punti la funzione ha poli semplici. Facilmente si calcolano i residui con le formule ricordate; $R(\pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}; f) = \frac{\sqrt{2}}{4i}$. Finalmente

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = 2\pi i \left\{ \frac{\sqrt{2}}{4i} + \frac{\sqrt{2}}{4i} \right\} = \pi\sqrt{2} .$$

Esempio 1.9.3 *Si calcoli*

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z dz}{z^2(z-1)} .$$

Si nota subito che $z = 0$ e $z = 1$ sono poli della funzione. $z = 0$ è un polo doppio, mentre $z = 1$ è polo semplice. Per calcolare il residuo in $z = 0$ si potrà procedere o calcolando lo sviluppo di Laurent della funzione integranda in un intorno del detto punto o usando la formula per i poli multipli. In questo caso calcoleremo esplicitamente lo sviluppo di Laurent della funzione in $z = 0$. Precisamente, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{z^2(z-1)} &= -\frac{e^z}{z^2(1-z)} = -\frac{1}{z^2}(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots)(1+z+z^2+z^3+\dots) \\ &= -\frac{1}{z^2}(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+z+z^2+\frac{z^3}{2!}+z^2+z^3+z^3+\dots) \\ &= -\frac{1}{z^2}[1+2z+z^2(\frac{1}{2}+2)+z^3(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+2)+\dots] = -\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}-\frac{5}{2}-\frac{8}{3}z+\dots \end{aligned}$$

Dunque $R_0 = -2$. Con facili calcoli si trova poi $R_1 = e$. Finalmente si ottiene

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z dz}{z^2(z-1)} = 2\pi i(e-2) \quad .$$

1.9.2 ESERCIZI.

Calcolare i seguenti integrali

Esercizio 1.9.1

$$\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z(z^2-1)} \quad (= 0)$$

Esercizio 1.9.2

$$\oint_{|z|=6} \frac{dz}{1-\cos z} \quad (= 0)$$

Esercizio 1.9.3

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{\log z dz}{(z-2)^2}, \text{ con } -\pi < \Im \log z < \pi \quad (= \pi i)$$

Esercizio 1.9.4

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{5+4\cos \theta} \quad (= \frac{\pi}{6})$$

Esercizio 1.9.5

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-1)(z-3)^2} \quad (= \frac{5}{18}\pi i)$$

Qui Γ è il rettangolo di vertici $\pm 2 \pm 2i$.

1.9.3 Integrali fra limiti infiniti.

L'applicazione del calcolo dei residui alla valutazione di integrali definiti fu un problema al quale Cauchy dedicò moltissima attenzione e in successive memorie escogitò molti metodi per trattare numerose classi d'integrali. Supponiamo che la funzione integranda sia una funzione razionale $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con $P(z)$ e $Q(z)$ polinomi a coefficienti complessi e $\text{gr}Q(z) \geq \text{gr}P(z) + 2$. Supponiamo poi che $Q(z)$ non abbia zeri sull'asse reale. Si voglia calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad .$$

A tale scopo costruiamo il seguente cammino d'integrazione $\Gamma_R = [-R, +R] + C_R$, dove $C_R = \{z = Re^{i\vartheta} : 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$ e supponiamo che nessuna singolarità della funzione cada su tale curva; $[-R, +R]$ è il segmento della retta reale che va da $-R$ a $+R$. Si ha allora

$$\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{\Im a_k > 0} R\left(\frac{P(z)}{Q(z)}; a_k\right),$$

dove si intende che la somma sia estesa ai residui calcolati nelle singolarità contenute in Γ_R . Poiché le uniche singolarità della funzione considerata sono un numero finito di poli, se R è sufficientemente grande la somma sarà estesa a tutte le singolarità contenute nel semipiano superiore. Valutiamo ora l'integrale esteso al semicerchio C_R . Osserviamo che esiste R_0 tale che per $R > R_0$, se $z = Re^{i\vartheta}$

$$\left| \frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} \right| \leq M \cdot R^{-2} \quad .$$

Perciò

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} iRe^{i\vartheta} d\vartheta \right| \leq MR^{-2} R\pi = \pi \frac{M}{R} \quad .$$

Questo integrale tende a 0 per R che tende all'infinito. Dunque, prendendo il limite per $R \rightarrow \infty$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\Im a_k > 0} R\left(\frac{P(z)}{Q(z)}; a_k\right) \quad . \quad (1.46)$$

In modo analogo si può dedurre che è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -2\pi i \sum_{\Im a_k < 0} R\left(\frac{P(z)}{Q(z)}; a_k\right) \quad , \quad (1.47)$$

dove si intende che la somma sia estesa ai residui delle singolarità contenute nel semipiano inferiore. Perciò, se, in particolare, i poli di $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ sono contenuti tutti nel semipiano superiore o tutti nel semipiano inferiore, si può subito dedurre che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 0 \quad .$$

Lo stesso metodo si può utilizzare per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, se $|f(Re^{i\vartheta})| \leq MR^{-k}$, con $k > 1$, per $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

Un metodo analogo a quello sopra descritto si può applicare anche a integrali del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx \quad ,$$

con $a > 0$ reale. In generale, si intende che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$ indichi il $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{iax} f(x) dx$. Dunque, se $f(x)$ non è assolutamente integrabile su tutta la retta, più correttamente questo integrale si dirà la parte principale o valore principale secondo Cauchy dell'integrale stesso (si veda il paragrafo 1.10). Si farà uso in questo caso del seguente

Lemma 1.9.1 (di Jordan). *Sia C_R una semicirconferenza del piano superiore, come nelle considerazioni precedenti. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa nel semipiano superiore tranne che per un numero finito di singolarità isolate ed esista R_0 tale che per $R > R_0$, se $z = Re^{i\vartheta}$ si abbia $|f(Re^{i\vartheta})| \leq MR^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, e sia $a > 0$. Allora*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0 \quad . \quad (1.48)$$

Dimostrazione: Se $R > R_0$, si ha, per ipotesi, $|f(Re^{i\vartheta})| \leq MR^{-\alpha}$. Dunque, per il modulo dell'integrale esteso a C_R , si ottiene

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi e^{iaR(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} i R e^{i\vartheta} f(Re^{i\vartheta}) d\vartheta \right| &\leq MR^{1-\alpha} \int_0^\pi e^{-aR \sin \vartheta} d\vartheta = \\ &2MR^{1-\alpha} \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \vartheta} d\vartheta. \end{aligned}$$

Si osserva facilmente che la funzione $\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$ è decrescente nell'intervallo da 0 a $\pi/2$. Infatti $\frac{d}{d\vartheta} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = \frac{\cos \vartheta}{\vartheta^2} \cdot (\vartheta - \tan \vartheta) < 0$ nel detto intervallo. Vale allora in $[0, \pi/2]$ $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \leq 1$, e quindi nello stesso intervallo, $\frac{2}{\pi} \vartheta \leq \sin \vartheta \leq \vartheta$. Allora avremo

$$\int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \vartheta} d\vartheta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi} \vartheta} d\vartheta \leq \frac{\pi}{2aR} (1 - e^{-aR}) \quad .$$

Infine

$$\left| \int_{\Gamma} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \frac{M\pi}{a} R^{-\alpha} (1 - e^{-aR}) \quad .$$

La suddetta maggiorazione tende a zero per $R \rightarrow \infty$ se $a > 0$ e $\alpha > 0$. \square

1.9.4 Il residuo all'infinito.

Supponiamo che la funzione $f(z)$ sia olomorfa in tutto il piano complesso tranne che in un numero finito di punti di singolarità isolata. Sia inoltre ∞ punto regolare o una singolarità isolata per la funzione. Esiste certamente in \mathbb{C} un cerchio C_R , positivamente orientato, di raggio R sufficientemente grande che contiene tutte le singolarità di $f(z)$ al finito. Dunque sarà:

$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_k R(f; a_k) \quad .$$

D'altra parte, se C_R viene percorso in senso negativo (orario) esso è un circuito positivamente orientato intorno al punto ∞ . Il teorema dei residui fornisce dunque:

$$-2\pi i \sum_k R(f; a_k) = \int_{-C_R} f(z) dz = 2\pi i R_\infty \quad .$$

Concludiamo allora che la somma di tutti i residui di $f(z)$, compreso quello all'infinito, è nulla.

$$\sum_k R(f; a_k) + R_\infty = 0 \quad .$$

Si osservi che R_∞ non è nullo anche quando $f(z)$ è regolare all'infinito. Infatti, in questo caso, si ha

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

Il residuo $R_\infty = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_R} f(z) dz$ si può così calcolare. Posto $w = \frac{1}{z}$, si ha

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = a_0 + a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \dots, \quad \text{e} \quad dz = -\frac{dw}{w^2} \quad .$$

Notiamo che se z percorre il cammino $-C_R$ in senso positivo intorno a ∞ , w percorre il cammino $C_{\frac{1}{R}}$ anch'esso in senso positivo intorno a $w = 0$. Dunque

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-C_R} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\frac{1}{R}}} g(w) \frac{dw}{w^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\frac{1}{R}}} \frac{dw}{w^2} (a_0 + a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \dots) = -a_{-1}. \quad (1.49)$$

Dunque il residuo all'infinito è dato da $R_\infty = -a_{-1}$. In particolare si ha $\int_C f(z) dz = 0$ se C racchiude tutti i punti singolari al finito e il coefficiente a_{-1} dello sviluppo di Laurent di $f(z)$ all'infinito è nullo.

1.9.5 ALTRI ESEMPI ED ESERCIZI.

Esempio 1.9.4 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx \quad .$$

Secondo quanto esposto nel paragrafo **1.9.3** il valore dell'integrale è $2\pi i$ volte la somma dei residui che stanno nel semipiano superiore della funzione. Ora $z^4 = -1$ ha le seguenti soluzioni $z = \varepsilon_k = e^{(2k+1)i\pi/4}$, con $k = 0, 1, 2, 3$. Di questi $\varepsilon_0 = e^{i\pi/4} = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ e $\varepsilon_1 = e^{3i\pi/4} = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ stanno nel piano superiore. Dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \cdot [R(f; \varepsilon_0) + R(f; \varepsilon_1)] \quad .$$

Ma, tenendo presente che le singolarità sono poli semplici, si ha

$$R(f; \varepsilon_0) = \frac{P(\varepsilon_0)}{Q'(\varepsilon_0)} = \frac{\varepsilon_0^2}{4\varepsilon_0^3} = \frac{1}{4\varepsilon_0} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \quad .$$

Analogamente $R(f; \varepsilon_1) = \frac{1}{4\varepsilon_1} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$. Finalmente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \cdot \left[\frac{1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad .$$

Esempio 1.9.5 *Calcolare*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}, \quad n \geq 2.$$

Convieni, in questo caso, considerare un cammino nel piano complesso che contenga una sola singolarità della funzione. Tale cammino dipende da n . Poiché i poli di $f(z)$ sono dati dalle soluzioni di $z^n + 1 = 0$, cioè sono le radici n -esime di -1 , che sono $z_k = e^{i(\pi/n + 2\pi k/n)}$ con $k = 0, 1, \dots, (n-1)$, il cammino Γ_n che considereremo è il seguente: $\Gamma_n = [0, R] + C_{R,n} + e^{i2\pi/n} \cdot [R, 0]$, dove $e^{i2\pi/n} \cdot [R, 0]$ indica il tratto di segmento che congiunge l'origine al punto $Re^{i2\pi/n}$, orientato dal punto stesso verso l'origine. Questo cammino contiene al suo interno il solo polo semplice di $f(z)$ in $z = e^{i\pi/n}$. Il residuo in tale punto, essendo la funzione del tipo $\frac{1}{Q(z)}$, vale

$$R(f; e^{i\pi/n}) = \frac{1}{Q'(e^{i\pi/n})} = \frac{1}{ne^{i\frac{n-1}{n}\pi}}$$

Dunque

$$\int_{\Gamma_n} \frac{dz}{1+z^n} = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_{C_{R,n}} \frac{dz}{1+z^n} + \int_R^0 \frac{d\rho e^{i2\pi/n}}{1+\rho^n e^{2\pi i}} = \frac{2\pi i}{n} \cdot e^{-i\frac{n-1}{n}\pi}$$

Ora

$$\left| \int_{C_{R,n}} \frac{dz}{1+z^n} \right| \leq \frac{2\pi R}{n(R^n - 1)},$$

e dunque tende a zero per $R \rightarrow \infty$. Prendendo il limite per $R \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} - e^{i2\pi/n} \int_0^\infty \frac{d\rho}{1+\rho^n} = (1 - e^{i2\pi/n}) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{2\pi i}{n} \cdot e^{-i\frac{n-1}{n}\pi}.$$

Facendo alcuni semplici calcoli e ricordando le formule d'Eulero per il seno, si trova finalmente

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \quad .$$

Esempio 1.9.6 *Calcolare*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} \quad .$$

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)}$$

ha in $z = i$ un polo doppio e in $z = 2i$ un polo semplice. I residui valgono

$$R(f; 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{(z - 2i)}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z + 2i)} = \frac{-i}{36} \quad ,$$

$$R(f; i) = \frac{d}{dz} \left[\frac{(z - i)^2}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} \right]_{z=i} = \frac{-i}{36} \quad .$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} = \pi i \left(\frac{-i}{18} \right) = \frac{\pi}{18} \quad .$$

1.9.6 ESERCIZI.

Calcolare i seguenti integrali

Esercizio 1.9.6

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad , \quad (a, b > 0, a \neq b) \quad \left(= \frac{\pi}{2ab(a+b)} \right)$$

Esercizio 1.9.7

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} \quad \left(= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right)$$

Esercizio 1.9.8

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} \quad \left(= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$$

Esempio 1.9.7 *Si calcoli l'integrale*³

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad .$$

³Calcolato da Giorgio Bidone (1781-1839) in Mem. Acc. Sc. Torino (1811-12), pag. 279, e da Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) in "Théorie de la Chaleur (1822), Paris.

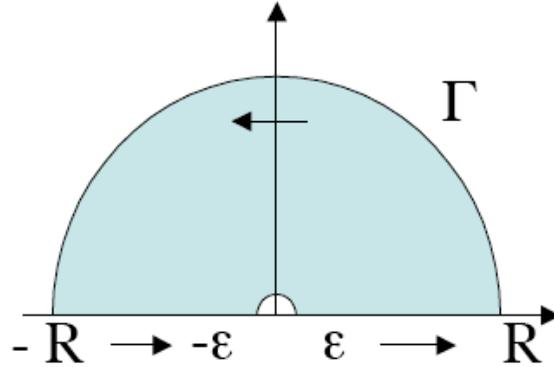


Figura 1.6: Cammino d'integrazione

Consideriamo il seguente integrale

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz ,$$

dove Γ è il seguente cammino d'integrazione: l'asse reale da ε a $+R$, il semicerchio del piano superiore di centro l'origine e raggio R , C_R , l'asse reale da $-R$ a $-\varepsilon$ e il semicerchio del piano superiore di centro l'origine e raggio ε orientato negativamente $-C_\varepsilon$. Si veda la Figura 1.6. $\Gamma = [\varepsilon, R] + C_R + [-R, -\varepsilon] + (-C_\varepsilon)$. Evidentemente, non essendoci singolarità interne al circuito, si ha

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Cioè

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Per il lemma di Jordan **1.9.1** si ha che $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$. Ne segue che

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Poiché $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, si trova

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2i \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz .$$

D'altra parte

$$\int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-C_\varepsilon} \frac{dz}{z} + \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz.$$

Ma lungo C_ε , $z = \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [\pi, 0]$. Poiché $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz} - 1}{z} = i$, esistono una costante positiva M e un numero positivo ε_0 tali che se $\varepsilon < \varepsilon_0$ si ha $|\frac{e^{iz} - 1}{z}| \leq M$. Dunque

$$\left| \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz \right| \leq M\varepsilon\pi \quad .$$

Finalmente si trova

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_\pi^0 i d\theta + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = -i\pi + 0 = -i\pi.$$

Dunque

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = -(-i\pi) = i\pi.$$

E finalmente

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Esercizio 1.9.9 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx \quad \left(= \frac{\pi}{12} \right)$$

Esercizio 1.9.10 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0) \quad \left(= \frac{\pi e^{-a}}{a} \right)$$

Esercizio 1.9.11 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0) \quad \left(= \pi e^{-a} \right)$$

Esercizio 1.9.12 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx \quad \left(= \frac{\pi}{8a^3} \right)$$

Esercizio 1.9.13 *Calcolare*

$$\int_0^\pi \frac{\cos \vartheta}{3 + \cos \vartheta} d\vartheta \quad \left(= -\frac{3\sqrt{2} - 4}{4} \pi \right) \quad .$$

1.9.7 Residui e decomposizione di funzioni razionali in fratti semplici

Data una funzione razionale $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, dove P e Q sono polinomi privi di radici comuni, è noto un metodo algebrico per sviluppare la funzione in fratti semplici. Vogliamo qui esporre un metodo che si basa sul calcolo dei residui per ottenere lo sviluppo in fratti semplici. Se $grP(z) \geq grQ(z)$, si procede a dividere P per Q , ottenendo quoziente e resto: $\frac{P(z)}{Q(z)} = Q_1(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}$, con $grR(z) < grQ(z)$. Supponiamo di essere nella situazione $grP(z) < grQ(z)$ (dopo avere eventualmente operato la divisione). Allora, se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sono le radici di $Q(z)$, di molteplicità rispettivamente m_1, m_2, \dots, m_k , si ha

$$f(z) = \frac{A_{11}}{z - \alpha_1} + \frac{A_{12}}{(z - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(z - \alpha_1)^{m_1}} + \frac{A_{21}}{z - \alpha_2} + \dots + \frac{A_{2m_2}}{(z - \alpha_2)^{m_2}} + \dots + \frac{A_{k1}}{z - \alpha_k} + \dots + \frac{A_{km_k}}{(z - \alpha_k)^{m_k}}. \quad (1.50)$$

Conviene distinguere vari casi.

A) Se tutte le radici sono semplici e $grQ(z) = n$, allora

$$f(z) = \frac{A_1}{z - \alpha_1} + \frac{A_2}{z - \alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{z - \alpha_n}$$

e quindi A_1, A_2, \dots, A_n sono i residui di $f(z)$ in $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ rispettivamente.

Esempio 1.9.8 *Sia*

$$f(z) = \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{z(z^2 - 4)(z^2 - 1)}.$$

Se ne dia la decomposizione in fratti semplici.

Svolgimento: I poli di $f(z)$, tutti semplici, sono: $-2, -1, 0, 1, 2$ e $grP < grQ$.

$$\begin{aligned} A_1 &= R(f, -2) = \lim_{z \rightarrow -2} [(z + 2)f(z)]|_{z=-2} = 1; \\ A_2 &= R(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} [(z + 1)f(z)]|_{z=-1} = 2; \\ A_3 &= R(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} [zf(z)]|_{z=0} = 3; \\ A_4 &= R(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1)f(z)]|_{z=1} = 4; \\ A_5 &= R(f, 2) = \lim_{z \rightarrow 2} [(z - 2)f(z)]|_{z=2} = 5. \end{aligned}$$

Allora

$$f(z) = \frac{1}{z + 2} + \frac{2}{z + 1} + \frac{3}{z} + \frac{4}{z - 1} + \frac{5}{z - 2}.$$

□

B) Se α è un polo di molteplicità m , allora

$$f(z) = \frac{A_1}{(z - \alpha)} + \frac{A_2}{(z - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_m}{(z - \alpha)^m} + R(z),$$

e quindi

$$(z - \alpha)^m f(z) = A_m + A_{m-1}(z - \alpha) + \dots + A_1(z - \alpha)^{m-1} + (z - \alpha)^m R(z).$$

Da ciò si deduce

$$\begin{aligned} A_m &= (z - \alpha)^m f(z)|_{z=\alpha} \\ A_{m-1} &= \frac{d}{dz} ((z - \alpha)^m f(z))|_{z=\alpha} \\ A_{m-2} &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} ((z - \alpha)^m f(z))|_{z=\alpha} \\ &\dots \\ A_1 &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} ((z - \alpha)^m f(z))|_{z=\alpha}. \end{aligned}$$

Esempio 1.9.9 Si decomponga in fratti semplici la frazione $f(z) = \frac{z^5+1}{(z-1)^5}$.

Svolgimento: Poiché numeratore e denominatore hanno gradi uguali, si dovrà preliminarmente eseguire la divisione, che dà come quoziente 1. Dunque, poiché 1 è polo di molteplicità 5 della funzione, si ha

$$f(z) = 1 + \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{(z-1)^2} + \dots + \frac{A_5}{(z-1)^5}.$$

Con la precedente regola si trova

$$\begin{aligned} A_5 &= (z-1)^m f(z)|_{z=1} = (z^5+1)|_{z=1} = 2 \\ A_4 &= \frac{d}{dz} ((z-1)^5 f(z))|_{z=1} = 5z^4|_{z=1} = 5 \\ A_3 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} ((z-1)^5 f(z))|_{z=1} = \frac{20z^3}{2!}|_{z=1} = 10 \\ A_2 &= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} ((z-1)^5 f(z))|_{z=1} = \frac{60z^2}{3!}|_{z=1} = 10 \\ A_1 &= \frac{1}{4!} \frac{d^4}{dz^4} ((z-1)^5 f(z))|_{z=1} = \frac{120z}{4!}|_{z=1} = 5. \end{aligned}$$

□

Si applichi la stessa tecnica anche quando si è in presenza di funzioni razionali con coefficienti reali e quindi in presenza di poli complessi coniugati (se non reali, come negli esercizi precedenti). Per esempio, la funzione $f(z) = \frac{10z-22}{z^2+4z+13}$ che ha come poli semplici $\alpha_1 = -2-3i$ e $\alpha_2 = -2+3i$, ha come residui, rispettivamente, $R_1 = 5-7i$ e $R_2 = 5+7i$. Dunque

$$f(z) = \frac{5-7i}{z+2+3i} + \frac{5+7i}{z+2-3i}.$$

1.10 Valore principale dell'integrale.

È ben noto che se la funzione integranda, reale di variabile reale, ha in $x = x_0$ una singolarità, allora si definisce l'integrale generalizzato di $f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ come segue

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0 + \eta}^b f(x) dx \quad .$$

Può accadere che tale limite non esista, ma che esista invece il limite seguente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right\} \quad .$$

In questo caso si dice che tale limite è *il valore principale dell'integrale secondo Cauchy*, e si scrive

$$\text{P} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right\} \quad .$$

Analogamente si definisce il valore principale secondo Cauchy dell'integrale di $f(x)$ su tutta la retta reale, come segue

$$\text{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx \quad ,$$

quando la funzione $f(x)$ sia integrabile su ogni intervallo limitato della retta reale.

Le stesse considerazioni si possono ripetere nel campo complesso. Se consideriamo un integrale del tipo $\int_{\Gamma} f(z) dz$ e la funzione $f(z)$ ha una singolarità in $z_0 \in \Gamma$, diremo valore principale dell'integrale il valore ottenuto con il seguente procedimento. Escluderemo z_0 dal cammino d'integrazione, togliendo a Γ un arco $\overline{z_1 z_2}$, con $|z_1 - z_0| = |z_2 - z_0| = \rho$. Se esiste il limite per $\rho \rightarrow 0$, esso si dice il valore principale secondo Cauchy dell'integrale.

$$\text{P} \int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \overline{z_1 z_2}} f(z) dz \quad . \quad (1.51)$$

Consideriamo come caso particolare la formula di Cauchy. Sappiamo che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} 0 & : z \in (\Gamma)_e \\ f(z) & : z \in (\Gamma)_i \end{cases} \quad ,$$

mentre nulla si può dire se $z \in \Gamma$.

In questo caso il valore principale dell'integrale ha un preciso significato, se il cammino d'integrazione Γ è sufficientemente regolare. Supponiamo dunque che Γ abbia solo un numero finito di punti angolosi. Vogliamo calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \text{P} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad ,$$

quando $z \in \Gamma$. Sia C_ρ un cerchietto di centro z e raggio ρ e sia C_1 la parte di $C_\rho \subset (\Gamma)_i$. Se $\Gamma_\rho = \Gamma \setminus \overline{z_1 z_2} + C_1$, si ha

$$\int_{\Gamma \setminus \overline{z_1 z_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 \quad .$$

Infatti non ci sono singolarità all'interno di Γ_ρ . Dunque

$$\int_{\Gamma \setminus \overline{z_1 z_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = - \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad .$$

E finalmente

$$\frac{1}{2\pi i} \mathbf{P} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \overline{z_1 z_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = - \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi .$$

Ma vale

$$\int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \int_{C_1} \frac{1}{\xi - z} d\xi + \int_{C_1} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \quad .$$

Per la derivabilità di f in z il modulo della funzione integranda nel secondo integrale è limitato, mentre la lunghezza del cammino tende a zero per $\rho \rightarrow 0$. Dunque il limite del secondo integrale è nullo per $\rho \rightarrow 0$. Per valutare il primo integrale si può osservare che $z_k = z + \rho e^{i\vartheta_k(\rho)}$, $k = 1, 2$, e dunque

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{1}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\vartheta_1(\rho)}^{\vartheta_2(\rho)} id\vartheta = \frac{\vartheta_2(\rho) - \vartheta_1(\rho)}{2\pi} \quad .$$

Prendendo il limite per $\rho \rightarrow 0$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \mathbf{P} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \frac{\omega(z)}{2\pi} \quad , \quad (1.52)$$

dove $\omega(z) = \pi - \alpha$ è il supplemento del salto angolare subito dalla tangente al cammino Γ nel punto z . Se il punto z non è un punto angoloso, allora $\alpha = 0$ e quindi $\omega(z) = \pi$.

1.10.1 Esercizi

Esercizio 1.10.1 *Calcolare*

$$\frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-a)}, \Im(a) \neq 0 \quad .$$

Isoliamo l'origine con un cerchietto di raggio ε e consideriamo il cammino d'integrazione Γ comprendente un semicerchio nel piano superiore di raggio R , uno di raggio ε e i tratti dell'asse reale da $-R$ a $-\varepsilon$ e da ε a R , come quello della figura 1.6. Allora

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-a)} = \begin{cases} \frac{2i}{a} & : \text{ se } \Im(a) > 0 \\ 0 & : \text{ se } \Im(a) < 0 \end{cases} \quad .$$

Prendendo il limite per $R \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-a)} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{x(x-a)} \right\} + \frac{1}{\pi} \int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z(z-a)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2i}{a} & : \text{ se } \Im(a) > 0 \\ 0 & : \text{ se } \Im(a) < 0 \end{cases} .$$

Valutiamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z(z-a)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{i d\vartheta}{\varepsilon e^{i\vartheta} - a} = i \frac{\pi}{a} .$$

Finalmente, prendendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, si trova

$$\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-a)} = \begin{cases} \frac{i}{a} & : \text{ se } \Im(a) > 0 \\ -\frac{i}{a} & : \text{ se } \Im(a) < 0 \end{cases} .$$

Esercizio 1.10.2 *Calcolare*

$$\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2(x-t)}, \quad \Im(a) \neq 0 .$$

1.11 L'indicatore logaritmico.

Prima di addentrarci nel teorema dell'indicatore logaritmico presenteremo brevemente il *logaritmo* nel piano complesso.

Dato un numero complesso $z = \rho e^{i\vartheta}$ diremo *logaritmo* di z ($\log z$) ogni numero complesso $w = u + iv$ tale che

$$e^{u+iv} = z = \rho e^{i\vartheta} .$$

È allora evidente che affinché valga la precedente uguaglianza deve essere $e^u = \rho$, cioè $u = \log \rho = \log |z|$ e $v = \vartheta + 2k\pi$. Dunque ogni numero complesso $z \neq 0$ ha infiniti logaritmi

$$\log z = \log |z| + i(\vartheta + 2k\pi) ,$$

dove ϑ è un argomento di z ; dunque non si può parlare nel piano complesso di una *funzione* logaritmo. Tuttavia, se per l'argomento di z si sceglie un numero compreso in un assegnato intervallo di ampiezza 2π , si può isolare un solo argomento di z . Le scelte più comuni sono $-\pi < \vartheta = \arg(z) \leq \pi$ o $0 \leq \vartheta = \arg(z) < 2\pi$; in questo caso si dice che il valore scelto dell'argomento è il *valore principale dell'argomento*. Le due scelte corrispondono a “tagliare il piano complesso lungo il semiasse reale negativo, o, rispettivamente, lungo il semiasse reale positivo. In realtà ogni “taglio nel piano complesso che vada dall'origine al punto all'infinito è atto a rendere univoco il logaritmo. Cioè a farne una funzione. Diremo allora *valore principale del logaritmo* e scriveremo $\text{Log} z$ la funzione che ha parte reale data da $\log(|z|)$ e parte immaginaria $i\vartheta$, dove ϑ è il valore principale dell'argomento di z , scelto in uno dei modi suddetti.

Consideriamo una funzione $f(z)$ che sia olomorfa all'interno di un laccio Γ , esclusione fatta per un numero finito di punti nei quali abbia poli isolati; inoltre la funzione possieda un numero finito di zeri isolati. Nessun polo o zero di $f(z)$ cada sul cammino Γ . Si ha allora

Teorema 1.11.1 *Sotto le condizioni specificate, vale*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P \quad , \quad (1.53)$$

dove Z è il numero degli zeri, contati con la loro molteplicità, e P è il numero dei poli, contati con la loro molteplicità, interni a Γ .

Dimostrazione: Se $f(z)$ ha in a_j un polo o uno zero isolato di molteplicità m_j si potrà rappresentare come segue

$$f(z) = (z - a_j)^{m_j} f_j(z) \quad ,$$

dove $f_j(z)$ è una funzione olomorfa in un intorno di a_j e $f_j(a_j) \neq 0$. Sarà $m_j > 0$ se a_j è uno zero, $m_j < 0$ se a_j è un polo. Si avrà

$$f'(z) = m_j(z - a_j)^{m_j-1} f_j(z) + (z - a_j)^{m_j} f'_j(z) \quad .$$

E quindi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_j}{z - a_j} + \frac{f'_j(z)}{f_j(z)} \quad .$$

La funzione $\frac{f'_j(z)}{f_j(z)}$ è olomorfa in un intorno di a_j e quindi il residuo di $\frac{f'(z)}{f(z)}$ in a_j è m_j . Ne segue che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j m_j = Z - P \quad .$$

□

Possiamo scegliere, come caso particolare, $f(z) = P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $n \geq 1$. Se il cammino Γ è un cerchio di centro l'origine e raggio sufficientemente grande, esso contiene tutti gli zeri di $P_n(z)$ (sono al più n). Infatti è $\lim_{z \rightarrow \infty} |P_n(z)| = \infty$. Se percorriamo il cammino Γ in senso antiorario, percorriamo in senso orario un cammino intorno a $z = \infty$, che è un polo d'ordine n per la funzione. Si ottiene dunque

$$\frac{P'_n(z)}{P_n(z)} = \frac{n}{z} + \dots$$

Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} dz = -(-n) = n \quad .$$

Ma Γ racchiude tutti gli zeri di $P_n(z)$. E poiché $P_n(z)$ non ha poli all'interno di Γ , possiamo interpretare il risultato ottenuto dicendo che ogni polinomio di grado n ha esattamente n radici se contate con il loro ordine di molteplicità. Abbiamo ottenuto un'altra volta la dimostrazione del **teorema fondamentale dell'algebra**.

Una funzione olomorfa in un dominio aperto D tranne che per poli contenuti in D si dice talvolta una funzione *meromorfa*.

Il precedente teorema dell'indicatore logaritmico può anche porsi sotto la forma detta del **Principio dell'argomento**. Si osservi che è

$$\int_a^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \log f(z) - \log f(a) \quad ,$$

se l'integrale è esteso a un cammino semplice che congiunge a con z (per es. un segmento di retta di estremi a e z) e non ci sono né singolarità né zeri di $f(z)$ lungo tale cammino. Se l'integrale è esteso a un cammino semplice chiuso, $|f(z)|$ dopo un giro completo assume nuovamente il valore iniziale, mentre l'argomento, in generale, sarà mutato. Se indichiamo tale variazione con $\Delta_\Gamma \arg f(z)$, si ha:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z)$$

e quindi

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = 2\pi(Z - P) \quad . \quad (1.54)$$

□

In realtà abbiamo dato per scontato che si possa definire il $\log f(z)$ lungo Γ il che non è facile né immediato da riconoscere “a priori”. Però si può procedere come segue: se $a \in \Gamma(I)$, dove $I = [0, 1]$, poiché non ci sono né poli né zeri di $f(z)$ su Γ si può definire un ramo di $\log f(z)$ in una sfera aperta di centro a e raggio sufficientemente piccolo r : $B(a, r)$; basta che in tale sfera la funzione non si annulli e non abbia poli. Per ogni $a \in \Gamma(I)$, esisterà un $\varepsilon > 0$ tale che il logaritmo di $f(z)$ si possa definire in ogni $B(a, \varepsilon)$. Ora, per la compattezza del circuito e per l'uniforme continuità di $\Gamma(t)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione finita $0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ dell'intervallo I tale che $\Gamma(t) \in B(\Gamma(t_{j-1}), \varepsilon)$ per $t_{j-1} \leq t \leq t_j$. Si può definire un logaritmo in ogni sfera $B(t_j, \varepsilon)$. Infine, poiché t_j è contenuto sia nella sfera j -esima che in quella $(j-1)$ -esima si possono scegliere le determinazioni del logaritmo ℓ_1, \dots, ℓ_k in modo che sia $\ell_1(\Gamma(t_1)) = \ell_2(\Gamma(t_1))$, $\ell_2(\Gamma(t_2)) = \ell_3(\Gamma(t_2))$, \dots , $\ell_{k-1}(\Gamma(t_{k-1})) = \ell_k(\Gamma(t_{k-1}))$.

Se Γ_j è il cammino Γ ristretto a $[t_{j-1}, t_j]$, poiché $\ell'_j = \frac{f'}{f}$, si ottiene

$$\int_{\Gamma_j} \frac{f'}{f} = \ell_j(\Gamma(t_j)) - \ell_j(\Gamma(t_{j-1}))$$

per $1 \leq j \leq k$. Sommando i due membri dell'uguaglianza si ottiene finalmente

$$\int_\Gamma \frac{f'}{f} = \ell_k(a) - \ell_1(a) = 2\pi m i$$

e dunque l'argomento di $f(z)$ cambia di una quantità $2\pi m$ lungo Γ .

Diamo infine un interessante teorema dovuto a Eugène Rouché spesso utile nelle applicazioni.

Teorema 1.11.2 *Supponiamo che f con $g(z)$ e $h(z)$ soddisfino le condizione del teorema precedente e che si possa scrivere*

$$f(z) = g(z) + h(z) \quad ,$$

con $|g(z)| > |h(z)|$ sulla curva Γ . Allora si ha che la variazione dell'argomento lungo Γ di $f(z)$ è la stessa di quella di $g(z)$, e quindi che

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g \quad . \quad (1.55)$$

Dimostrazione: Vale

$$f(z) = g(z) \cdot \left\{1 + \frac{h(z)}{g(z)}\right\}.$$

Quando z si muove lungo Γ il quoziente $\frac{h(z)}{g(z)}$ ha modulo minore di 1. Dunque se

$$w(z) = \left\{1 + \frac{h(z)}{g(z)}\right\},$$

si ha $|w(z) - 1| < 1$, e quindi $|\arg(w(z))| < \frac{\pi}{2}$ poiché $w(z)$ giace nel semipiano $\Re w(z) > 0$. Ma allora $\Delta_\Gamma \arg w(z) = 0$ e quindi $\Delta_\Gamma \arg f(z) = \Delta_\Gamma \arg g(z)$ e quindi anche $Z_f - P_f = Z_g - P_g$. \square

Più in generale si può dimostrare il seguente teorema

Teorema 1.11.3 (Glicksberg, 1976). *Siano valide le condizioni precedenti sulle funzioni f e g e si supponga che su un circuito Γ non ci siano zeri o poli delle due funzioni e che inoltre sia $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ su Γ . Allora*

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g \quad . \quad (1.56)$$

Dimostrazione. Dalle ipotesi segue che, essendo $g(z) \neq 0$ su Γ

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} + 1 \right| < \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| + 1.$$

Ciò implica che il rapporto $\frac{f(z)}{g(z)}$ non può mai assumere un valore reale $\mu \geq 0$. Infatti in questo caso si avrebbe $\mu + 1 < \mu + 1$, che è assurdo. Allora $\frac{f(z)}{g(z)}$ porta \mathbb{C} in $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ e quindi si può definire una determinazione del logaritmo per $\frac{f(z)}{g(z)}$. Dunque

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)' / \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) dz = 0,$$

ossia

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) dz = (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g) = 0.$$

\square

Osservazione 1.11.1 *Si osservi che il Teorema di Glicksberg ha come caso particolare quello di Rouché. Infatti se $|f(z)| = |g(z) + h(z)| \leq |g(z)| + |h(z)| < 2|g(z)|$, allora $Z_f - P_f = Z_{2g} - P_{2g}$. Ma*

$$Z_{2g} - P_{2g} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{2g'(z)}{2g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = Z_g - P_g.$$

Dunque $Z_f - P_f = Z_g - P_g$; cioè vale il Teorema di Rouché.

Esempio 1.11.1 Calcolare il numero degli zeri del polinomio

$$z^8 - z^6 + z^5 - 4,$$

all'interno della corona circolare $\{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < 2\}$.

Svolgimento: . Si osservi che se $|z| = 2$ si ha $|-z^6 + z^5 - 4| \leq 2^6 + 2^5 + 4 = 100 < 2^8 = 256$. Dunque all'interno del cerchio di raggio 2 il nostro polinomio ha tante radici quante ne ha il polinomio z^8 , cioè 8. Le radici nella corona circolare sono quelle presenti nel cerchio esterno meno quelle contenute nel cerchio interno. Ma se $|z| = 1$, si ha che $|z^8 - z^6 + z^5| \leq 3 < |-4|$. Cioè il polinomio considerato non ha radici all'interno del cerchio $|z| = 1$ (o meglio, ne ha tante quante il polinomio costante 4). Dunque nella corona ci sono tutti gli 8 zeri del polinomio. \square

In modo analogo a quanto visto sopra si dimostrano i seguenti teoremi

Teorema 1.11.4 Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in D tranne che per un numero finito di poli e dotata di un numero finito di zeri. Sia $g(z)$ olomorfa in D e sia Γ un circuito che non passa per gli zeri o i poli di f . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g \frac{f'}{f} dz = \sum_{k=1}^n g(z_k) n_k - \sum_{r=1}^m g(p_r) m_r,$$

dove n_k sono le molteplicità degli zeri z_k e m_r gli ordini dei poli p_r della funzione $f(z)$ all'interno di Γ .

\square

In particolare se $g(z) = z$ e $f(z)$ è olomorfa in un aperto contenente il disco chiuso $\overline{B}(a, r)$ e iniettiva nel disco allora il valore dell'inversa si può calcolare come segue se $\Omega = f(B(a, r))$, $\alpha \in \Omega$ e Γ è il cerchio $|z - a| = r$:

$$f^{-1}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z f'(z)}{f(z) - \alpha} dz .$$

1.11.1 L'indice di avvolgimento.

Finora in tutte le formule integrali stabilite abbiamo implicitamente tenuto conto che ogni curva semplice chiusa rettificabile "gira una sola volta intorno a ogni suo punto interno, e nessuna volta intorno ai suoi punti esterni. Il teorema che segue dice sostanzialmente che ogni curva rettificabile chiusa gira o s'avvolge un numero intero di volte intorno a ogni punto che non appartenga al suo sostegno.

Teorema 1.11.5 Se $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ è una curva chiusa rettificabile e $a \notin \Gamma(I)$ allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a}$$

è un numero intero.

Dimostrazione. È sufficiente considerare il caso di Γ curva liscia. In questo caso si può definire

$$g(t) = \int_0^t \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s) - a} ds \quad .$$

Allora si ottiene $g(0) = 0$ e $g(1) = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a}$. Vale inoltre

$$g'(t) = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - a} \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1 \quad .$$

Ma allora

$$\frac{d}{dt} e^{-g}(\Gamma - a) = e^{-g}[\Gamma' - \frac{\Gamma'}{\Gamma - a}(\Gamma - a)] = 0.$$

Dunque $e^{-g}(\Gamma - a)$ è costante e quindi $e^{-g(0)}(\Gamma(0) - a) = \Gamma(0) - a = e^{-g(1)}(\Gamma(1) - a)$. Poiché $\Gamma(0) = \Gamma(1)$ si deduce che $e^{-g(1)} = 1$. Ossia che $g(1) = 2\pi i k$ per qualche intero k . \square

Definizione. Il numero

$$n(\Gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a}$$

si dice il *numero d'avvolgimento* o *indice* di Γ rispetto al punto $a \notin \Gamma(I)$.

È facile riconoscere che se Γ e Δ sono due curve chiuse rettificabili con i medesimi punti iniziali e a non appartiene al sostegno delle due curve, allora

$$(a) \quad n(\Gamma; a) = -n(-\Gamma; a);$$

$$(b) \quad n(\Gamma + \Delta; a) = n(\Gamma; a) + n(\Delta; a).$$

Tenendo conto del numero d'avvolgimento il teorema integrale di Cauchy potrà allora essere formulato in modo generale come segue

Teorema 1.11.6 *Sia f una funzione olomorfa su $D \subset \mathbb{C}$. Se Γ è una curva chiusa rettificabile in D tale che $n(\Gamma; w) = 0$ per ogni $w \in \mathbb{C} \setminus D$, allora per ogni $a \in D \setminus \Gamma(I)$ si ha*

$$n(\Gamma; a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz \quad .$$

1.12 Serie di Residui.

Nel paragrafo 1.10 abbiamo definito il valore principale di un integrale su tutta la retta reale

$$\text{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx \quad ,$$

quando la funzione $f(x)$ sia integrabile su ogni intervallo limitato della retta reale. Se la funzione $f(z)$ ha un numero finito di singolarità nel semipiano superiore o inferiore, sotto opportune ipotesi, il valore principale dell'integrale è la somma dei residui nelle singolarità. Ci chiediamo se questo procedimento si possa estendere al caso in cui ci siano infinite singolarità nel semipiano superiore o inferiore. In questo caso la somma del numero finito dei residui sarà sostituita dalla loro serie.

Supponiamo dunque che $f(z)$ sia olomorfa nel semipiano $z \geq 0$ fatta eccezione per una successione di punti $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$, con $\Im(z_k) > 0$, che supporremo enumerati in modo che $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_k| \leq \dots$ e tali che $|z_k| \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$. Sia $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$ una successione di raggi diversi da tutti i valori di $|z_k|$ e divergente a $+\infty$. Sia poi Γ_k il cammino formato dal segmento $[-R_k, R_k]$ sull'asse reale e dal semicerchio C_k di raggio R_k del semipiano superiore. Sia infine n_k un intero tale che $|z_{n_k}| < R_k < |z_{n_k+1}|$. Allora per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\Gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{r=1}^{n_k} R(f; z_r) \quad ,$$

ossia

$$\int_{-R_k}^{R_k} f(x) dx = 2\pi i \sum_{r=1}^{n_k} R(f; z_r) - \int_{C_k} f(z) dz \quad .$$

Se accade che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[R_k \cdot \max_{z \in C_k} |f(z)| \right] = 0 \quad ,$$

allora il valore dell'integrale esteso al semicerchio nel semipiano superiore tende a zero. Se inoltre sappiamo che converge la serie dei residui, possiamo concludere che esiste l'integrale su \mathbb{R} in un senso che estende quello del valore principale secondo Cauchy e si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-R_k}^{R_k} f(x) dx = 2\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} R(f; z_n) \quad .$$

Dunque abbiamo dimostrato il teorema

Teorema 1.12.1 *Se $f(z)$ è olomorfa in $\Im z \geq 0$ fatta eccezione per i punti $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, con $\Im(z_k) > 0$ e $|z_k| \rightarrow \infty$, se $\sum_{n=0}^{+\infty} R(f; z_n)$ converge e se esiste una successione di raggi $R_k \rightarrow \infty$ diversi da ogni $|z_n|$ e tali che $\lim_{k \rightarrow \infty} [R_k \cdot \max_{z \in C_k} |f(z)|] = 0$, allora*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-R_k}^{R_k} f(x) dx = 2\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} R(f; z_n) \quad .$$

Analogamente si può dimostrare il teorema

Teorema 1.12.2 *Se $f(z)$ è olomorfa in $\Im z \leq 0$ fatta eccezione per i punti $z'_1, z'_2, \dots, z'_n, \dots$, con $\Im(z'_k) < 0$ e $|z'_k| \rightarrow \infty$, se $\sum_{n=0}^{+\infty} R(f; z'_n)$ converge e se esiste una successione di raggi $R_k \rightarrow \infty$*

diversi da ogni $|z'_n|$ e tali che $\lim_{k \rightarrow \infty} [R_k \cdot \max_{z \in C'_k} |f(z)|] = 0$, dove C'_k è il semicerchio con $\Im(z) \leq 0$ di raggio R_k , allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-R_k}^{R_k} f(x) dx = -2\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} R(f; z'_n) \quad .$$

Se le condizioni di entrambi i teoremi sono soddisfatte, e la stessa successione di R_k è utilizzabile nei due casi (anche togliendo la restrizione $\Im(z_k) \neq 0$, come faremo più avanti), allora l'integrale si può eliminare e trovare che la somma delle due serie dei residui è nulla. In quest'ultimo caso si può anche rinunciare alla richiesta che le singolarità abbiano parte reale non nulla. Ciò può essere utilizzato per calcolare la somma di certe serie, come mostreremo nell'esempio 1.12.2.

1.12.1 ESEMPI.

Esempio 1.12.1 Sia $f(z) = \frac{1}{(1+z^2) \cosh z}$.

Questa funzione ha poli nel semipiano superiore nei punti $z = i, \frac{\pi}{2}i, \frac{3\pi}{2}i, \frac{5\pi}{2}i, \dots$. Si prenda $R_k = k\pi, k = 1, 2, \dots$. Si può osservare che

$$|\cosh z|^2 = |\cosh(x + iy)|^2 = |\cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \sin y|^2 = \cos^2 y + \sinh^2 x \quad .$$

Si noti inoltre che per $(k - \frac{1}{4})\pi \leq y \leq k\pi$, $\cos^2 y \geq \frac{1}{2}$, mentre per $y < (k - \frac{1}{4})\pi$ e $|z| = k\pi$

$$|x| > \sqrt{k^2\pi^2 - (k - \frac{1}{4})^2\pi^2} = \pi \sqrt{\frac{1}{2}k - \frac{1}{16}} > \frac{\pi}{4}\sqrt{7} \quad ,$$

cosicché $\sinh^2 x > \frac{1}{2}$. Dunque su C_{R_k}

$$\cos^2 y + \sinh^2 x \geq \frac{1}{2} \quad .$$

Allora

$$\max_{C_{R_k}} |f(z)| \leq \frac{\sqrt{2}}{|R_k^2 - 1|} \quad ,$$

e dunque la condizione sul limite per $k \rightarrow \infty$ è soddisfatta. Per il calcolo dei residui si trova:

$$R(f; i) = \frac{1}{2i \cosh i} = \frac{1}{2i \cos 1} \quad ,$$

e

$$R(f; (n - \frac{1}{2})\pi i) = \frac{1}{[1 - (n - \frac{1}{2})^2\pi^2] \sinh(n - \frac{1}{2})\pi i} = \frac{(-1)^n}{i[(n - \frac{1}{2})^2\pi^2 - 1]} \quad .$$

Finalmente si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \cosh x} = \frac{\pi}{\cos 1} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n - \frac{1}{2})^2\pi^2 - 1} \quad .$$

Esempio 1.12.2 Calcolare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$, $a > 0$.

Conviene considerare la funzione $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)} \cot(\pi z)$ che ha poli semplici nei punti $z = \pm ia$ e in $z = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Si trova che i residui sono dati da

$$\begin{aligned} R(f; ia) &= \frac{1}{2ia} \cot(\pi ia) = -\frac{1}{2a} \coth \pi a \quad , \\ R(f; -ia) &= -\frac{1}{2ia} \cot(-\pi ia) = -\frac{1}{2a} \coth \pi a \quad , \\ R(f; n) &= \frac{1}{\pi(n^2 + a^2)} \quad . \end{aligned}$$

Conviene scegliere $R_k = k + \frac{1}{2}, k = 1, 2, \dots$, supponendo che tutti questi raggi siano diversi da $|a|$. (Altrimenti si salterà uno dei raggi.) Si osservi inoltre che

$$|\cot \pi z|^2 = \frac{\cos^2 \pi x + \sinh^2 \pi y}{\sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y} \quad .$$

Ora, per $k + \frac{1}{4} \leq |x| \leq k + \frac{1}{2}$ vale $\cos^2 \pi x \leq \sin^2 \pi x$, cosicché $|\coth \pi z| \leq 1$. D'altra parte per $|x| < k + \frac{1}{4}$ e $|z| = k + \frac{1}{2}$, si ha

$$|y| > \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(k + \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{2} + \frac{3}{16}} \geq \frac{\sqrt{11}}{4} \quad ,$$

e quindi

$$|\cot \pi z|^2 \leq \frac{1 + \sinh^2 \frac{\pi}{4} \sqrt{11}}{\sinh^2 \frac{\pi}{4} \sqrt{11}} = K^2 \quad .$$

Dunque, per $|z| = R_k$, si ha

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|R_k^2 - a^2|} \quad ,$$

e quindi è soddisfatta la condizione all'infinito. Finalmente

$$-\frac{1}{a} \coth \pi a + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(n^2 + a^2)} = 0 \quad .$$

Cioè

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a \quad .$$

Per ragioni di simmetria si trova poi facilmente

$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth \pi a - \frac{1}{2a^2} \quad .$$

Può essere interessante osservare che $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi}{2a} \coth \pi a - \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Poichè la somma della serie è funzione continua di a si trova finalmente che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad .$$

Per la valutazione della serie abbiamo tenuto conto che la funzione $\pi \cot \pi z$ ha poli con residui 1 in tutti gli interi $n \in \mathbf{Z}$. Si possono sommare serie a termini di segno alternato tenendo presente che $\pi \csc(\pi z)$ ha poli in $n \in \mathbf{Z}$, con residui $(-1)^n$. Si considerino i seguenti ulteriori esercizi

Esercizio 1.12.1 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(2 + \cos x)(1 + x^2)}$$

come somma di una serie.

Esercizio 1.12.2 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(1 + x^4) \sinh x}$$

come somma di una serie.

Esercizio 1.12.3 *Calcolare*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^4} \quad ,$$

utilizzando i residui della funzione $\frac{\cot \pi z}{1+z^4}$.

Esercizio 1.12.4 *Calcolare*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^4} \quad .$$

Esercizio 1.12.5 *Calcolare*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} \quad ,$$

per $0 < a < 1$, utilizzando i residui della funzione $\frac{\coth \pi z}{z^2 + a^2}$.

1.13 Prolungamento analitico.

Quanto stiamo per esporre è basato su considerazioni non completamente formalizzate, ma che riteniamo utili per fornire una trattazione intuitiva dell'argomento. Un primo approccio a una trattazione formalmente più precisa e astratta si può trovare, per esempio nel libro di J.B. Conway "Functions of one complex variable, Springer Verlag. Ricordiamo le considerazioni già fatte a proposito del teorema 1.8.1 di Weierstrass. Se supponiamo di avere una funzione olomorfa $f(z)$ che sappiamo definita su un dominio aperto connesso D e se ne conosciamo i valori in un intorno di un punto $a \in D$, possiamo trasportare i suoi valori in un arbitrario punto $b \in D$. Consideriamo infatti un cammino continuo e rettificabile in D , Γ , che congiunge a con b . Diciamo ρ la distanza tra il

sostegno di Γ e la frontiera ∂D di D . Per ogni punto $z_0 \in \Gamma(I)$ la funzione $f(z)$ è sviluppabile in serie di potenze avente raggio di convergenza $R_0 \geq \rho$. Poiché $\Gamma(I)$ è compatto, un numero finito di cerchi di raggi $R_k \geq \rho$ e centri z_k , $k = 1, 2, \dots, n$, $z_0 = a, z_n = b$ coprirà $\Gamma(I)$. Potremo scegliere i punti in modo che $z_{k+1} \in B(z_k, R_k)$, dove $B(z_k, R_k)$ rappresenta il disco di centro z_k e raggio R_k . Allora, noto lo sviluppo in serie di $f(z)$ in $B(z_0, R_0)$, potremo calcolare $f^{(m)}(z_1)$, $m = 0, 1, \dots$ e quindi conoscere lo sviluppo in serie di $f(z)$ in $B(z_1, R_1)$, e così via fino a ottenere una completa conoscenza di f e di tutte le sue derivate in $b = z_n$. Dunque, ammesso di sapere che $f(z)$ è definita in D e di conoscerne i valori in un intorno di a , possiamo valutarla in un altro punto arbitrario $b \in D$.

Supponiamo ora di avere solo una conoscenza parziale di una funzione olomorfa. Precisamente di conoscerla solamente in un intorno di un punto z_0 . Ci proponiamo di usare la precedente idea per vedere se il suo valore si possa estendere a un insieme aperto connesso di \mathbb{C} più ampio dell'intorno di partenza. Precisamente diremo *elemento di funzione analitica* la coppia (f, G) dove f è una funzione olomorfa definita in un aperto connesso G ; il caso "minimo che dobbiamo aspettarci è che f sia la somma di una serie di potenze e G sia il suo cerchio di convergenza $B(z_0, R_0)$. Supponiamo che, preso un punto $z_0 \in G$ e un cammino Γ che congiunge z_0 con un punto $b \in \mathbb{C}$, esistano un numero finito di punti $z_0, z_1, \dots, z_n = b$ di Γ come nella situazione precedente; cioè che $z_1 \in B(z_0, R_0)$ dove f è sviluppabile in serie di potenze; che la serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_1)}{m!} (z - z_1)^m$ abbia raggio di convergenza $R_1 > 0$ e che $z_2 \in B(z_1, R_1)$; \dots ; che $b = z_n \in B(z_{n-1}, R_{n-1})$ nel quale converge la serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_{n-1})}{m!} (z - z_{n-1})^m$. Allora l'elemento di funzione analitica (f_b, G_b) , dove $f_b(z)$ è una funzione che prolunga il valore della somma della serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_n)}{m!} (z - z_n)^m$, con $z_n = b$, a un aperto connesso $G_b \supset B(b, R_n)$, si dirà il prolungamento analitico (o continuazione analitica) dell'elemento (f, G) al punto b lungo il cammino Γ . Dato un elemento analitico (f_0, G_0) , consideriamo tutti i punti b del piano complesso ai quali quell'elemento analitico si può estendere lungo un opportuno cammino Γ . *Se siamo fortunati*, otterremo allora una funzione analitica formata dai prolungamenti analitici dell'elemento (f_0, G_0) così definita: il dominio della funzione è l'aperto connesso

$$D = \cup \{G_b; (f_0, G_0) \text{ è estendibile a un elemento } (f_b, G_b)\} \quad ;$$

se $z \in G_b \subset D$, allora $f(z) = f_b(z)$. Più avanti spiegheremo cosa significhi "se siamo fortunati". Per stabilire come e se si possa prolungare analiticamente un elemento, si può procedere come segue. Dato un elemento costituito dalla somma di una serie di potenze e dal suo cerchio di convergenza di raggio R_0 e centro a_0 , $(f_0(z), G_0)$, si conduca con centro in a_0 un cerchio di raggio $\frac{R_0}{2}$. Sulla frontiera di G_0 vi deve essere almeno un punto singolare. Perciò, con centro in ogni punto a del cerchio di centro a_0 e raggio $\frac{R_0}{2}$, la funzione $f_0(z)$ è sviluppabile in serie di potenze convergente in un cerchio di raggio R_a , tale che sia $\frac{R_0}{2} \leq R_a \leq \frac{3R_0}{2}$ (distanza minima e, rispettivamente, massima di a dalla frontiera di G_0). Inoltre ci sarà certamente almeno un punto a per il quale $R_a = \frac{R_0}{2}$. Se esiste a per il quale $R_a > \frac{R_0}{2}$, allora l'elemento iniziale potrà essere prolungato al di fuori del dominio iniziale G_0 . Iterando questo procedimento in tutti i modi possibili a partire dall'elemento iniziale si troverà la nostra funzione analitica. Possono verificarsi varie situazioni, che ora brevemente esamineremo. Può accadere che l'elemento analitico non si lasci prolungare al di fuori del suo dominio iniziale G_0 ; può accadere che l'elemento analitico si lasci prolungare ad una regione D e che il valore del prolungamento di $(f_0(z), G_0)$ a (f_b, G_b) non dipenda dal particolare cammino contenuto in D , che congiunge a_0 con b . Questo è il caso che abbiamo detto fortunato. Si dirà allora di avere ottenuto, per prolungamento analitico dell'elemento $(f_0(z), G_0)$, una funzione olomorfa $f(z)$

definita sul dominio D . Infine può accadere che partendo dal medesimo elemento iniziale $(f_0(z), G_0)$ si possa giungere a un punto $b \in D$ attraverso due diversi cammini Γ_1 e Γ_2 e che per i due prolungamenti $(f_{b,\Gamma_1}(z), G_{b,\Gamma_1})$ e $(f_{b,\Gamma_2}(z), G_{b,\Gamma_2})$, risulti $f_{b,\Gamma_1}(b) \neq f_{b,\Gamma_2}(b)$. Si dirà allora che siamo in presenza di una funzione *polidroma*, ottenuta per prolungamento analitico dell'elemento iniziale $(f_0(z), G_0)$. Vedremo che i casi qui ipotizzati possono effettivamente verificarsi.

1.13.1 Elementi non prolungabili.

Esempi tipici al proposito sono le seguenti serie dette di Weierstrass:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{a^n} \quad a > 1, 0 < b < 1, \quad (W)$$

con $a \in \mathbb{N}$ dispari e tale che $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, e di Fredholm

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{n^2} \quad 0 < a < 1. \quad (F)$$

Si tratta di esempi di serie dette *lacunari*. Così sono dette le serie nelle quali i termini della serie diversi da zero sono "rari. Precisamente si dicono lacunari le serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k} \quad ,$$

per le quali vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k} = 0 \quad .$$

Nel caso della serie (W) gli $a_m \neq 0$ hanno $m = a^n$; per la serie (F) , si ha $a_m \neq 0$ per $m = n^2$. Nel caso della serie (F) il raggio di convergenza è $R = 1$. Infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n+1} z^{(n+1)^2}}{a^n z^{n^2}} \right| = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^{2n+1} \quad .$$

Il limite è < 1 se $|z| \leq 1$. Precisamente il limite è 0 se $|z| < 1$; è $a < 1$ se $|z| = 1$. È $+\infty$ se $|z| > 1$. Dunque la serie converge e ha per somma una funzione continua in tutti i punti del cerchio di centro l'origine e raggio 1, compresi i punti della frontiera. Un teorema generale dovuto a E. Fabry (1896) assicura che le serie lacunari non sono prolungabili oltre la loro circonferenza di convergenza. In questo caso la circonferenza di convergenza si dice una *frontiera naturale* per l'elemento analitico. Nel caso della serie (W) , Weierstrass dimostrò nel 1880 che essa non è continuabile facendo vedere che la parte reale della sua somma non è una funzione differenziabile dell'arco su $|z| = 1$. Invece per la serie (F) si ha che essa è non continuabile benché $h(\vartheta) = f(e^{i\vartheta})$ sia di classe C^∞ rispetto a ϑ .

1.13.2 Caso della monodromia.

Sia Γ un cammino che parte da un punto $a \in B(a, R_0) \subset G$ e arriva a un punto $b \notin B(a, R_0)$ lungo il quale sia prolungabile un elemento analitico $f(z)$. Tale prolungamento si sviluppi attraverso i punti z_1 nel quale Γ esce da $B(a, R_0)$, centro di un disco di raggio R_1 , $B(z_1, R_1)$, z_2 nel quale Γ esce da $B(z_1, R_1)$, centro di un disco di raggio R_2 , $B(z_2, R_2)$, eccetera, fino a raggiungere il punto b . Abbiamo supposto che tutti i punti scelti z_1, z_2, z_3, \dots non siano singolari. È chiaro che al posto dei dischi $B_0 = B(a, R_0), B_1 = B(z_1, R_1), B_2, \dots$ avremmo potuto scegliere altri dischi B'_0, B'_1, B'_2, \dots di centri a, z'_1, z'_2, \dots purché il disco di centro z'_k contenga la porzione d'arco $\overline{z'_k z'_{k+1}}$. Ora i dischi B_0, B_1, \dots, B_n coprono il sostegno di Γ , ma anche un intorno aperto di esso. Se Γ' ha gli stessi estremi e il sostegno è contenuto in $\cup_{k=1}^n B_k$, allora per il teorema di Weierstrass sull'identità delle funzioni analitiche, il prolungamento di (f_0, B_0) lungo Γ fino a b dà lo stesso risultato del prolungamento dell'elemento lungo Γ' .

Più in generale può essere dimostrato il seguente teorema (del quale ometteremo la prova)

Teorema 1.13.1 [Teorema di Monodromia.] *Se D è un aperto connesso e semplicemente connesso, se $a \in D$ e se un elemento analitico (f, G) con $a \in G \subset D$ può essere continuato analiticamente lungo ogni cammino in D , allora i suoi prolungamenti definiscono una funzione olomorfa in D .*

Supponiamo ora che, per quanto venga prolungato il procedimento descritto, non si possa trovare un cerchio che racchiuda una porzione di Γ al di là di un certo punto. In questo caso i punti nei quali Γ esce dai dischi B_k , diciamoli z_{k+1} si accumulano verso un certo punto ξ . Tale punto si dirà un punto singolare. Esso potrà eventualmente essere il punto b o un punto di Γ compreso tra a e b . La natura del punto singolare ξ potrà essere quello di un polo o di una singolarità essenziale, che già abbiamo incontrato, o potrà essere di natura diversa, come quella di un punto di *diramazione*, o una sovrapposizione di punti dei tipi detti.

1.13.3 Caso della polidromia.

Per spiegare la natura di un punto di diramazione, consideriamo il caso delle funzioni $\sqrt{1+z}$ e $\log(1+z)$. Se partiamo dal punto $a = 0$ un elemento analitico della funzione $\sqrt{1+z}$ è rappresentato dalla somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} z^n \quad .$$

Questa serie ha raggio di convergenza $R = 1$. Se si sviluppa in serie a partire da un punto $-1 < z_0 < 0$ del segmento dell'asse reale congiungente 0 con -2 , il raggio di convergenza della serie corrispondente è $z_0 + 1$ e dunque tende a 0 se $z_0 \rightarrow -1$. Dunque il punto -1 è singolare e non si può arrivare a superarlo lungo il segmento dell'asse reale. Se invece si segue l'andamento dei cerchi di convergenza della serie lungo una circonferenza di centro -1 e raggio 1, si vede che con centro nei punti $c = -1 + e^{i\vartheta}$ il raggio di convergenza della serie è sempre $R_c = 1$. Seguendo il cammino del semicerchio superiore ($0 \leq \vartheta \leq \pi$) si arriva nel punto -2 con l'elemento di funzione analitica che

vale i . Seguendo invece il cammino nel semipiano inferiore ($0 \geq \vartheta \geq -\pi$) si perviene a un elemento che in -2 vale $-i$. Un fenomeno analogo si verifica per la funzione $\log(1+z)$. Quando a partire da un elemento di funzione analitica, si arriva, congiungendo un punto a con un punto b attraverso due cammini distinti Γ_1 e Γ_2 , a due elementi analitici diversi, si dice che si è in presenza di una funzione *polidroma* o a *più valori*. Si dice anche che si è in presenza di più *rami* o *determinazioni* della funzione. Si può infine dimostrare che, quando due cammini Γ_1 e Γ_2 da a a b conducono a differenti elementi in b , allora vi è almeno un punto singolare nella regione interna al cammino chiuso $\Gamma_1 + (-\Gamma_2)$. Infatti questa è sostanzialmente l'affermazione del Teorema di Monodromia, già ricordato.

1.13.4 Qualche esempio di funzione polidroma

Presenteremo ora, anche se in modo non completamente soddisfacente dal punto di vista logico, lo studio di alcune funzioni polidrome e delle loro cosiddette *superficie di Riemann*. Una trattazione più precisa potrebbe essere fatta introducendo, per esempio, le nozioni di *germe di funzione analitica*, di *funzione analitica completa* e di *fascio dei germi di funzioni analitiche su un aperto G* (si veda il citato libro di J. B. Conway). I limiti di questo corso, dedicato agli studenti d'ingegneria, sconsigliano di entrare nei dettagli di queste considerazioni. Consideriamo dunque in \mathbb{C} l'equazione

$$w^2 - z = 0;$$

se $z = r \cdot e^{i\varphi}$ allora le due soluzioni dell'equazione sono $w_1 = \sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}$ e $w_2 = \sqrt{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)} = -\sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Questo non è drammatico perché anche nel campo reale, se $z \geq 0$ ci sono due soluzioni $w_1 = \sqrt{z}$ e $w_2 = -\sqrt{z}$. Potremmo prendere atto che ci sono due soluzioni e scegliere una delle due, per es. $w_1(z)$, come definizione di *radice del numero complesso z* . Purtroppo, ciò funziona nel campo reale, ma non nel campo complesso. Vediamo perché. Immaginiamo di scegliere un certo punto $z \neq 0$ e di percorrere un giro lungo una circonferenza di centro l'origine e raggio $r = |z|$. Se scegliamo come radice di z il numero $w_1(z)$, quando avremo percorso un intero giro della nostra circonferenza l'argomento di z sarà aumentato di 2π e quindi il valore di $w_1(z)$ prolungato per continuità lungo la circonferenza sarà $\sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} = -\sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}$, cioè sarà coincidente con il valore di $w_2(z)$ prima dell'inizio del giro. Dunque facendo un giro intorno all'origine i valori di $w_1(z)$ e di $w_2(z)$ si scambiano fra di loro e non è possibile perciò attribuire a uno dei due un significato privilegiato. Si può tentare di rimediare alla cosa procedendo come segue: si considerino due copie del piano complesso e si faccia un "taglio lungo l'asse reale negativo, per es., fino allo zero. I due piani saranno detti rispettivamente piano 1 e piano 2. Il piano 1 si può rappresentare come $\mathbb{C}_1^* = \{(z, 1): z = \rho \cdot e^{i\varphi}, \pi \geq \varphi - \pi\}$ e il piano 2 come $\mathbb{C}_2^* = \{(z, 2): z = \rho \cdot e^{i\varphi}, \pi \geq \varphi > -\pi\}$. Ai punti di $(z, 1) \in \mathbb{C}_1^*$ sono assegnati i valori $w_1(z)$ ai punti $(z, 2) \in \mathbb{C}_2^*$ sono assegnati i valori $w_2(z)$. In questo modo ai punti di una superficie sconnessa formata dall'unione dei due piani complessi "tagliati sono biunivocamente assegnati i valori complessi delle soluzioni dell'equazione $w^2 - z = 0$ e non può esserci il "mescolamento delle determinazioni della radice. Tuttavia, rimangono alcuni aspetti spiacevoli come la sconnessione della superficie unione dei due piani e il fatto che due punti vicini su un piano della superficie possano avere valori molto diversi della radice. Infatti se ci si muove sul piano 1 dal punto $(z_0, 1)$ con $z_0 = 1$ lungo una semicirconferenza nel semipiano superiore fino a raggiungere un punto $(z_1, 1)$ prossimo a $(-1, 1)$, l'aumento dell'argomento essendo π , il valore di $w_1(z_1) \approx i$, mentre se ci si avvicina lungo una semicirconferenza nel semipiano inferiore a $(-1, 1)$,

essendo l'aumento dell'argomento $-\pi$, $w_1(e^{-\frac{\pi}{2}i}) = -i$. Due punti che se non ci fosse il “taglio nel piano sarebbero molto vicini hanno due valori che presentano un “salto di $2i$. Lo stesso accade nel semipiano \mathbb{C}_2^* : per il punto $(z_1, 2)$ prossimo a $(-1, 2)$ il valore di $w_2(z_1) \approx -i$, mentre in $(-1, 2)$ il valore di $w_2(-1) = i$. L'idea intuitiva alla base della nozione di superficie di Riemann per \sqrt{z} è di saldare il bordo superiore del piano 1 con quello inferiore del piano 2 e viceversa. Così i valori di $w_1(z)$ si mutano con continuità in quelli di $w_2(z)$ e viceversa. Facendo una simile operazione di “sutura c'è una linea di autointersezione che non ha significato e che in realtà non esiste. Infatti un'idea migliore della situazione è fornita dal supporre che un intorno di un punto $(z, 1)$, con $z < 0$ sia dato da un dischetto di raggio ε che per $-\pi \leq \varphi \leq 0$ sta nel piano \mathbb{C}_1^* , mentre per $0 < \varphi < \pi$ sta in \mathbb{C}_2^* . Il punto 0 ha un intorno formato da un doppio dischetto che si intreccia sui due piani, mentre i punti che non stanno sul semiasse negativo o lo zero, (z_0, k) , hanno sul loro piano un intorno formato dagli usuali dischetti $B(z_0, \varepsilon) = \{(z, k) : |z - z_0| < \varepsilon\}$, ($k = 1, 2$). A questo punto non è più necessario distinguere i due piani. Scelto un valore iniziale dell'argomento per un punto $z \in \mathbb{C}$, per esempio $-\pi \leq \arg(z) < \pi$ e un valore della sua radice quadrata, per es. $w_1(z)$, seguendo la variazione, in modo continuo, di z sulla superficie di Riemann della radice, si trovano correttamente i valori della radice sulle singole falde della superficie. Dopo due giri intorno all'origine si ritorna al valore iniziale della radice. L'origine e il punto all'infinito del piano complesso si dicono *punti di diramazione algebrica*, in questo caso di *ordine 2*. Un taglio fatto lungo una qualsiasi semiretta congiungente l'origine con ∞ non permette che ci sia un mescolamento delle determinazioni della radice. Una superficie di Riemann per la radice si ottiene suturando nel modo sopra descritto i due piani. La figura che segue dà un'idea degli intorni di un punto lungo il taglio dei due piani sovrapposti.

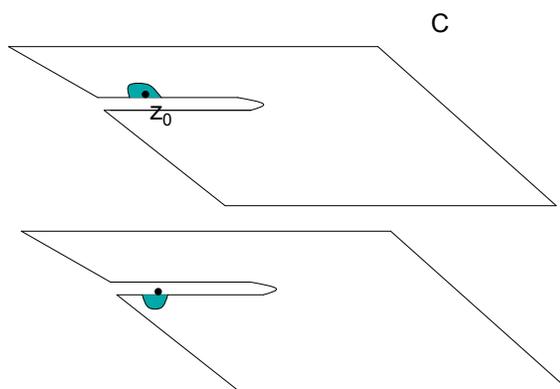


Figura 1.7: Intorno di un punto sul semiasse negativo. Superficie di Riemann per la radice quadrata.

Consideriamo l'equazione

$$w^n = z \quad .$$

Se $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$, essa ha soluzioni $w_1(z) = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\vartheta}{n}}$, $w_2(z) = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\vartheta+2\pi}{n}}$, \dots , $w_n(z) = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\vartheta+2(n-1)\pi}{n}}$.

Per costruire la superficie di Riemann della radice n -esima, converrà partire da n copie del piano complesso \mathbb{C} tagliato lungo il semiasse reale negativo: \mathbb{C}_1^* , \mathbb{C}_2^* , \dots , \mathbb{C}_n^* . Dopo avere percorso lungo il piano 1 un semicerchio di raggio 1, per es., e di ampiezza π , si arriverà a un valore prossimo a $e^{\frac{i\pi}{n}}$ che è il valore che si ottiene muovendosi nel piano 2 lungo un semicerchio di raggio 1 con ampiezza $-\pi$. Ciò si ripeterà sui bordi dei piani 3, 4, \dots , n . Si potranno perciò suturare i piani come indicato nella Figura 8, generalizzando quanto è stato fatto per la radice quadrata. I punti che stanno sul bordo avranno intorni fondamentali di tipo sferico formati da una metà disco giacente sullo stesso piano e per l'altra metà sul piano ciclicamente successivo (con ciò intendiamo che il piano successivo al piano n è il piano 1). In questo modo, partendo con una determinazione della radice su un piano qualsiasi, considerando le variazioni continue dell'argomento nella rotazione intorno all'origine, le varie determinazioni della radice automaticamente verranno assegnate in modo corretto sulle varie falde della superficie. Dopo n giri intorno all'origine, si tornerà alla determinazione iniziale sulla falda di partenza.

La figura che segue mostra le connessioni tra le falde della superficie di Riemann nel caso della radice quadrata e della radice n -esima. Il punto origine $z = 0$ e il punto all'infinito sono punti di diramazione algebrica d'ordine n nel caso della radice n -esima.

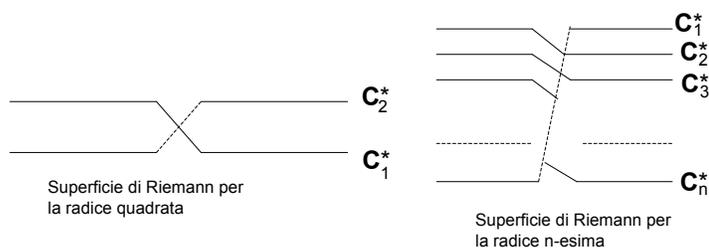


Figura 1.8: Superficie di Riemann per la radice quadrata e per la radice n -esima.

L'equazione

$$e^w = z,$$

come sappiamo, ha infinite soluzioni del tipo $w_k(z) = \log(\rho) + i \arg(z) + k2\pi i$ se $z \neq 0$ ha $\rho > 0$ come modulo e $\arg z$ come argomento. Qui si dovranno considerare infinite copie del piano complesso tagliato lungo il semiasse negativo \mathbb{C}_k^* e per avere un'idea della superficie di Riemann del logaritmo converrà suturare ogni piano k -esimo con quello $(k + 1)$ -esimo come si è fatto in precedenza. La superficie che si ottiene ha infinite falde. Continuando a ciclare intorno all'origine si passa a nuove falde a ogni giro. Per tornare a una falda già toccata l'unica possibilità è quella di invertire la

direzione di rotazione. L'origine e $z = \infty$ sono in questo caso *punti di diramazione trascendenti*, di ordine infinito. Naturalmente le complicazioni non si limitano a questi semplici casi. Per esempio $w = z^\alpha = e^{\alpha \cdot \log z} = e^{\alpha \cdot (\log(\rho) + i \arg(z) + k2\pi i)}$, è tale che il suo valore viene moltiplicato per un fattore $e^{\alpha 2\pi i}$, in generale $\neq 1$ se α non è razionale, ogni volta che si compie un ciclo intorno all'origine. Ai punti di diramazioni possono sovrapporsi singolarità di tipo polare, o singolarità essenziali, o punti d'accumulazione di singolarità, e così via complicando...

1.13.5 ESERCIZI

Utilizzando le considerazioni svolte sulle funzioni polidrome, si valutino alcuni tipici integrali quali i seguenti

Esercizio 1.13.1 *Si calcoli*

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx, \text{ con } 0 < p < 1 .$$

SVOLGIMENTO: Si consideri la funzione $f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z}$ che ha un polo in $z = -1$ e un punto di diramazione (in generale trascendente se p non è razionale) in $z = 0$. Considereremo il cammino $\Gamma_{\varepsilon, R}$ costituito da due circonferenze di centro l'origine e raggi ε e R , ($R > 1$) e da due segmenti congiungenti ε con R , Γ_1 e Γ_2 , come nella figura che segue. Abbiamo allora

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 2\pi i R(f; -1).$$

Ma

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + e^{2\pi i(p-1)} \int_R^\varepsilon \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_{C_\varepsilon} f(z) dz + \int_\varepsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx .$$

Dunque, scrivendo nell'ordine corretto gli estremi d'integrazione,

$$(1 - e^{2\pi i(p-1)}) \int_\varepsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i e^{\pi i(p-1)},$$

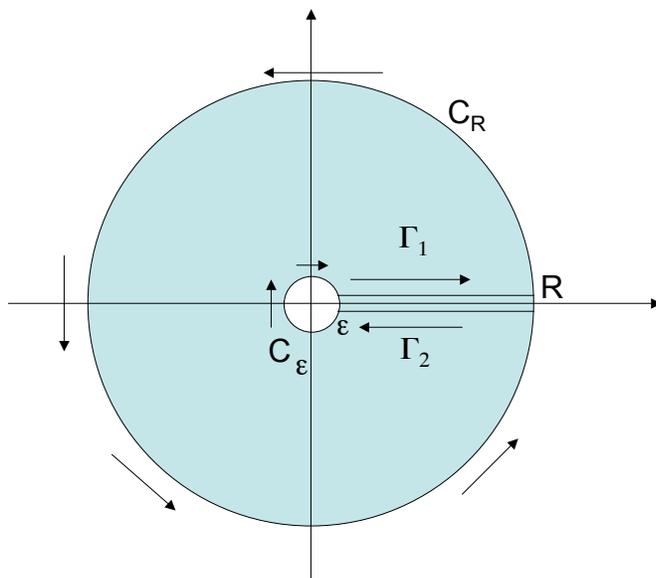
poiché, essendo $-1 = e^{\pi i}$ nel campo d'integrazione considerato, il residuo di $f(z)$ in -1 vale $e^{\pi i(p-1)}$. Si vede poi agevolmente che quando $R \rightarrow \infty$, l'integrale esteso a C_R tende a zero come $R^{(p-1)}$ e quando $\varepsilon \rightarrow 0$, l'integrale esteso a C_ε tende a zero come ε^p . Perciò prendendo i limiti per $R \rightarrow \infty$ e per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$(1 - e^{2\pi i(p-1)}) \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{\pi i(p-1)},$$

e quindi

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i}{e^{-\pi i(p-1)} - e^{\pi i(p-1)}} = \frac{-\pi}{\text{sen}\pi(p-1)} = \frac{\pi}{\text{sen}(p\pi)} .$$

□

Figura 1.9: Cammino d'integrazione $\Gamma_{\varepsilon,R}$.

Esercizio 1.13.2 *Si calcoli*

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} \text{ con } a \notin [-1,1] \quad .$$

SVOLGIMENTO: Supporremo per semplicità che $a \not\asymp 1$. Quindi che se a è reale sia un numero < -1 . La trattazione per $a > 1$ si farà con lo stesso metodo, ma il cammino d'integrazione andrà opportunamente modificato. Dunque $f(z)$ è una funzione dotata di un polo semplice in $z = a$ e di due punti di diramazione algebrici d'ordine 2 in $z = \pm 1$. Se nel piano della variabile z eseguiamo un taglio da -1 a 1 , impediamo a z di circolare intorno ai punti $z = -1$ e $z = 1$ e quindi limitiamo gli argomenti di $z - 1$ e di $z + 1$ ai valori $0 \leq \arg(z - 1) < 2\pi$ e $0 \leq \arg(z + 1) < 2\pi$. Il cammino d'integrazione $\Gamma_{\varepsilon,\delta,R}$ è quello mostrato nella figura seguente.

Sul cammino considerato integreremo la funzione $f(z) = \frac{1}{(z-a)\sqrt{z^2-1}}$. Il residuo della funzione in $z = a$ è dato da $R(f, a) = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ e l'argomento di $a^2 - 1$ va accuratamente determinato nel campo considerato. Dunque

$$\int_{C_R} f(z) dz + \int_{\Gamma'_-} + \int_{C''_\delta} + \int_{\Gamma_-} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{\Gamma} + \int_{C'_\delta} + \int_{\Gamma'} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-1}}.$$

È facile riconoscere che gli integrali lungo i cammini Γ' e Γ'_- si elidono. Infatti lungo Γ' $z^2 - 1$ ha modulo $x^2 - 1$ e argomento 0; lungo Γ'_- il modulo è ancora $x^2 - 1$, mentre l'argomento è 4π . I

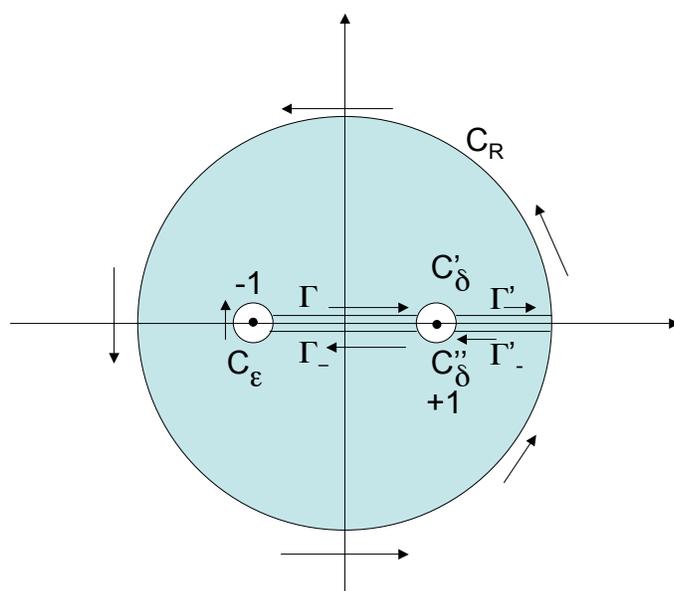


Figura 1.10: Cammino d'integrazione $\Gamma_{\varepsilon,\delta,R}$.

contributi, calcolati lungo due cammini orientati in senso opposto si cancellano. Lungo Γ_- , $z-1$ ha modulo $1-x$ e argomento π ; $z+1$ ha modulo $x+1$ e argomento 2π . Dunque $\sqrt{z^2-1} = \sqrt{1-x^2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$ lungo Γ_- . Invece lungo Γ si ha, con considerazioni analoghe, $\sqrt{z^2-1} = \sqrt{1-x^2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Tenuto conto di ciò abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f(z) dz + \int_{C'_\delta} +e^{-\frac{3\pi}{2}} \int_{1-\delta}^{-1+\varepsilon} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} + \int_{C_\varepsilon} + \\ +e^{-\frac{\pi}{2}} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\delta} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} + \int_{C'_\delta} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-1}}. \end{aligned}$$

Con considerazioni già fatte più volte, si riconosce che per $R \rightarrow \infty$ tende a zero $\int_{C_R} f(z) dz$; analogamente $\int_{C_\varepsilon} f(z) dz$ tende a zero per $\varepsilon \rightarrow 0$ e pure gli integrali sulle semicirconferenze di raggio δ hanno limite 0 per $\delta \rightarrow 0$. Dunque passando al limite per $R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, rimane

$$-2i \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-1}},$$

e quindi, finalmente

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \square$$

Esercizio 1.13.3 *Si calcoli*

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

SVOLGIMENTO: Il cammino d'integrazione che considereremo è uguale a quello precedentemente considerato $\Gamma_{\varepsilon,\delta,R}$. La funzione da considerare è

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)\sqrt{z^2-1}}$$

che ha poli in $z = i$ e $z = -i$. Procedendo come nel caso precedente si trova

$$-2i \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = 2\pi i [R(f; -i) + R(f; i)].$$

Occorre determinare con precisione l'argomento di z^2-1 nei due residui al fine di evitare errori clamorosi. In $z = i$, $\arg(z-1) = \frac{3}{4}\pi$ e $\arg(z+1) = \frac{1}{4}\pi$. Quindi in $z = i$, $\arg(z^2-1) = \pi$, mentre il modulo della stessa quantità è 2. Dunque $\sqrt{i^2-1} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = i\sqrt{2}$. In $z = -i$ si ha invece $\arg(z-1) = \frac{5}{4}\pi$ e $\arg(z+1) = \frac{7}{4}\pi$. Allora in $z = -i$, si ha $\sqrt{(-i)^2-1} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{2}\pi} = -i\sqrt{2}$. Si osservi che assumere in $z = -i$, $\sqrt{(-i)^2-1} = i\sqrt{2}$ come si potrebbe essere indotti a fare ragionando con superficialità, corrisponderebbe a scegliere invece che la determinazione principale del radicale quella che differisce per il fattore $e^{i\pi}$. Ma ciò non è possibile, visto che il piano è tagliato tra -1 e +1, il che impedisce il mescolamento delle due determinazioni. Si trova allora che

$$R(f; i) = \frac{1}{2i \cdot i\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = R(f; -i) = \frac{1}{-2i \cdot (-i\sqrt{2})}.$$

Finalmente si ottiene

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \square$$

Esercizio 1.13.4 *Si calcoli*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a dx}{b^2 + x^2}, b \neq 0, -1 < a < 1 \quad \left(= \frac{\pi b^{a-1}}{2 \cos(\frac{\pi a}{2})} \right).$$

Esercizio 1.13.5 *Si calcoli*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} dx}{1 + x + x^2}, \quad \left(= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \pi \sin \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right).$$

Esercizio 1.13.6 *Integrando la funzione e^{-z^2} lungo il cammino rettangolare formato dalle rette $y = 0, y = b, x = R, x = -R$, e facendo quindi tendere $R \rightarrow \infty$, si stabilisca la relazione*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}.$$

Esercizio 1.13.7 *Mostrare che*

$$P \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx = \pi \cot \alpha \pi, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Esercizio 1.13.8 *Verificare che vale la seguente uguaglianza dovuta a Eulero*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-p}}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \frac{\sin p\lambda}{\sin \lambda}, \quad -1 < p < 1, -\pi < \lambda < \pi.$$

Esercizio 1.13.9 *Trovare il numero delle radici dell'equazione $z^6 + 6z + 10 = 0$ in ogni quadrante del piano complesso.*

Esercizio 1.13.10 *Mostrare che per $-1 < z < 3$*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^z}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi(1-z)}{4 \cos \frac{z\pi}{2}}.$$

Esercizio 1.13.11 *Utilizzando il teorema dei residui, si calcoli per n intero qualsiasi*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{2n}}.$$

1.14 Cenni sulla rappresentazione conforme.

Consideriamo la corrispondenza fra i piani della variabile complessa z e quella della variabile complessa w data da $w = f(z)$ con $f(z)$ funzione olomorfa di z , come una trasformazione di coordinate. Essa associa quindi al punto $z = x + iy$, di coordinate cartesiane x e y un punto $w = \xi + i\eta$ di coordinate cartesiane ξ e η . Tale processo di associazione verrà chiamato in generale rappresentazione. Supponiamo ora che nel piano z vengano descritte due curve di equazione parametrica $z = a(t)$ e $z = b(t)$. Esse si incontrino in un punto $z_0 = a(t_0) = b(t_0)$. Nel punto d'incontro l'angolo formato dalle due curve è $\vartheta = \arg[a'(t_0)] - \arg[b'(t_0)] = \arg[a'(t_0) \cdot \overline{b'(t_0)}]$, dove $\overline{(\)}$ indica il complesso coniugato.

Nel piano w saranno descritte due curve d'equazioni parametriche $w = f(a(t))$ e $w = f(b(t))$. Esse si incontrano nel punto $w_0 = f(z_0) = f(a(t_0)) = f(b(t_0))$. Calcoliamo l'angolo tra le due curve del piano w nell'ipotesi che sia $f'(z_0) \neq 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta} &= \arg[f'(a(t_0)) \cdot \overline{f'(b(t_0))}] = \arg\{f'(z_0) \cdot a'(t_0) \cdot \overline{f'(z_0) \cdot b'(t_0)}\} = \\ &= \arg\{|f'(z_0)|^2 \cdot a'(t_0) \cdot \overline{b'(t_0)}\} = \arg[a'(t_0) \cdot \overline{b'(t_0)}] = \vartheta \quad . \end{aligned}$$

Dunque la rappresentazione $w = f(z)$ è conforme, cioè conserva gli angoli tra le curve corrispondenti (nei punti in cui è $f'(z) \neq 0$). In particolare, se nel piano w tracciamo le curve immagini dei sistemi di curve $x = cost$ e $y = cost$, poiché quest'ultime formano un sistema di curve ortogonali nel piano (x, y) , anche quelle considerate sono un sistema di curve ortogonali nel piano (ξ, η) . Un semplice esempio è fornito dalla funzione $w = e^z$. Il rettangolo $0 < x < a, 0 < y < \pi$ del piano (x, y) viene mutato come segue: $w = e^x \cdot e^{iy}$. Dunque l'immagine del rettangolo nel piano (x, y) è un settore di corona circolare $1 < |w| < e^a, 0 < \arg w < \pi$ nel piano (ξ, η) .

Un'osservazione molto importante che si può fare è la seguente. Se $u(\xi, \eta)$ è una funzione che soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad \text{in } D^* \quad ,$$

dove D^* è, per es., un aperto connesso e semplicemente connesso e limitato del piano (ξ, η) , allora, posto $U(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$, con $w = f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ olomorfa, la funzione $U(x, y)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \text{in } D \quad ,$$

dove D è il dominio che viene mutato in D^* dalla trasformazione $w = f(z)$. Dunque la conoscenza di una funzione armonica in D^* , si traduce nella conoscenza di una funzione armonica in D . Appare dunque importante il seguente problema: trovare una rappresentazione conforme che muti un dominio D del piano (x, y) in un dominio D^* del piano (ξ, η) , in modo che la frontiera di D sia portata nella frontiera di D^* e che la corrispondenza sia biunivoca. Una risposta efficace a questo problema è fornita dal seguente

Teorema 1.14.1 [Riemann] *Sia G un dominio aperto semplicemente connesso che non coincide con l'intero piano complesso e sia $a \in G$. Allora vi è una sola funzione olomorfa $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ tale che*

1. $f(a) = 0$ e $f'(a) > 0$;
2. f è biiettiva;
3. $f(G) = \{z: |z| < 1\}$.

Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Un esempio è fornito dall'equazione $w = \sqrt{z} - 1$ che muta i punti interni al cardiode d'equazione in coordinate polari $r \leq 2(1 + \cos \vartheta)$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, nei punti interni al cerchio $|w| < 1$. Infatti, se $z = 2 \cdot e^{i\vartheta}(1 + \cos \vartheta)$, si ha $z = 4 \cdot e^{i\vartheta} \cdot \cos^2(\frac{\vartheta}{2})$ e dunque $\sqrt{z} = 1 + e^{i\vartheta}$. Dunque $w = e^{i\vartheta}$. E quindi, quando z percorre il cardiode w percorre la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine. Vediamo a cosa corrispondono i punti interni $|w| < 1$. Si ha $w = \sqrt{r}e^{i\frac{\vartheta}{2}} - 1$, con $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Allora $|w| = r - 2\sqrt{r} \cos \frac{\vartheta}{2} + 1$ e quindi $|w| < 1$ se e solo se $r - 2\sqrt{r} \cos \frac{\vartheta}{2} < 0$, ossia $\sqrt{r} < 2 \cos \frac{\vartheta}{2}$, cioè se e solo se $r < 2(1 + \cos \vartheta)$, cioè se e solo se i punti sono interni al cardiode. Dunque se si conosce la soluzione dell'equazione di Laplace con assegnate condizioni al contorno nel cerchio unitario, se ne deduce la conoscenza all'interno del cardiode.

1.14.1 Le trasformazioni bilineari di Möbius.

Studieremo ora alcuni semplici tipi di trasformazioni. Tra le trasformazioni più semplici ci sono quelle lineari. Sono trasformazioni del tipo

$$w = az + b \quad .$$

Una trasformazione di questo tipo porta una retta per due punti z_1 e z_2 in una retta passante per i punti

$$\begin{aligned} w_1 &= az_1 + b \\ w_2 &= az_2 + b \quad . \end{aligned}$$

La pendenza della retta per z_1 e z_2 è data da $\arg(z_2 - z_1)$, mentre quella della retta per w_1 e w_2 è data da $\arg(w_2 - w_1) = \arg\{a \cdot (z_2 - z_1)\} = \arg(a) + \arg(z_2 - z_1)$. Quindi l'effetto della trasformazione lineare è quello di fare rotare tutti i punti (vettori) del piano complesso di un angolo costante che è $\arg(a)$, oltre a traslarli di b . Consideriamo poi l'inversione

$$w = \frac{1}{z} \quad .$$

Il punto all'infinito $z = \infty$ viene mutato nel punto $w = 0$. Consideriamo nel piano z l'equazione

$$\left|z - \frac{p}{\alpha}\right|^2 = \frac{|p|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ e } \alpha\beta < |p|^2.$$

L'equazione rappresenta una circonferenza di centro $\frac{p}{\alpha}$ e raggio $(\frac{|p|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha})^{\frac{1}{2}}$. Esplicitando il quadrato e moltiplicando per α , si ottiene

$$\alpha|z|^2 + \beta - \bar{p}z - p\bar{z} = 0.$$

Notiamo che per $\alpha = 0$ l'equazione diviene quella di una retta, che converremo di chiamare circonferenza generalizzata (con il centro all'infinito). Con un'inversione l'equazione data si muta nella

$$\alpha - pw - \overline{p\overline{w}} + \beta|w|^2 = 0,$$

che è ancora una circonferenza generalizzata. Dunque l'inversione muta circonferenze generalizzate in circonferenze generalizzate. Due punti z_1 e z_2 che giacciono sullo stesso raggio e tali che

$$\left|z_1 - \frac{p}{\alpha}\right| \cdot \left|z_2 - \frac{p}{\alpha}\right| = \frac{|p|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha},$$

si dicono *inversi*. Essi soddisfano l'equazione

$$\left(z_1 - \frac{p}{\alpha}\right) \overline{\left(z_2 - \frac{p}{\alpha}\right)} = \frac{|p|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha},$$

cioè

$$\alpha z_1 \overline{z_2} - \overline{p} z_1 - p \overline{z_2} + \beta = 0.$$

Operando un'inversione la precedente si trasforma in

$$\alpha - pw_1 - \overline{p\overline{w_2}} + \beta w_1 \overline{w_2} = 0.$$

Quindi un'inversione porta punti inversi rispetto a una certa circonferenza in punti inversi rispetto alla circonferenza immagine. Ovviamente anche $w = az + b$ trasforma circonferenze in circonferenze e quindi la composizione di una trasformazione lineare e di un'inversione gode delle stesse proprietà: cioè porta la famiglia delle circonferenze generalizzate in sé. Consideriamo ora la trasformazione detta *bilineare* o di *Möbius*:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Supporremo $c \neq 0$, poiché se $c = 0$ ci si riduce al caso lineare. Allora si ottiene:

$$w = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}.$$

Dunque tale trasformazione può pensarsi ottenuta eseguendo successivamente la trasformazione lineare $w_1 = cz + d$, quindi l'inversione $w_2 = \frac{1}{w_1}$ e da ultimo la trasformazione lineare

$$w = \left(b - \frac{ad}{c}\right)w_2 + \frac{a}{c}.$$

Se fosse $ad - bc = 0$, tutto il piano z sarebbe trasformato in $w = \frac{a}{c}$. Supporremo dunque che sia verificato $ad - bc \neq 0$; in questo caso la trasformazione di Möbius è una trasformazione biunivoca del piano z sul piano w , che porta circonferenze generalizzate in circonferenze generalizzate.

Esercizio 1.14.1 *Si verifichi che la trasformazione bilineare*

$$w = \frac{-iz - 1}{z + i},$$

porta il disco $|z| < 1$ nel semipiano $\Im w > 0$.

1.15 La funzione Gamma di Eulero.

Definiremo la funzione Gamma di Eulero per mezzo del seguente integrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad , \Re(z) > 0 .$$

L'integrale è convergente se $\Re z > 0$. Mostriamo come la funzione possa essere prolungata a tutto il piano complesso (tranne i valori interi ≤ 0 della variabile). Cominciamo con l'osservare che vale una ben nota relazione di ricorrenza:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt .$$

Ora se $\Re z > 0$ il contributo della parte finita è nullo e resta la relazione

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad .$$

È proprio questa proprietà che ci permetterà di estendere analiticamente la definizione di $\Gamma(z)$. Infatti se esiste una funzione olomorfa che soddisfa questa relazione in un dominio del piano complesso che contiene $\Re z > 0$ e che coincide in questo semipiano con l'integrale dato, allora questa è l'estensione analitica cercata.

Poiché, come facilmente si verifica

$$\Gamma(n+1) = n! \quad ,$$

per $n \geq 0$, la funzione Γ può intendersi come una soluzione al problema d'interpolazione che consiste nel determinare una funzione olomorfa $f(z)$ che ristretta ai valori interi vale $n!$.

Osserviamo che nella funzione integranda è $t \geq 0$ e, valendo $t^z = e^{z \log t}$, con $z = x + iy$, si avrà $|t^z| = t^x$. Posto $x = \Re z > 0$, vale

$$|\Gamma(x+iy)| \leq \Gamma(x) \quad , \quad x > 0 \quad .$$

Consideriamo ora il semipiano $\Re z > 1$ e, usando il teorema di Morera, mostriamo che $\Gamma(z)$ è olomorfa in detto semipiano. Infatti se consideriamo un triangolo $\Delta \subset \{z: \Re z > 1\}$, l'integrale di $\Gamma(z)$ esteso a questo triangolo, si può calcolare come un integrale iterato relativo a un integrale doppio assolutamente convergente. Cambiando l'ordine d'integrazione e tenendo presente che t^{z-1} è olomorfa, si trova che l'integrale è nullo. Dunque per l'arbitrarietà del triangolo, visto il Teorema di Morera, si conclude che $\Gamma(z)$ è olomorfa in $\Re z > 1$.

$$\int_{\Delta} \Gamma(z) dz = \int_{\Delta} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt \int_{\Delta} t^{z-1} dz = 0 .$$

Utilizzando la relazione di ricorrenza si ottiene

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad \text{per } 0 < \Re z \leq 1 .$$

Infatti, quando $0 < \Re z \leq 1$, si ha $1 < \Re(z+1) \leq 2$ e dunque $\Gamma(z+1)$ è olomorfa, $\frac{1}{z}$ lo è per $\Re z > 0$ e si conclude che $\Gamma(z)$ è olomorfa per $\Re z > 0$. Scrivendo la relazione di ricorrenza a partire da $z+2$, si trova

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \quad .$$

Ragionando come nel caso precedente, si trova che $\Gamma(z+2)$ è olomorfa per $-1 < \Re z \leq 0$, il che implica $1 < \Re(z+2) \leq 2$. $\frac{1}{z+1}$ è pure olomorfa se $\Re z > -1$, mentre $\frac{1}{z}$ è olomorfa nella regione detta, tranne che in $z=0$ dove ha un polo semplice. Dunque anche $\Gamma(z)$ sarà una funzione olomorfa per $\Re z > -1$, tranne che per un polo in $z=0$. Più in generale, per ogni $m > 1$, potremo concludere che

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \quad , \text{ per } \Re z > -m+1 \quad .$$

$\Gamma(z)$ è dunque olomorfa in $\Re z > -m+1$, tranne che nei poli semplici $z=0, -1, \dots, -m+2$. In conclusione $\Gamma(z)$ si può estendere a una funzione olomorfa in tutto il piano complesso, tranne che nei punti $z=-n, n \in \mathbb{N}$, dove essa ha poli semplici. Una funzione olomorfa in tutto il piano tranne che per singolarità isolate di tipo polo, si dice funzione meromorfa, come già è stato ricordato. Dunque abbiamo dimostrato che $\Gamma(z)$ è una funzione meromorfa.

Affrontando il problema della continuazione analitica da un altro punto di vista potremo rappresentare $\Gamma(z)$ come un prodotto infinito, convergente in tutto il piano complesso. Consideriamo la seguente famiglia di funzioni che indicheremo con $\Gamma_n(z)$.

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \quad .$$

Osserviamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$ e che tale limite è uniforme in t . Osserviamo inoltre che la successione $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ è definitivamente monotona crescente. Cioè che esiste \bar{n} tale che per $n > \bar{n}$, si ha

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{t}{n+1}\right)^{n+1} \quad ,$$

come si può agevolmente verificare. Facendo la sostituzione $t = s \cdot n$, si ottiene

$$\Gamma_n(z) = n^z \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^n ds \quad .$$

Si dimostra, per induzione, che vale

$$\Gamma_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad .$$

Infatti, per $n=1$ si trova

$$\Gamma_1(z) = \int_0^1 s^{z-1} (1-s) ds = \frac{s^z}{z} \Big|_0^1 - \frac{s^{z+1}}{z+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(z+1)} \quad .$$

Dunque la formula vale per $n=1$. Supponiamo che valga per $n-1$ e mostriamo che allora vale per n .

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= n^z \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^{n-1} (1-s) ds = \\ &= n^z \left\{ \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^{n-1} ds - \int_0^1 s^z (1-s)^{n-1} ds \right\} = \\ &= n^z \left\{ \frac{(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)} - \frac{(n-1)!}{(z+1)\dots(z+n)} \right\} = n^z \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad . \end{aligned}$$

Perciò

$$\frac{1}{\Gamma_n(z)} = n^{-z} \cdot z \cdot \frac{z+1}{1} \cdots \frac{z+n}{n} = n^{-z} \cdot z \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right).$$

Consideriamo il prodotto

$$z \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} = z \cdot e^{-z(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})} \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right).$$

Poiché $n^{-z} = e^{-z \log n}$, moltiplicando e dividendo per tale fattore si trova

$$z \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} = z \cdot e^{-z(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n)} \frac{1}{\Gamma_n(z)}.$$

Ora, si può dimostrare che esiste il limite per $n \rightarrow \infty$ del precedente prodotto e che esso è una funzione intera $G(z)$. Cioè vale

$$G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}.$$

La funzione $G(z)$ ha al finito gli zeri nei punti interi $z = n, n \leq -1$, e ha una singolarità essenziale all'infinito. Noi non daremo la dimostrazione del fatto citato, che viene affrontato nel problema della fattorizzazione delle funzioni intere. L'analogia con i polinomi è forte. Si sa che ogni polinomio a coefficienti in \mathbb{C} è fattorizzabile in fattori lineari del tipo $(z - \alpha_i)$, tenendo conto della molteplicità dei fattori. Una simile fattorizzazione vale anche per le funzioni intere che, in un certo senso, sono polinomi di grado infinito. Esse saranno fattorizzabili con fattori lineari come nel caso dei polinomi; tuttavia, nel caso d'infiniti zeri, ogni fattore lineare andrà moltiplicato per un fattore esponenziale, scelto in modo opportuno, al fine d'assicurare la convergenza. Poiché esiste finito il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \gamma$$

dove $\gamma = 0,57722\dots$ è detta costante di Eulero-Mascheroni⁴ (della quale non si sa se sia razionale o irrazionale), si ottiene che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = zG(z)e^{\gamma z}.$$

Dovendo dimostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(z) = \Gamma(z)$ e trattandosi di funzioni olomorfe, sarà sufficiente dimostrare la convergenza per i valori reali e positivi di z . Sia $z = x > 0$. Allora

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt < \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n+1}\right)^{(n+1)} dt <$$

⁴Lorenzo Mascheroni nato a Bergamo nel 1750, morto a Parigi nel 1800. L'abate Mascheroni insegnò fisica e matematica nel Seminario di Bergamo dal 1778. In seguito a un suo lavoro molto apprezzato sull'equilibrio delle volte, nel 1786 venne chiamato a insegnare algebra e geometria nell'Università di Pavia, università della quale divenne rettore dal 1789 al 1793. Calcolò le prime 32 cifre decimali della costante sopra ricordata. Ammiratore di Napoleone, venne inviato a Parigi quale membro della commissione di studio delle nuove misure e monete. In seguito alle vittorie degli Austro-Russi non poté rientrare in Italia. Fu tra i fondatori degli studi d'ingegneria in Italia secondo il curriculum rimasto sostanzialmente in vigore fino al 2000. Sostenne la validità dell'insegnamento incentrato sulle università, come contrapposto a quello delle Grandes Écoles instaurato in Francia. (Non si può prevedere se gli studi d'ingegneria sopravviveranno alla riforma che sta per essere inaugurata.)

$$< \int_0^{n+1} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n+1}\right)^{(n+1)} dt = \Gamma_{n+1}(x) < \int_0^{n+1} t^{x-1} e^{-t} dt < \Gamma(x) \quad .$$

D'altra parte, se si fissa $0 < a < n$, si ha pure

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k(x) > \int_0^a t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \quad .$$

Ma $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ converge uniformemente a e^{-t} e quindi, si può passare al limite sotto il segno d'integrale, ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x) \geq \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt \quad .$$

Poiché ciò vale per ogni $a > 0$, il confronto con la disuguaglianza precedente dà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x) \quad .$$

Abbiamo dunque stabilito la formula

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = zG(z)e^{\gamma z} \quad .$$

Infine, supposto $0 < \Re z < 1$, possiamo stabilire la seguente formula fondamentale

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \quad .$$

Infatti

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \int_0^\infty s^{-z} e^{-s} ds = \iint_0^\infty t^{z-1} s^{-z} e^{-(t+s)} dt ds \quad ;$$

posto $t = us$, con $0 \leq u < \infty$, si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_0^\infty t^{z-1} s^{-z} e^{-(t+s)} dt ds &= \iint_0^\infty u^{z-1} s^{z-1} s^{-z} e^{-s(1+u)} s ds du = \\ &= \iint_0^\infty u^{z-1} e^{-s(1+u)} ds du = \int_0^\infty u^{z-1} du \int_0^\infty e^{-s(1+u)} ds = \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u} du = \frac{\pi}{\sin \pi z} \end{aligned}$$

Si noti che l'ultimo passaggio si ottiene ricordando il risultato calcolato nell'esempio 1.13.1. Per il principio della continuazione analitica, la formula ottenuta continua a valere in tutto il piano complesso, dunque per ogni valore di z per il quale abbia significato. In particolare possiamo valutare $\Gamma(\frac{1}{2})$. Infatti dalla formula otteniamo $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$, e quindi $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

1.15.1 La Formula di Stirling.

Vogliamo ricordare che vale la seguente formula di Stirling per il logaritmo della funzione $\Gamma(z)$

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + w(z) \quad .$$

Si tratta di valutare il resto $w(z)$ che tende a zero per $|z| \rightarrow \infty$ purché ci si mantenga nel piano complesso in una regione che esclude un settore racchiudente il semiasse reale negativo. Tale settore si può individuare come segue: ha vertice in $x = 2$ e semiapertura $\frac{\pi}{6}$. Tralasciando i lunghi calcoli si trova la seguente valutazione di $w(z)$

$$|w(z)| < \begin{cases} \frac{1}{24} \frac{\pi}{|z|} + \frac{1}{12} \frac{1}{|z|^2} & : \text{ se } \Re(z) \geq 0, |z| > 1 \\ & : \\ \frac{1}{12} \frac{\pi}{|y|} + \frac{1}{6} \frac{1}{y^2} & : \text{ se } \Re(z) < 0, \Im(z) > 1 \end{cases} .$$

In particolare per valori reali di $x > 1$ si può valutare $\Gamma(x)$ come segue

$$\Gamma(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \dots\right) .$$

Ricordando che $n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, si trova infine

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \cdot \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right) .$$

Capitolo 2

Equazioni differenziali alle derivate parziali: un'introduzione.

2.1 Considerazioni preliminari

Data una funzione $f: \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, con N un numero naturale sufficientemente grande, diremo *equazione differenziale alle derivate parziali d'ordine n* , un'equazione del tipo

$$f(x_1, \dots, x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x_1^n}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x_m^n}) = 0 \quad , \quad (2.1)$$

se la funzione dipende esplicitamente da almeno una delle derivate parziali d'ordine n di z . x_1, \dots, x_m sono le variabili indipendenti; $z(x_1, \dots, x_m)$ è la funzione incognita che si vuole soddisfi l'equazione differenziale stessa. Una funzione $z = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ che soddisfi identicamente l'equazione (2.1) si dirà un *integrale* o *soluzione* dell'equazione stessa. La totalità degli integrali, esclusi al più alcuni di carattere particolare, detti *singolari*, costituisce l'integrale generale dell'equazione. L'equazione si dice in forma *normale* se essa è risolta rispetto a una delle derivate d'ordine massimo rispetto ad un'unica variabile indipendente. Cioè se appare nella forma (per esempio):

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1^n} = g(x_1, \dots, x_m, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x_1^{n-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x_m^n}) \quad . \quad (2.2)$$

Se la funzione f è un polinomio di grado ≤ 1 in z e nelle sue derivate e dipende effettivamente da qualche derivata parziale di z , allora l'equazione si dice *lineare*. È lineare e del primo ordine la seguente equazione:

$$P_1(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial z}{\partial x_2} \dots + P_m(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial z}{\partial x_m} - Q(x_1, \dots, x_m) \cdot z = R(x_1, \dots, x_m) \quad , \quad (2.3)$$

con i coefficienti $P_i(x_1, \dots, x_m)$ non tutti nulli. Un'equazione che sia lineare solo nelle derivate di ordine massimo si dice *quasi lineare* o *semilineare*.

2.2 Alcuni esempi significativi

Al fine di mettere in evidenza la diversità che intercorre tra le equazioni differenziali ordinarie e quelle alle derivate parziali, sarà utile considerare alcuni semplici, ma significativi esempi. Per un'equazione differenziale ordinaria d'ordine n la totalità delle sue soluzioni o *integrale generale* può essere rappresentata, a meno di possibili integrali singolari, da una funzione della variabile indipendente, che dipende pure da n costanti d'integrazione, c_1, c_2, \dots, c_n . Viceversa, per ogni famiglia di funzioni a n parametri, c'è un'equazione differenziale ordinaria d'ordine n cui la funzione soddisfa. Per le equazioni a derivate parziali la situazione è più complicata. Anche in questo caso si può cercare una soluzione generale, ma, in questo caso, gli elementi arbitrari da fissare al fine d'ottenere una soluzione particolare, non sono più, in generale, costanti arbitrarie, ma sono **funzioni** arbitrarie. Consideriamo perciò alcuni casi particolari d'equazioni

Esempio 2.2.1

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad . \quad (2.4)$$

L'equazione chiede di trovare una funzione definita su tutto il piano e derivabile con continuità rispetto a y , che non varia con y ; cioè una funzione che dipende solo da x :

$$u(x, y) = \varphi(x) \quad ,$$

con $\varphi(x)$ funzione arbitraria del suo argomento.

Esempio 2.2.2

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad . \quad (2.5)$$

Si vuole trovare una funzione di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad ,$$

e quindi tale che $\frac{\partial u}{\partial y}$ dipenda solo da y . Allora è $\frac{\partial u}{\partial y} = \phi(y)$ e quindi, con un'integrazione rispetto a y , $u(x, y) = \Phi(y) + \text{costante}$ essendo la costante tale rispetto a y e quindi dipendente, in generale, da x . Cioè

$$u(x, y) = \Phi(y) + \Psi(x) \quad ,$$

dove $\Phi(y)$ e $\Psi(x)$ si supporranno funzioni di classe \mathcal{C}^2 se la stessa regolarità si vuole per la soluzione $u(x, y)$. (In realtà, nel caso specifico, sarà sufficiente supporre che siano di classe \mathcal{C}^1).

Esempio 2.2.3 Consideriamo l'equazione non omogenea

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.6)$$

con $f(x, y)$ continua su \mathbb{R}^2 .

Tale equazione, come facilmente si verifica, ha la soluzione generale

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \Phi(x) + \Psi(y),$$

dove x_0 e y_0 sono costanti arbitrarie.

Esempio 2.2.4

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.7)$$

Per trovare la soluzione dell'equazione data operiamo la seguente sostituzione di variabili

$$\begin{aligned} \xi &= x + y \\ \eta &= x - y \end{aligned}.$$

Per gli operatori differenziali $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ si ottiene allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

e quindi l'equazione diviene

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

cioè

$$2 \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Ne segue che u è funzione della sola ξ . La soluzione generale dell'equazione è dunque

$$u(x, y) = \phi(x + y),$$

con $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Esempio 2.2.5 Consideriamo un'equazione che sia della forma

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \forall (x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (2.8)$$

con $g(x, y)$ funzione di classe $\mathcal{C}^1(A)$, essendo A un aperto in \mathbb{R}^2 .

L'equazione data afferma che la matrice jacobiana

$$J \begin{pmatrix} u & g \\ x & y \end{pmatrix},$$

ha determinante nullo e che perciò $u(x, y)$ dipende funzionalmente da $g(x, y)$, cioè che esiste una funzione $\phi: E(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $E \supseteq g(A)$, tale che $u(x, y) = \phi(g(x, y))$. Ciò si può verificare direttamente come segue, nell'ipotesi che A abbia sezioni connesse (intervalli) con ogni parallela agli assi coordinati. Si faccia il seguente cambiamento di variabili, ammettendo inoltre che $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \neq 0$ in A :

$$\begin{aligned} \xi &= g(x, y) \\ \eta &= y \quad . \end{aligned}$$

Allora, posto $u(x, y) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

Cioè, nel caso specifico

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot 1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} &= \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right) &= \\ - \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned}$$

Perciò, nell'ipotesi che sia $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \neq 0$, si ottiene

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0 \quad ,$$

cioè \tilde{u} non dipende da η , ma solo da ξ . Ossia esiste una funzione ϕ tale che $u(x, y) = \tilde{u}(\xi) = \phi(\xi) = \phi(g(x, y))$. Si può verificare che, sotto condizioni opportune, anche se g dipende esplicitamente da u , continua a valere che la soluzione u è espressa, in forma implicita, dall'espressione $u(x, y) = \phi(g(x, y, u(x, y)))$. Per esempio, la soluzione dell'equazione di Burger

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (2.9)$$

ha una soluzione che si può scrivere, in modo implicito

$$u(x, t) = \phi(x - u \cdot t) \quad .$$

Esercizio 2.2.1 Si studino le condizioni sotto le quali la funzione implicita sopra scritta è soluzione della (2.9).

Esempio 2.2.6 Consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 . \quad (2.10)$$

Posto

$$\begin{aligned} \xi &= x + y \\ \eta &= x - y , \end{aligned}$$

si trova

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} . \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione data, si ottiene

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0 ,$$

che, come è noto, ha soluzione

$$u(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta) ,$$

ossia

$$u(x, y) = \Phi(x + y) + \Psi(x - y) ,$$

dove Φ e Ψ sono due funzioni arbitrarie di classe \mathcal{C}^2 .

Abbiamo dato vari esempi nei quali una soluzione “generale del problema dipende da una o più funzioni arbitrarie. Talvolta si troverà che un'equazione differenziale a derivate parziali si può esprimere come una famiglia di funzioni dipendenti da uno o più parametri reali. Una famiglia a due parametri $u = \phi(x, y, a, b)$, soluzione di un'equazione differenziale del prim'ordine

$$f(x, y, u, p, q) = 0 ,$$

(dove $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $q = \frac{\partial u}{\partial y}$) si dice un *integrale completo* dell'equazione stessa se il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} \phi_a & \phi_{xa} & \phi_{ya} \\ \phi_b & \phi_{xb} & \phi_{yb} \end{pmatrix}$$

è 2. Ciò vale, in particolare, se $\phi_{xa} \cdot \phi_{yb} - \phi_{xb} \cdot \phi_{ya} \neq 0$.

Consideriamo ora l'equazione

$$u^2(p^2 + q^2 + 1) = 1 \quad ,$$

e facciamo l'ipotesi che per ogni punto assegnato $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la soluzione dipenda solo dalla distanza r da tale punto. Posto $x = a + r \cos \theta, y = b + r \sin \theta$, si trova

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta.$$

Dunque $p^2 + q^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 = (u'(r))^2$. L'equazione diviene $(u'(r))^2 = \frac{1}{u^2} - 1$, che ha come soluzione $u^2 = 1 - r^2 = 1 - (x - a)^2 - (y - b)^2$.

Esempio 2.2.7 *Si consideri la famiglia di sfere*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 = 1 \quad .$$

Si mostri che essa è l'integrale completo dell'equazione

$$u^2(p^2 + q^2 + 1) = 1$$

e che esistono integrali singolari, non deducibili dall'integrale completo.

La famiglia data rappresenta la totalità delle sfere di raggio 1 aventi il centro sul piano x, y . Dall'equazione della famiglia, derivando rispetto a x e rispetto a y , si ottiene

$$\begin{aligned} 2(x - a) + 2up &= 0 \\ 2(y - b) + 2uq &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Di qui si ottiene $(x - a) = -u \cdot p$ e $(y - b) = -u \cdot q$. E, finalmente, sostituendo nell'equazione della famiglia

$$u^2(p^2 + q^2 + 1) = 1 \quad .$$

Dunque, eliminando i parametri dalla famiglia di sfere, si ottiene l'equazione della quale ci siamo precedentemente occupati; abbiamo verificato che la famiglia considerata è una soluzione dipendente da due parametri dell'equazione stessa. Poiché, con le notazioni sopra introdotte, abbiamo $\phi_{xa} = -2, \phi_{ya} = 0, \phi_{xb} = 0, \phi_{yb} = -2$, si verifica che $\phi_{xa} \cdot \phi_{yb} - \phi_{xb} \cdot \phi_{ya} = 4 \neq 0$ e dunque che la famiglia a due parametri è un integrale completo dell'equazione data. Questa famiglia ha un involuppo formato dai due piani $u = 1$ e $u = -1$, involuppo che si ottiene eliminando a e b dall'equazione della famiglia e dalle sue derivate rispetto ad a e a b :

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 &= 1 \\ (x - a) &= 0 \\ (y - b) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

L'involuppo non è ottenibile attribuendo ad a e b valori particolari, dunque è un integrale singolare.

Avevamo affermato che un'equazione a derivate parziali ha una soluzione generale dipendente da una o più funzioni arbitrarie. Ora un integrale completo sembra fornire una classe più ristretta di soluzioni. Se imponiamo che $b = w(a)$ essendo w un'arbitraria funzione di classe \mathcal{C}^1 , derivando rispetto ad a l'integrale completo, avremo $\phi_a + \phi_b \cdot w'(a) = 0$. Se si riesce a eliminare a tra quest'ultima equazione e $u = \phi(x, y, a, w(a))$ si troverà una soluzione del tipo $u = \psi(x, y)$ essendo ψ una funzione dipendente dalla funzione arbitraria w .

2.3 Equazioni del primo ordine quasi lineari, in due variabili indipendenti. Caratteristiche

Supponiamo data un'equazione differenziale ordinaria del prim'ordine

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad .$$

Ad ogni punto (x, y) del dominio piano nel quale f è definita si può associare la direzione (o le direzioni) $\frac{dy}{dx}$, che soddisfano l'equazione stessa. Quindi l'andamento delle soluzioni può essere intuito e rappresentato mediante il campo di direzioni. Ciò è particolarmente utile quando ad ogni $(x, y) \in A$, A aperto in \mathbb{R}^2 , corrisponde un solo valore di $\frac{dy}{dx}$, perché allora si ha un'idea immediata dell'andamento delle curve integrali. Un artificio dello stesso tipo è possibile e utile anche nel caso di un'equazione alle derivate parziali. Considereremo il caso più semplice: quello di un'equazione quasi lineare (non più complicata di un'equazione lineare da questo punto di vista) in due variabili indipendenti. Essa si scrive:

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad . \quad (2.11)$$

Useremo talvolta le notazioni, dette di Monge, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, per cui l'equazione (2.11) si riscrive

$$P(x, y, z) \cdot p + Q(x, y, z) \cdot q = R(x, y, z) \quad .$$

Studieremo la struttura delle superficie integrali dell'equazione assegnata e constateremo che essa è costituita da una semplice infinità di linee che appartengono ad una famiglia di linee spaziali dipendenti da un parametro. Queste sono integrali di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, individuato dall'equazione assegnata. Sia σ una superficie integrale di equazione $z = z(x, y)$ soluzione dell'equazione data. Sia $M = (x, y, z)$ un suo punto e sia τ il piano tangente a σ in M . Osserviamo che una soluzione "classica della (2.11) è una funzione di classe \mathcal{C}^1 ; essa è differenziabile in ogni suo punto, e quindi il suo grafico ammette ovunque piano tangente. Se (X, Y, Z) sono le coordinate "correnti sul piano τ , l'equazione del piano tangente è

$$Z - z = (X - x)p + (Y - y)q \quad .$$

La normale a τ (e a σ) in M ha coseni direttori proporzionali a $p, q, -1$, rispettivamente. Dunque il vettore di componenti

$$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$$

giace su τ , poiché dall'equazione risulta: $P(x, y, z) \cdot p + Q(x, y, z) \cdot q - R(x, y, z) = 0$.

Consideriamo poi le linee spaziali λ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},$$

che in ogni punto sono tangenti al vettore di componenti P, Q, R . I coseni direttori della tangente a una linea λ sono proporzionali a $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, e quindi, ponendo uguale a 1 una costante di proporzionalità (il che si può fare: cambia eventualmente un fattore di scala nella variabile t), è

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = R(x, y, z) \end{cases} \quad (2.12)$$

Il sistema (2.12) si dice il *sistema caratteristico* associato all'equazione (2.11) e le curve λ che ne sono soluzione sono dette le *linee caratteristiche* della (2.11). Dimosteremo ora che le superficie integrali sono descritte per mezzo delle linee integrali. Precisamente abbiamo

Teorema 2.3.1 *Siano $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ localmente lipschitziane in $A \subseteq \mathbb{R}^3$, A aperto. Sia $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto che giace su una superficie integrale σ , cioè σ sia grafico di una soluzione della (2.11). Sia inoltre λ una caratteristica passante per M_0 . Allora λ giace per intero su σ . Cioè, se $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$, se $x(t), y(t), z(t), t \in J (\subseteq \mathbb{R})$ è una soluzione di (2.12), allora $(x(t), y(t), z(t)) \in \sigma, \forall t \in J$.*

Dimostrazione. Nell'ipotesi della locale lipschitzianità delle P, Q, R rispetto ai singoli argomenti x, y, z , le funzioni sono complessivamente continue. Infatti, se $P(x, y, z)$ è localmente lipschitziana in $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ significa che esistono un intorno U di M_0 , per esempio $U =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\times]z_0 - \delta, z_0 + \delta[$ e costanti positive L_1, L_2, L_3 tali che, se $(x, y, z), (x', y, z) \in U$, vale $|P(x', y, z) - P(x, y, z)| \leq L_1|x' - x|$ e analogamente per y e z . Ora si ha

$$\begin{aligned} |P(x, y, z) - P(x_0, y_0, z_0)| &\leq |P(x, y, z) - P(x_0, y, z)| + \\ &|P(x_0, y, z) - P(x_0, y_0, z)| + |P(x_0, y_0, z) - P(x_0, y_0, z_0)| \\ &\leq L_1|x - x_0| + L_2|y - y_0| + L_3|z - z_0| \\ &\leq (L_1 + L_2 + L_3)\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\|. \end{aligned}$$

Dunque, se $(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$, vale $P(x, y, z) \rightarrow P(x_0, y_0, z_0)$. Analogamente per $Q(x, y, z)$ e $R(x, y, z)$ che sono dunque funzioni continue nel complesso delle variabili in U . Un sistema come il (2.12) nel quale P, Q, R non dipendono esplicitamente dalla variabile indipendente t , si dice *autonomo*. Poiché P, Q, R sono localmente lipschitziane rispetto alle singole variabili x, y, z e globalmente continue rispetto alle stesse, esiste una e una sola soluzione locale del sistema. Sia λ_0

la proiezione di λ sul piano x, y . La curva λ_0 ha equazioni $x = x(t), y = y(t)$. In corrispondenza ai punti di λ_0 i punti su λ e σ hanno quote, rispettivamente, $z(t)$ e $z_1(t) = z(x(t), y(t))$. Mostriamo che $z(t)$ e $z_1(t)$ coincidono. Infatti

$$\begin{aligned} z'(t) - z_1'(t) &= R(x(t), y(t), z(t)) - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \\ R(x(t), y(t), z(t)) - \frac{\partial z}{\partial x} P(x(t), y(t), z(t)) - \frac{\partial z}{\partial y} Q(x(t), y(t), z(t)) &= 0, \end{aligned}$$

poiché vale (2.11). Ciò vale per ogni $t \in J$, J essendo un intervallo contenente t_0 . Dunque $z(t) - z_1(t)$ è costante in J . Ma $z(t_0) - z_1(t_0) = 0$ e quindi $z_1(t) = z(t), \forall t \in J$. Ossia tutti i punti della caratteristica λ stanno su σ . \square

Per l'unicità della soluzione del sistema delle caratteristiche si richiede che ovunque nel campo di variabilità di x, y, z , non siano nulli negli stessi punti $P(x, y, z)$ e $Q(x, y, z)$. L'ipotesi che P e Q non abbiano punti d'annullamento comuni assicura che curve λ distinte non si incontrino. I punti in cui $P(x, y, z)$ e $Q(x, y, z)$ si annullano contemporaneamente si dicono *punti singolari* del sistema caratteristico.

2.4 Problema di Cauchy per le equazioni quasi lineari del prim'ordine

Data l'equazione

$$P(x, y, z) \cdot p + Q(x, y, z) \cdot q = R(x, y, z) \quad , \quad (2.13)$$

e la curva Γ di equazioni

$$\begin{cases} x = \phi(\tau) \\ y = \psi(\tau) \\ z = \omega(\tau) \end{cases} \quad , \quad (2.14)$$

ci proponiamo di risolvere il seguente problema di Cauchy: costruire una superficie integrale $z(x, y)$ soluzione della (2.13) che passa per la Γ , cioè tale che $z(\phi(\tau), \psi(\tau)) = \omega(\tau)$. Ammettendo che tale superficie σ esista noi cercheremo una sua rappresentazione nella forma parametrica

$$\begin{cases} x = x(t, \tau) \\ y = y(t, \tau) \\ z = z(t, \tau) \end{cases} \quad . \quad (2.15)$$

Sia M_0 il punto di Γ che corrisponde al valore τ_0 del parametro. Sia λ_{τ_0} la caratteristica che passa per M_0 ; tale caratteristica giace per intero su σ e le sue equazioni si trovano integrando il sistema

caratteristico

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = R(x, y, z) \end{cases}, \quad (2.16)$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0, \tau_0) = \phi(\tau_0) \\ y(0, \tau_0) = \psi(\tau_0) \\ z(0, \tau_0) = \omega(\tau_0) \end{cases}. \quad (2.17)$$

Le funzioni trovate saranno, come funzioni di t , soluzioni di (2.16) e come funzioni di τ soddisfano la condizione (2.17). Al variare di τ_0 il punto M_0 varia su Γ e quindi le corrispondenti caratteristiche varieranno descrivendo la superficie σ . Per l'unicità delle soluzioni del sistema caratteristico due linee caratteristiche non si incontrano nel dominio di definizione. Perciò le funzioni di t e τ danno una descrizione geometrica di σ . Ci chiediamo ora come debba essere assegnata la curva Γ affinché il problema ammetta una e una sola soluzione. Diremo Γ_0 la linea d'equazioni $x = \phi(\tau), y = \psi(\tau)$, proiezione di Γ sul piano x, y . Γ_0 si dirà la *linea portante i dati*, poiché in ogni suo punto è assegnato il valore $z = \omega(\tau)$ della superficie integrale. Diremo poi $\lambda_{0,\tau}$ la proiezione di λ_τ sul piano x, y , di equazioni

$$\begin{cases} x = x(t, \tau) \\ y = y(t, \tau) \end{cases}. \quad (2.18)$$

Cerchiamo dunque le condizioni che ci permettono di porre in forma cartesiana le equazioni parametriche della superficie integrale σ .

Supponiamo che, in un certo campo Ω di variabilità di t e τ , il determinante del jacobiano

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \tau)} = \det J \begin{pmatrix} x & y \\ t & \tau \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.19)$$

allora dalle (2.18) si possono ricavare t e τ in funzione di x e y , dal momento che le funzioni $x = x(t, \tau), y = y(t, \tau)$ sono funzioni di classe \mathcal{C}^1 , definite su un aperto Ω del piano t, τ , a valori in un aperto A del piano x, y . Se il detto determinante è non nullo in Ω , l'invertibilità è assicurata almeno tra un aperto $\Omega' \subseteq \Omega$ e un aperto $A' \subseteq A$ (Teorema di invertibilità locale per funzioni di classe \mathcal{C}^1). Sostituendo nella terza equazione, si ottiene l'equazione cartesiana della superficie σ

$$z = z(t(x, y), \tau(x, y)) = z(x, y): A' \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

Se il jacobiano soddisfa la condizione (2.19) per $t = 0$ e per $a \leq \tau \leq b$, essendo $[a, b]$ l'intervallo o anche parte dell'intervallo di definizione di Γ , allora esiste un dominio rettangolare $] - h, h[\times [a, b]$ (o $] - h, h[\times] a - k, b + k[$ se $[a, b]$ è una parte propria dell'intervallo illimitato sul quale è definita Γ), (relativamente) aperto, nel quale la (2.19) è soddisfatta. Senza fare ulteriori restrizioni sul dominio,

supponiamo che quello detto sia l' Ω' sul quale vale l'invertibilità. Riscrivendo la (2.19), dopo avere sostituito alle derivate i loro valori per $t = 0$, si ottiene

$$\begin{vmatrix} P(\phi(\tau), \psi(\tau), \omega(\tau)) & Q(\phi(\tau), \psi(\tau), \omega(\tau)) \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} & \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.21)$$

Dobbiamo dunque verificare che la (2.20) fornisce la soluzione del problema di Cauchy (2.13) con la condizione "iniziale $z(\phi(\tau), \psi(\tau)) = \omega(\tau)$ ". Dall'uguaglianza

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} \end{cases},$$

si trova

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \tau} & -\frac{\partial y}{\partial t} \\ -\frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial x}{\partial t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

dove $J = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \tau)}$. Allora

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{J} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial z}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{J} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \end{cases}. \quad (2.23)$$

Perciò si trova alla fine:

$$\begin{aligned} P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} (P \frac{\partial y}{\partial \tau} - Q \frac{\partial x}{\partial \tau}) + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial z}{\partial \tau} (-P \frac{\partial y}{\partial t} + Q \frac{\partial x}{\partial t}) \\ &= \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \cdot J + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial z}{\partial \tau} (-PQ + QP) = \frac{\partial z}{\partial t} = R \quad . \end{aligned} \quad (2.24)$$

A $x = x(0, \tau) = \phi(\tau)$, $y = y(0, \tau) = \psi(\tau)$, cioè $(x, y) \in \Gamma_0$, per la biunivocità della corrispondenza tra Ω' e A' corrispondono i valori $t(\phi(\tau), \psi(\tau)) = 0$ e $\tau(\phi(\tau), \psi(\tau)) = \tau$. Perciò $z(0, \tau) = z(\phi(\tau), \psi(\tau)) = \omega(\tau)$, e quindi anche la condizione iniziale è soddisfatta.

Osserviamo che $\frac{\partial x}{\partial t}|_{t=0}$ e $\frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0}$ sono proporzionali ai coseni direttori della tangente a $\lambda_{0,\tau}$ in un certo punto, mentre $\frac{\partial x}{\partial \tau}|_{t=0}$ e $\frac{\partial y}{\partial \tau}|_{t=0}$ sono proporzionali ai coseni direttori della tangente a Γ_0 nello stesso punto. Il modulo del jacobiano è perciò il modulo del prodotto vettoriale di tali vettori tangenti a $\lambda_{0,\tau}$ e Γ_0 . Esso soddisferà la condizione (2.21) purché $\lambda_{0,\tau}$ sia linea regolare, cioè purché $P(x, y, z)$ e $Q(x, y, z)$ non siano contemporaneamente nulli, purché sia regolare Γ_0 , cioè purché $\phi'(\tau)$ e $\psi'(\tau)$ non siano contemporaneamente nulli e purché $\lambda_{0,\tau}$ e Γ_0 non siano tangenti. Diremo che in questo caso la linea portante i dati non è in alcun punto caratteristica.

Dunque abbiamo dimostrato il seguente

Teorema 2.4.1 *Siano $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ localmente lipschitziane in $A \subseteq \mathbb{R}^3$, A aperto. Supponiamo inoltre che $P(x, y, z)$ e $Q(x, y, z)$ non si annullino contemporaneamente in uno stesso punto e che nessun punto della linea portante i dati sia caratteristico. Allora esiste localmente una e una sola soluzione dell'equazione (2.13) che passa per la curva Γ d'equazioni (2.14).*

□

Supponiamo poi che $\lambda_{0,\tau}$ e Γ_0 siano tangenti in un solo punto. Γ verrà spezzata in due curve Γ' e Γ'' . Possiamo costruire la superficie σ' relativa a Γ' e σ'' relativa a Γ'' . La riunione dei grafici delle due superficie può essere grafico di una superficie σ continua ma eventualmente priva di derivate continue, oppure può non essere il grafico di una funzione o almeno di una funzione continua. Potremo ancora assumere che si tratti di una soluzione “generalizzata se il grafico è quello di una funzione continua. Altrimenti il problema considerato non ammetterà soluzione.

Se, passando a un ulteriore caso estremo, totalmente diverso, la curva Γ è ovunque caratteristica, conducendo per un punto di essa una curva Λ , ovunque non caratteristica, si potranno condurre le caratteristiche dai punti di Λ costruendo così una soluzione passante per Γ . Ma di curve come la Λ ce ne sono infinite e quindi ci saranno infinite soluzioni al problema di Cauchy, se la curva Γ iniziale è ovunque caratteristica. Abbiamo dunque dimostrato che il problema di Cauchy per un'equazione quasi lineare del prim'ordine può avere una e una sola soluzione locale, oppure può non avere soluzione o averne infinite. (Si veda, più avanti, il paragrafo 2.7 su esempi d'onde d'urto.)

2.5 Equazioni lineari del prim'ordine

Esamineremo ora il caso molto semplice delle equazioni lineari e omogenee in n variabili indipendenti.

Sia data l'equazione lineare

$$X_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad . \quad (2.25)$$

Supponiamo che u_1, \dots, u_k siano soluzioni di (2.25) e che $F: A \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto, sia una funzione di classe \mathcal{C}^1 . Allora si ha

Teorema 2.5.1 *Nelle ipotesi sopra dette, se*

$$(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_k(x_1, \dots, x_n)) \in A \text{ per } (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,$$

allora

$$u(x_1, \dots, x_n) = F(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_k(x_1, \dots, x_n))$$

è una soluzione dell'equazione (2.25).

Dimostrazione. Infatti si ha

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^k \frac{\partial F}{\partial u_l} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \quad .$$

Sia inoltre $X_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Si faccia il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi_1 &= u_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_{n-1} &= u_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \xi_n &= x_n \end{cases} .$$

Allora si trova, utilizzando le nuove variabili

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial v}{\partial \xi_{n-1}} \cdot \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial \xi_n} \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} ,$$

($i = 1, \dots, n$). Ora $\frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} = 0$, per $i = 1, \dots, n - 1$, mentre vale 1, per $i = n$. Perciò si ha

$$0 = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) + \dots + \frac{\partial v}{\partial \xi_{n-1}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i} \right) + X_n \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi_n} ,$$

e dunque

$$X_n \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi_n} = 0 \quad ,$$

cioè

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_n} = 0 \quad ,$$

in Ω , essendo ivi $X_n \neq 0$. In definitiva, se Ω ha sezioni connesse rispetto agli iperpiani coordinati, v non dipende da ξ_n ma solo da ξ_1, \dots, ξ_{n-1} , cioè $v = F(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, e quindi

$$v(x_1, \dots, x_n) = F(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_{n-1}(x_1, \dots, x_n)) \quad . \square$$

Consideriamo ora il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie, associato alla (2.25)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad . \tag{2.27}$$

Una linea che in ogni punto soddisfi questo sistema (2.27) si dice una *linea caratteristica* associata alla (2.25) e il sistema (2.27) si dice il *sistema caratteristico* associato all'equazione (2.25). Rispetto al caso quasi lineare trattato in precedenza per l'equazione (2.11) e sistema (2.12), possiamo notare che qui manca l'equazione relativa alla funzione incognita u . Per completezza potremmo aggiungerla: $\frac{du}{dt} = 0$. Ciò ci dice che la funzione incognita è costante lungo una linea caratteristica. In generale, una funzione $u = f(x_1, \dots, x_n)$ tale che $f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ sia costante lungo una linea caratteristica, si dice un *integrale primo* del sistema (2.27). È facile riconoscere che se

$u = f(x_1, \dots, x_n)$ e $f(x_1, \dots, x_n)$ è un integrale primo, allora u è un integrale della (2.25). Infatti, tenendo conto che $f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \text{costante}$, si ha

$$\frac{d}{dt}f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} = 0.$$

Ricordando poi che $\frac{dx_i}{dt} = X_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$), si ottiene

$$X_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad .$$

Si può concludere con il seguente

Teorema 2.5.3 *Se sono noti $n - 1$ integrali primi funzionalmente indipendenti di (2.27), integrali che scriveremo nella forma $u_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, ($i = 1, 2, \dots, n - 1$), e F è una funzione di classe C^1 , allora*

$$u = F(u_1, \dots, u_{n-1})$$

è la soluzione generale dell'equazione (2.25). In altre parole, la soluzione generale del sistema delle caratteristiche (2.27) conduce alla soluzione generale dell'equazione (2.25). \square

2.6 Esempi ed esercizi

Ci dedicheremo alla risoluzione di alcuni esempi tipici d'equazioni lineari o quasi lineari del prim'ordine, usando il metodo delle caratteristiche.

Esempio 2.6.1 *Usando il metodo delle caratteristiche, si determini la soluzione dell'equazione alle derivate parziali*

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = u^2 \quad \text{in } \Omega = \{(x, y) : x > 0, y > 0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(1, y) = y \quad \text{per } y \geq 0 \quad .$$

Il sistema caratteristico in questo caso è

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 2y \\ \frac{du}{dt} = u^2 \end{cases} \quad , \quad (2.28)$$

con le condizioni iniziali lungo ogni caratteristica

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = y_0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad . \quad (2.29)$$

La soluzione immediata è

$$\begin{cases} x(t) &= e^t \\ y(t) &= y(0)e^{2t} \\ \frac{-1}{u} + \frac{1}{u(0)} &= t \end{cases}, \quad (2.30)$$

Di qui si trova che l'equazione delle proiezioni delle linee caratteristiche sul piano x, y sono $y = y(0) \cdot x^2$ ossia $\frac{y}{x^2} = y(0) = \text{costante}$. La costante varia da caratteristica a caratteristica; se consideriamo un punto $(x, y) \in \Omega$ esso interseca l'asse $x = 1$ nel punto $y(0) = \frac{y}{x^2}$. Si ha poi che $t = \log x$ e che $u(0) = y(0) = \frac{y}{x^2}$. Facilmente si trova $u(t) = \frac{y(0)}{1 - y(0)t}$, e, sostituendo i valori in termini di x e y , finalmente

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 - y \log x}. \quad (2.31)$$

Verifichiamo che quella data sia la soluzione cercata. Se $x = 1$, si trova immediatamente $u(1, y) = y$. Si trova poi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y(2x - \frac{y}{x})}{(x^2 - y \log x)^2},$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{(x^2 - y \log x)^2}.$$

E finalmente

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2}{(x^2 - y \log x)^2} = u^2.$$

Esempio 2.6.2 Usando il metodo delle caratteristiche, si determini per i valori di x e y tali che $x \geq 0, y \geq 0$ la soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad \text{in } \Omega = \{(x, y): x > 0, y > 0\},$$

che soddisfa la condizione

$$u(x, 0) = x^2 \text{ per } x \geq 0.$$

Il sistema caratteristico si scrive

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x \\ \frac{du}{dt} &= u \end{cases},$$

con le condizioni iniziali lungo ogni caratteristica

$$\begin{cases} x(0) = \xi \\ y(0) = 0 \\ u(0) = \xi^2 \end{cases} .$$

Abbiamo indicato, per maggiore chiarezza, con ξ il valore iniziale $x(0)$ lungo ogni assegnata caratteristica. Sul piano x, y , l'equazione della linea caratteristica, ottenuta moltiplicando la prima equazione per x e la seconda per $-y$ e sommando, è

$$x^2 - y^2 = x(0)^2 - y(0)^2 = \xi^2 .$$

Inoltre, derivando la prima equazione e tenendo conto della seconda, si trova pure

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0 .$$

Dunque la soluzione è del tipo $x(t) = Ae^t + Be^{-t}$ e $y(t) = Ae^t - Be^{-t}$, con le condizioni $x(0) = \xi$ e $y(0) = 0$. Si trova finalmente $x(t) = \frac{\xi}{2} \cdot (e^t + e^{-t}) = \xi \cosh(t)$ e $y(t) = \xi \sinh(t)$. Per e^t si trovano i valori

$$e^t = \frac{x}{\xi} \pm \sqrt{\frac{x^2}{\xi^2} - 1} .$$

Poiché ci interessano le soluzioni per $t > 0$ e dunque $e^t > 1$, sceglieremo il segno $+$, e quindi, $t = \log \frac{x + \sqrt{x^2 - \xi^2}}{\xi} = \log \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, ricordando che ci interessano le soluzioni per $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Si ottiene poi per la funzione incognita lungo le caratteristiche $u(t) = u(0) e^t = \xi^2 \cdot \frac{x + y}{\xi}$, cioè

$$u(x, y) = (x + y)\sqrt{x^2 - y^2} .$$

Si verifica immediatamente che $u(x, 0) = x^2$; inoltre

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2 + xy - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2 - xy - 2y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} \end{cases} ,$$

e, finalmente

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2y - xy^2 + x^3 - y^3}{\sqrt{x^2 - y^2}} = u .$$

Esempio 2.6.3 Usando il metodo delle caratteristiche, si determini per i valori di x e y tali che $x \geq 0, y \leq 0$ la soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = u^2 \quad \text{in } \Omega = \{(x, y): x > 0, y < 0\} ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(x, 0) = x^2 \quad \text{per } x \geq 0 .$$

Il sistema caratteristico si scrive

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \\ \frac{du}{dt} = u^2 \end{cases} ,$$

con le condizioni iniziali lungo ogni caratteristica

$$\begin{cases} x(0) = \xi \\ y(0) = 0 \\ u(0) = \xi^2 \end{cases} .$$

Sul piano x, y , l'equazione della linea caratteristica, ottenuta moltiplicando la prima equazione per x e la seconda per y e sommando, è

$$x^2 + y^2 = x(0)^2 + y(0)^2 = \xi^2 .$$

Inoltre, derivando la prima equazione e tenendo conto della seconda, si trova pure

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 .$$

Dunque la soluzione è del tipo $x(t) = A \cos t + B \sin t$ e $y(t) = -A \sin t + B \cos t$, con le condizioni $x(0) = \xi$ e $y(0) = 0$. Si trova finalmente $x(t) = \xi \cos(t)$ e $y(t) = -\xi \sin(t)$, essendo $\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$.

L'integrazione di $\frac{du}{dt} = u^2$ fornisce $u(t) = \frac{u(0)}{1 - u(0) \cdot t}$. Ora poiché ci interessano i valori di $x \geq 0$

e di $y \leq 0$, la scelta $t = \arccos \frac{x}{\xi}$ con $0 \leq t \leq \pi/2$ è quella adatta. Allora varrà $u(t) = \frac{\xi^2}{1 - \xi^2 \cdot t}$ e quindi

$$u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 - (x^2 + y^2) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} .$$

Si trova immediatamente che $u(x, 0) = x^2$ (si ricordi che $\arccos(1) = 0$). Per comodità di scrittura, indichiamo con D il denominatore della frazione che rappresenta $u(x, y)$. Allora si trova

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x + y(x^2 + y^2)}{D^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y - x(x^2 + y^2)}{D^2} \end{cases} .$$

Converrà ricordare, per evitare errori, che, nel campo di variabilità considerato, $\sqrt{y^2} = -y$. È allora facile riconoscere che

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{D^2} = u^2 .$$

Lasciamo i seguenti esercizi alla buona volontà del lettore

Esercizio 2.6.1 . Usando il metodo delle caratteristiche, si determini la soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = -u \quad \text{in } \Omega = \{(x, y): x > 1, y > 0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(1, y) = y \quad \text{per } y \geq 0 \quad .$$

Esercizio 2.6.2 . Usando il metodo delle caratteristiche, si determini la soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$2y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad \text{in } \Omega = \{(x, y): x > 0, y < 0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(x, 0) = x \quad \text{per } x > 0 \quad .$$

Esercizio 2.6.3 . Usando il metodo delle caratteristiche, si determini la soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - 2x \frac{\partial u}{\partial y} = u^2 \quad \text{in } \Omega = \{(x, y): x > 0, y < 0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(x, 0) = x^2 \quad \text{per } x > 0 \quad .$$

Esercizio 2.6.4 . Usando il metodo delle caratteristiche, si determini la soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$4y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad \text{in } \Omega = \{(x, y): x > 0, y < 0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(x, 0) = x^2 \quad \text{per } x > 0 \quad .$$

Esercizio 2.6.5 . Usando il metodo delle caratteristiche, si determini la soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + 4x \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad \text{in } \Omega = \{(x, y): x > 0, y > 0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(0, y) = y \quad \text{per } y > 0 \quad .$$

2.7 Il Teorema di Cauchy–Kovalevskaja

Fino ad ora ci siamo occupati solamente della teoria delle equazioni del prim'ordine. Cerchiamo di capire che cosa accade se da un'equazione si passa ad un sistema di N equazioni in N funzioni incognite delle $n + 1$ variabili indipendenti (t, x_1, \dots, x_n) . Supporremo inoltre che il sistema sia dato in forma normale.

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_N, \dots, \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \dots) \quad (2.32)$$

con $i, j = 1, 2, \dots, N$ e $k_0 + k_1 + \dots + k_n = k \leq n_j$, $k_0 < n_j$. Per ogni funzione u_i il numero n_i dà l'ordine massimo della derivata di u_i che compare nel sistema (2.32).

Supponiamo ora che, per un valore assegnato di t , per esempio $t = 0$, siano dati i valori iniziali delle funzioni incognite e delle loro derivate rispetto a t fino all'ordine $n_i - 1$. Cioè siano assegnate

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \phi_i^{(k)}(x_1, \dots, x_n) \quad (k = 0, 1, \dots, n_i - 1), \quad (i = 1, \dots, N), \quad t = 0. \quad (2.33)$$

Il problema di Cauchy per il sistema (2.32) consiste nel trovare una soluzione soggetta alle *condizioni iniziali* (2.33).

Prima di passare all'enunciato del Teorema di Cauchy–Kovalevskaja¹ definiremo la nozione di funzione analitica di più variabili. Diremo che una funzione $F(z_1, z_2, \dots, z_m)$ di m variabili complesse è analitica in un intorno di un punto $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0)$ se essa è somma di una serie di potenze multiple, convergente per valori sufficientemente piccoli di $|z_j - z_j^0|$:

$$F(z_1, z_2, \dots, z_m) = \sum_{k_1, \dots, k_m} A_{k_1, \dots, k_m} (z_1 - z_1^0)^{k_1} \dots (z_m - z_m^0)^{k_m}. \quad (2.34)$$

I coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor sono dati da

$$A_{k_1, \dots, k_m} = \frac{1}{k_1! \dots k_m!} \left(\frac{\partial^{k_1 + k_2 + \dots + k_m} F}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \dots \partial z_m^{k_m}} \right)_{(z_j = z_j^0)}.$$

Possiamo ora enunciare

¹Sofia Vassiljevna Kovalevskaja (1850, Mosca - 1891, Stoccolma). Figlia del generale Vassilj Korvin-Krukovskij e di Velizaveta Shubert fu attratta dalla matematica, in giovane età dai discorsi dello zio Pjotr e, all'età di 11 anni, dalle pagine di un trattato di Ostrogradskij sul calcolo differenziale e integrale, pagine usate per tappezzare la sua cameretta. Il tutore di famiglia, notando la sua predisposizione, consigliò il padre di farle studiare matematica, cosa che il padre avversò in ogni modo. Continuò a studiare di nascosto libri di matematica, durante la notte, quando la famiglia dormiva. All'età di diciottanni, per sottrarsi alla famiglia si sposò nominalmente con un giovane paleontologo Vladimir Kovalevskij, dal quale ebbe una figlia e che esasperato da continui contrasti con lei s'uccise nel 1883. Nel 1869 si recò all'Università di Heidelberg dove non poté iscriversi, poiché ciò era precluso alle donne. Si spostò nel 1871 a Berlino, dove, non potendo frequentare ufficialmente l'università, divenne allieva privata di Weierstraß. Sotto la sua guida nel 1874 completò tre lavori, uno sulle equazioni differenziali a derivate parziali – quello che qui c'interessa – uno sugli integrali abeliani e uno sugli anelli di Saturno. Ottenne il dottorato nello stesso anno dall'università di Göttingen. Dopo molte insistenze da parte di Weierstraß e Mittag-Leffler riuscì a ottenere un incarico d'insegnamento nell'università di Stoccolma nel 1884, divenendo il primo cattedratico donna in Matematica (dopo Maria Gaetana Agnesi, a Bologna nel 1750) nel 1889.

Teorema 2.7.1 [di Cauchy-Kovalevskaja.] *Si supponga che tutte le funzioni f_i di (2.32) siano analitiche in un intorno del punto*

$$(t = 0, x_1^0, \dots, x_n^0, \dots, \phi_{j,k_0,k_1,\dots,k_n}^0, \dots)$$

dove si è posto

$$\phi_{j,k_0,k_1,\dots,k_n}^0 = \left(\frac{\partial^{k-k_0} \phi_j^{k_0}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right)_{(x_i=x_i^0)},$$

e che tutte le funzioni $\phi_j^{(k)}$ siano analitiche in un intorno di (x_1^0, \dots, x_n^0) . Allora il problema di Cauchy ha una e una sola soluzione analitica in un intorno del punto $(t = 0, x_1^0, \dots, x_n^0)$.

La dimostrazione del teorema si basa su un'abile generalizzazione del metodo usato da Cauchy per dimostrare l'esistenza e unicità della soluzione analitica per un sistema d'equazioni ordinarie, metodo detto "della maggiorante". Non dimostreremo tale teorema. Tuttavia, per comprendere il procedimento che si segue nel determinare la soluzione, illustreremo un procedimento simile in un caso semplificato.

Sia data un'equazione del prim'ordine in forma normale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}) \quad , \quad (2.35)$$

e si voglia trovare quella funzione $u(t, x)$ tale che $u(0, x) = \phi(x)$, per $a \leq x \leq b$. La linea portante i dati è il segmento $[a, b]$ dell'asse x . Ammettiamo che $u(t, x)$ esista e sia sviluppabile in serie di Taylor rispetto a t , con coefficienti dipendenti da x . È, "a priori, un'ipotesi diversa da quella dell'analiticità della funzione $f(t, x, u, p)$ e di $\phi(x)$. Può essere implicata da quest'ultima se siamo in grado di riordinare le serie rispetto a t , sommando ogni singolo termine in x .

Allora

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x, 0) \cdot \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot \frac{t^n}{n!}. \quad (2.36)$$

Vediamo come si possano determinare le funzioni incognite $g_n(x)$. Innanzi tutto $g_0(x) = \phi(x)$, e inoltre

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, 0) = \frac{\partial^k g_0}{\partial x^k} = \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}.$$

Per determinare $g_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$, abbiamo a disposizione l'equazione (2.36), nella quale si ponga $t = 0$:

$$g_1(x) = f(0, x, \phi(x), \phi'(x)) \quad .$$

Tutte le derivate miste del tipo $\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^k \partial t}(x, 0)$ si calcolano come $g_1^{(k)}(x)$. Per ottenere la derivata seconda rispetto a t , deriveremo l'equazione data rispetto a t (naturalmente ciò è giustificato dal fatto che supponiamo f analitica).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial f(t, x, u, p)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$$

dove $p = \frac{\partial u}{\partial x}$. Per $t = 0$ si trova

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, x) = g_2(x) = \frac{\partial f(0, x, \phi, \phi')}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot g_1(x) + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot g_1'(x).$$

Dopo avere determinato $g_2(x)$, si può proseguire a calcolare tutti gli altri coefficienti, almeno in linea di principio. Se tutte le funzioni che intervengono sono analitiche in un intorno di $(0, x^0)$, con $a \leq x^0 \leq b$, il Teorema di C-K afferma che la serie di funzioni in x e t converge in un intorno di $(0, x^0)$. Il metodo qui presentato si può generalizzare a un sistema normale arbitrario.

2.8 Onde di rarefazione e onde d'urto

Studieremo il caso di un'equazione quasi lineare particolare, detta equazione di Burger, mostrando come, nel caso d'equazioni non lineari, la discontinuità dei dati iniziali si propaghi nel tempo. Inoltre mostreremo come, in certi casi, dati iniziali non discontinui diano luogo a soluzioni che manifestano discontinuità (dette onde d'urto). Questo fatto mette in evidenza che l'esistenza di una soluzione locale affermata nel teorema (2.4.1) è effettivamente locale e non è estendibile indefinitamente nel tempo anche in presenza di funzioni lisce.

Consideriamo il seguente problema ai valori iniziali. È data l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad (2.37)$$

con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x > 0 \end{cases} . \quad (2.38)$$

Si osservi che la funzione non è estendibile ad una funzione continua su tutto \mathbb{R} . Diremo brevemente che il dato iniziale è discontinuo. Il sistema caratteristico è

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{du}{dt} = 0 \end{cases} . \quad (2.39)$$

(Abbiamo identificato t con la coordinata corrente lungo la caratteristica. D'altra parte, chiamando s la coordinata corrente della caratteristica, la prima equazione del sistema caratteristico è $\frac{dt}{ds} = 1$ e quindi $t = s - s_0$, cioè t coincide con s , a meno di una costante). Dunque la funzione u è costante lungo ogni caratteristica. Precisamente vale costantemente 1 lungo le caratteristiche uscenti dai punti $x(0) < 0$ e vale 2 lungo le caratteristiche uscenti dai punti $x(0) > 0$. Tenuto conto di ciò, $x(t) = u(x(0))t + x(0)$. Le linee caratteristiche uscenti dai punti $\xi = x(0) < 0$ sono $x(t) = t + \xi$ se $\xi < 0$, sono $x(t) = 2t + \xi$, se $\xi > 0$. Cioè $u(x, t) = 1$, se $\xi = x - t < 0$, $u(x, t) = 2$, se $x - 2t > 0$. Tenendo conto che $t > 0$, ciò si può anche scrivere

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{x}{t} < 1 \\ 2 & \text{se } \frac{x}{t} > 2 \end{cases} . \quad (2.40)$$

Quando $1 \leq \frac{x}{t} \leq 2$ la soluzione non è definita. Possiamo estendere in modo continuo la soluzione imponendo che valga $\frac{x}{t}$ nella zona in cui non è individuata dal valore iniziale. Ciò equivale a pensare che dal punto $x(0) = 0, t = 0$ escano infinite caratteristiche ognuna avente equazione $\frac{x}{t} = \alpha$, con $1 \leq \alpha \leq 2$.

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{x}{t} < 1 \\ \frac{x}{t} & \text{se } 1 \leq \frac{x}{t} \leq 2 \\ 2 & \text{se } \frac{x}{t} > 2 \end{cases} \quad (2.41)$$

Una situazione di questo tipo, nella quale le linee caratteristiche si distanziano una dall'altra, si dirà un'onda di "rarefazione".

Consideriamo invece una situazione opposta nella quale le linee caratteristiche tendano ad accavallarsi e sovrapporsi, situazione che si dirà "onda d'urto". Consideriamo la stessa equazione di Burger

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ,$$

con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad .$$

Le linee caratteristiche sono in questo caso

$$x(t) = \begin{cases} 2t + \xi & \text{se } \xi < 0 \\ t + \xi & \text{se } \xi > 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Esse portano i valori 2 e rispettivamente 1 per $u(x, t)$. Se $x > t$ uno stesso punto del piano viene raggiunto da entrambe le caratteristiche e sostanzialmente non possiamo decidere quale sia il valore da attribuire alla soluzione in quel punto. Si può concludere che, essendo in presenza di dati discontinui, la descrizione del fenomeno fatta con il calcolo differenziale non è più adeguata. Dovremo modificare la modellizzazione del fenomeno, passando ad una formulazione integrale, per trovare una soluzione soddisfacente.

Più in generale, sia data l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad (2.43)$$

con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = f(x) \quad . \quad (2.44)$$

L'equazione della caratteristica uscente dal punto $x(0)$ è $x(t) = f(x(0)) \cdot t + x(0)$. Supponiamo che le caratteristiche per due punti vicini $x(0)$ e $x(0) + \Delta x$ si incontrino. Allora avremo

$$\begin{cases} x_1(t) = c(f(\xi))t + \xi \\ x_2(t) = c(f(\xi + \Delta x))t + \xi + \Delta x \end{cases} \quad (2.45)$$

Le due linee si incontrano se $c(f(\xi + \Delta x)) < c(f(\xi))$, per $\Delta x > 0$. L'incontro avviene al tempo $t = -\frac{\Delta x}{c(f(\xi + \Delta x)) - c(f(\xi))}$. Se prendiamo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$, si trova che l'incontro avviene al tempo

$$t = -\frac{1}{c'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)} \quad , \quad (2.46)$$

ammesso che $c(u)$ e $f(\xi)$ siano derivabili, cosa che supporremo senz'altro. Affinché sia $t > 0$ come dev'essere, dovrà verificarsi dunque che $c'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) < 0$. Dunque, anche in presenza di dati iniziali derivabili con continuità, può verificarsi l'incontro di caratteristiche e quindi l'insorgere di onde d'urto. Per esempio, se è data l'equazione usuale

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ,$$

con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = -x \quad ,$$

l'equazione delle caratteristiche è $x(t) = -\xi \cdot t + \xi$, essendo $\xi = x(0) = u(x, 0)$. Perciò

$$u(x, t) = -\frac{x}{t-1} \quad .$$

Si constata che tutte le linee caratteristiche passano per $t = 1$; la soluzione non è definita in $t = 1$. A partire da quell'istante si sviluppa un'onda d'urto. Ciò è in accordo con il fatto che $c(u) = u$ e $f(\xi) = -\xi$. Perciò $\frac{dc(f(\xi))}{d\xi} = -1$ e quindi si ottiene, in accordo con la (2.41), $t = 1$ come istante nel quale si sviluppa l'onda d'urto. L'onda d'urto ha equazione $t = 1$. Si noti infatti che passando attraverso questa linea, in corrispondenza ad un valore $x_0 \neq 0$ della coordinata x , si passa dal valore di $u \approx \frac{x_0}{\varepsilon}$ al valore $\approx -\frac{x_0}{\varepsilon}$, con un salto di valore $\approx 2\frac{|x_0|}{\varepsilon}$; qui $\varepsilon = |t - 1|$ e si passa da $(x_0, 1 - \varepsilon)$ a $(x_0, 1 + \varepsilon)$.

Se il dato iniziale è già discontinuo, l'onda d'urto si sviluppa sin dall'istante $t = 0$. Vediamo come si possa definire la posizione dell'onda d'urto (ossia della discontinuità della soluzione). Diciamo $x_u(t)$ la posizione della discontinuità, e siano $\alpha < x_u(t) < \beta$. Supponiamo che l'equazione di Burger si possa scrivere in forma conservativa, cioè che il termine $c(u)\frac{\partial u}{\partial x}$ si possa scrivere come $\frac{\partial q(u)}{\partial x}$. La forma differenziale dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0 \quad ,$$

è adeguata quando $u(x, t)$ è funzione continua e derivabile con continuità delle sue variabili. In particolare $\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial u}{\partial t} dx$ se u e $\frac{\partial u}{\partial t}$ sono continue. Se ciò non vale, la forma corretta dell'equazione è quella integrale. Precisamente

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0 \quad .$$

Tenuto conto della discontinuità in $x_u(t)$, otteniamo

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{x_u(t)} u(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{x_u(t)}^{\beta} u(x, t) dx + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0 \quad .$$

Se indichiamo con $u_l = \lim_{\alpha \rightarrow x_u(t)^-} u(x, t)$ e con $u_r = \lim_{\beta \rightarrow x_u(t)^+} u(x, t)$, otterremo

$$\int_{\alpha}^{x_u(t)} \frac{\partial u}{\partial t} dx + u_l x'_u(t) + \int_{x_u(t)}^{\beta} \frac{\partial u}{\partial t} dx - u_r x'_u(t) + q(u(\beta, t)) - q(u(\alpha, t)) = 0 \quad .$$

Se indichiamo con $[u] = u_r - u_l$ e con $[q] = q(u_r) - q(u_l)$ i salti delle ripetitive quantità attraverso l'onda d'urto, tenendo conto che gli integrali da α a $x_u(t)$ e da $x_u(t)$ a β tendono a 0 per $\alpha \rightarrow x_u(t)$ e per $\beta \rightarrow x_u(t)$, si ottiene

$$u_l x'_u(t) - u_r x'_u(t) + q(u_r) - q(u_l) = 0 \quad ,$$

e quindi

$$x'_u(t) = \frac{[q]}{[u]} \quad . \quad (2.47)$$

Si noti che quanto sopra discusso vale purché $u(x, t)$ sia continua con le sue derivate prime per (x, t) nel dominio della funzione, separatamente per $x < x_u(t)$ e per $x > x_u(t)$, rispettivamente.

Nel caso del quale ci siamo di sopra occupati, avente condizione iniziale

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad ,$$

avremo $u_r = 1$, $u_l = 2$ e quindi $[u] = -1$; $q(u) = \frac{u^2}{2}$ e $[q] = -\frac{3}{2}$. Dunque $x'_u(t) = \frac{3}{2}$ e $x_u(t) = \frac{3}{2} \cdot t$. Definita la posizione dell'onda d'urto nel tempo, avremo finalmente una descrizione completa della soluzione come segue

$$u(x, t) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < \frac{3}{2} \cdot t \\ 1 & \text{se } x > \frac{3}{2} \cdot t \end{cases} \quad . \quad (2.48)$$

2.9 Classificazione delle equazioni del second'ordine a coefficienti costanti

Procederemo alla classificazione delle equazioni del second'ordine in due variabili indipendenti. Supporremo, per semplicità, che i coefficienti dell'equazione siano costanti. La forma generale dell'equazione è dunque del tipo

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = g(x, y), \quad (2.49)$$

con a, b, c, d, e, f costanti reali, se non esplicitamente detto altrimenti. Cominciamo a considerare i termini del second'ordine, che costituiscono un operatore differenziale del second'ordine. Si intende cioè che a ogni funzione $u \in \mathcal{C}^2(A)$ viene associata la funzione continua sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ data da

$$L(u) := a u_{xx}(x, y) + 2b u_{xy}(x, y) + c u_{yy}(x, y) \in \mathcal{C}^0(A). \quad (2.50)$$

Dunque $L: \mathcal{C}^2(A) \rightarrow \mathcal{C}^0(A)$ è un operatore lineare, come facilmente si verifica. Convienne anche introdurre gli operatori differenziali $D_x u := \frac{\partial u}{\partial x}$ e $D_y u := \frac{\partial u}{\partial y}$. Allora, avremo $L = a D_x D_x + 2b D_x D_y + c D_y D_y$. All'operatore L si può associare il *polinomio caratteristico*

$$F(\lambda) = a \lambda^2 + 2b \lambda + c. \quad (2.51)$$

Se λ_1 e λ_2 sono le radici del polinomio caratteristico, è ben noto che esso si può fattorizzare come segue: $F(\lambda) = a \cdot (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2)$. Si può pensare ad un'analogia fattorizzazione dell'operatore L .

$$L = a(D_x - \lambda_1 D_y)(D_x - \lambda_2 D_y).$$

Ciò sarà giustificato se accade che $a(D_x - \lambda_1 D_y)(D_x - \lambda_2 D_y)u = a(D_x - \lambda_2 D_y)(D_x - \lambda_1 D_y)u$, cosicché non importa in quale ordine i due operatori lineari vengano applicati. Ma è facile verificare che i due operatori sono permutabili e che quindi noi potremo accettare la fattorizzazione di L , quale che sia l'ordine dei due fattori lineari. Osserviamo poi che se $(D_x - \lambda_1 D_y)u = 0$ allora $L(u) = 0$; lo stesso accade se $(D_x - \lambda_2 D_y)u = 0$. L'equazione

$$(D_x - \lambda_1 D_y)u = 0$$

ha il sistema caratteristico

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = -\lambda_1 \end{cases} .$$

È immediato trovare la soluzione: $x = t + x_0$, $y = -\lambda_1 t + y_0$. Dunque l'equazione delle linee caratteristiche è $y + \lambda_1 x = \text{cost}$.

Analogamente, l'equazione

$$(D_x - \lambda_2 D_y)u = 0$$

ha come famiglia delle caratteristiche $y + \lambda_2 x = \text{cost}$. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ le due famiglie sono linearmente e quindi funzionalmente indipendenti. Supposto dunque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, operiamo il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi = y + \lambda_1 x \\ \eta = y + \lambda_2 x \end{cases} . \quad (2.52)$$

Posto $u(x, y) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, cioè pensando u come funzione di x e y attraverso la dipendenza di ξ e η da x, y , si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \tilde{u}_\xi \cdot \xi_x + \tilde{u}_\eta \cdot \eta_x = \tilde{u}_\xi \lambda_1 + \tilde{u}_\eta \lambda_2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \tilde{u}_\xi \cdot \xi_y + \tilde{u}_\eta \cdot \eta_y = \tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta \end{cases} .$$

Formalmente, per gli operatori, si ottiene

$$\begin{cases} D_x = \lambda_1 \cdot D_\xi + \lambda_2 \cdot D_\eta \\ D_y = D_\xi + D_\eta \end{cases} \quad (2.53)$$

E dunque

$$\begin{aligned} D_x - \lambda_1 D_y &= (\lambda_2 - \lambda_1) D_\eta, \\ D_x - \lambda_2 D_y &= (\lambda_1 - \lambda_2) D_\xi. \end{aligned}$$

Finalmente, si ottiene

$$L(u) := -a(\lambda_2 - \lambda_1)^2 D_\eta D_\xi u. \quad (2.54)$$

Se $\lambda_2 = \lambda_1 \neq 0$, la sostituzione da fare è invece

$$\begin{cases} \xi = y + \lambda_1 x \\ \eta = y \end{cases} \quad (2.55)$$

Si trova allora

$$\begin{cases} D_x = \lambda_1 \cdot D_\xi \\ D_y = D_\xi + D_\eta \end{cases},$$

e

$$L(u) := -a\lambda_1^2 D_\eta D_\xi u. \quad (2.56)$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $L(u) = a D_x D_x$, è già in forma ridotta.

Definizione . Diremo che l'operatore differenziale L è *iperbolico* se $b^2 - ac > 0$; in questo caso λ_1 e λ_2 sono due numeri reali e distinti.

L si dirà *ellittico* se $b^2 - ac < 0$; in questo caso λ_1 e λ_2 sono due numeri complessi e coniugati.

L si dirà *parabolico* se $b^2 - ac = 0$; in questo caso $\lambda_1 = \lambda_2$.

Le rette $y + \lambda_1 x = \text{cost}$ e $y + \lambda_2 x = \text{cost}$ si dicono le *caratteristiche* dell'operatore L . L'operatore iperbolico ha due famiglie di caratteristiche reali; quello parabolico una, quello ellittico ha due famiglie di caratteristiche complesse. L'operatore iperbolico si trasforma, nelle nuove variabili, in $-a(\lambda_2 - \lambda_1)^2 D_\xi D_\eta$, e quello parabolico in $a\lambda_1^2 D_\eta D_\xi$. Anche l'operatore ellittico ha la forma dell'iperbolico, ma le nuove variabili ξ e η sono complesse coniugate se i coefficienti dell'equazione (2.49) sono reali. Sarà allora conveniente procedere ad un'ulteriore trasformazione, ponendo $\xi = X + iY$ e $\eta = X - iY$. Allora, operando come in precedenza, si trova facilmente $D_X = D_\xi + D_\eta$ e $D_Y = iD_\xi - iD_\eta$. Perciò

$$D_X D_X + D_Y D_Y = 4 D_\xi D_\xi \quad .$$

Allora l'operatore ellittico, nelle nuove variabili, diviene

$$L(u) := -\frac{a}{4} (\lambda_2 - \lambda_1)^2 (D_X D_X + D_Y D_Y)u. \quad (2.57)$$

Rispetto alle nuove variabili introdotte, che ora continueremo a indicare con x e y per comodità, l'equazione di partenza $L(u) + dD_x u + eD_y u + fu = g(x, y)$ assumerà nei casi considerati le seguenti forme

$$\begin{aligned} u_{xy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u &= f(x, y) & \text{(caso iperbolico)} \\ u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u &= f(x, y) & \text{(caso ellittico)} \\ u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u &= f(x, y) & \text{(caso parabolico)}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Possiamo semplificare ulteriormente l'equazione cambiando opportunamente la funzione incognita. Poniamo $u(x, y) = q(x, y) \cdot v(x, y)$, dove $v(x, y)$ sarà la nuova funzione incognita e $q(x, y)$ sarà determinata in modo che l'equazione assuma la forma più semplice possibile. Tenuto conto di ciò, per l'equazione iperbolica si trova

$$q \cdot v_{xy} + (q_y + \alpha q) \cdot v_x + (q_x + \beta q) \cdot v_y + (q_{xy} + \alpha q_x + \beta q_y + \gamma q)v = f.$$

Se si sceglie $q = e^{-\alpha y - \beta x}$, allora $(q_y + \alpha q) = 0$ e $(q_x + \beta q) = 0$. Allora l'equazione diviene

$$v_{xy} + (\gamma - \alpha\beta)v = f(x, y)/q(x, y).$$

Operando in modo analogo anche per le equazioni ellittiche e paraboliche, si trovano finalmente le seguenti *forme canoniche*

$$\begin{aligned} v_{xy} + kv &= \tilde{f}(x, y) & \text{(caso iperbolico)} \\ v_{xx} + v_{yy} + kv &= \tilde{f}(x, y) & \text{(caso ellittico)} \\ v_{yy} + \beta v_x + kv &= \tilde{f}(x, y) & \text{(caso parabolico)}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

2.10 Un esempio d'equazione parabolica: l'equazione del calore

Consideriamo la più semplice delle equazioni paraboliche a coefficienti costanti e omogenea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.60)$$

che si dirà l'equazione del calore in una variabile spaziale. Per quest'equazione considereremo il seguente problema "misto (cioè ai valori iniziali e al contorno). Trovare una soluzione dell'equazione (2.60) che soddisfa inoltre le seguenti condizioni iniziali e al contorno, per $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty[$

$$\begin{cases} u(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = f_1(t), & t \geq 0 \\ u(l, t) = f_2(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

Indicheremo con $Q = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, t \geq 0\}$, con $Q_T = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ e con $\Gamma_T = \{0\} \times [0, T] \cup [0, l] \times \{0\} \cup \{l\} \times [0, T]$. Considereremo poi il problema di determinare una soluzione di (2.60) nei punti interni di Q_T , con condizioni iniziali e al contorno quali sono date in

(2.61), ma limitate ai valori $0 \leq t \leq T$. Supporremo inoltre che $g(x)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ siano funzioni continue e che inoltre $g(0) = f_1(0)$ e $g(l) = f_2(0)$.

Dal punto di vista fisico il problema si può interpretare come quello di determinare la distribuzione di temperatura all'interno di una barra omogenea di lunghezza l data, essendo assegnata la distribuzione di temperatura iniziale $g(x)$ ed essendo assegnate le temperature $f_1(t)$ e $f_2(t)$ ai due estremi della barra. È chiaro che sono state scelte opportune unità di misura per il tempo e lo spazio, affinché i vari coefficienti che intervengono nella formulazione fisica del problema diano luogo a un valore unitario che moltiplica il termine $\frac{\partial u}{\partial t}$. Condizioni al contorno più generali che si possono considerare sono del tipo $\alpha u(x_i, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t) = f_i(t)$ per $t \geq 0$ o per $0 \leq t \leq T$, $i = 1, 2$, con $x_1 = 0$ e $x_2 = l$. Qui si controlla oltre alla temperatura negli estremi della barra, anche il flusso di calore che passa ai due estremi. Si ha il seguente importante risultato

Teorema 2.10.1 (Principio di massimo (minimo)). *Se (2.60) ha una soluzione nei punti interni di Q_T che soddisfa le condizioni al contorno e iniziali (2.61) ed è continua in Q_T allora tale soluzione assume il suo valore massimo (minimo) su Γ_T .*

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema per il massimo. La validità dell'affermazione per il minimo si deduce da quella per il massimo passando a $-u$ e osservando che, essendo l'equazione (2.60) lineare, se u è una soluzione, anche $-u$ lo è; inoltre il massimo di $-u$ è (cambiando il segno) il minimo di u . Sia M il massimo di $u(x, t)$ in Q_T e sia m il massimo di $u(x, t)$ su Γ_T . Osserviamo che essendo Q_T e Γ_T chiusi e limitati in \mathbb{R}^2 e quindi compatti, ed essendo per ipotesi $u(x, t)$ continua in Q_T , allora tali massimi esistono. Supponiamo, per assurdo, $M > m$ e diciamo (x_0, t_0) $0 < x_0 < l$ e $0 < t_0 \leq T$ il punto in cui $u(x_0, t_0) = M$. Consideriamo ora la funzione ausiliaria

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{4l^2}(x - x_0)^2. \quad (2.62)$$

Si valuta facilmente che lungo Γ_T , $v(x, t) \leq m + \frac{M-m}{4} = \frac{M+3m}{4} < M$, mentre $v(x_0, t_0) = M$. Dunque anche $v(x, t)$ (che è continua) assume il suo valore massimo in Q_T in un certo punto $(x_1, t_1) \notin \Gamma_T$. Poiché nei punti che non stanno su Γ_T esistono la derivata seconda rispetto a x due volte e la derivata rispetto a t , in un punto di massimo avremo: $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0$ e $\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0$ ($= 0$ se $t_1 < T$). Perciò in (x_1, t_1) vale

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geq 0. \quad (2.63)$$

Ma il calcolo diretto, in base alla definizione (tenendo conto che $u(x, t)$ è soluzione della (2.60)) ci dà

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{M - m}{2l^2} = -\frac{M - m}{2l^2} < 0. \quad (2.64)$$

Questa contraddizione nasce dal supporre che sia $M > m$. Dunque deve essere $M = m$ e quindi il massimo della soluzione si raggiunge in Γ_T . Analogamente si procede per il minimo. \square

Seguono i seguenti due immediati corollari

Corollario 2.10.1 *La soluzione di (2.60) e (2.61) è unica in Q_T .*

Dimostrazione. Se u_1 e u_2 sono due soluzioni, anche la loro differenza $u = u_1 - u_2$ è una soluzione dell'equazione lineare (2.60) e soddisfa le condizioni (2.61) con dati nulli; cioè $g(x) = f_1(t) = f_2(t) = 0$. Dunque u vale 0 su Γ_T , e quindi il suo valore massimo e minimo su Γ_T sono 0. Ma allora dal principio di massimo segue

$$0 \leq u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq 0.$$

Ossia $u_1(x, t) = u_2(x, t)$. \square

Osservazione 2.10.1 *L'unicità della soluzione si può in realtà asserire per ogni $t \geq 0$. Infatti dato un valore di $t > 0$ basterà assegnare un $T > t$ e ricordare che la soluzione è unica in Q_T . Dunque $u_1(x, t) = u_2(x, t) \quad \forall t \geq 0$ e $\forall 0 \leq x \leq l$.*

Corollario 2.10.2 *La soluzione di (2.60) e (2.61) dipende in modo continuo dai dati iniziali e al contorno.*

Dimostrazione. Supponiamo che siano assegnati valori iniziali e al contorno g^*, f_1^*, f_2^* tali che $|g(x) - g^*(x)| < \varepsilon$, per $0 \leq x \leq l$ e $|f_1(t) - f_1^*(t)| < \varepsilon$, $|f_2(t) - f_2^*(t)| < \varepsilon$ per $0 \leq t \leq T$. Detta $u^*(x, t)$ la soluzione relativa ai dati modificati $*$, anche $u - u^*$ è una soluzione dell'equazione (2.60), avente come dati la differenza dei due. Per il principio di massimo (minimo) è allora evidente che

$$|u^*(x, t) - u(x, t)| < \varepsilon \quad \forall (x, t) \in Q_T.$$

Osservazione 2.10.2 *Il principio di massimo (minimo) è vero, e si dimostra con lo stesso ragionamento, anche se l'equazione è quella più generale*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \tag{2.65}$$

verificata per (x, t) punto interno di $Q_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato semplicemente connesso avente frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente liscia,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

e con le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = g(x) \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{2.66}$$

e al contorno

$$u(y, t) = f(y, t) \quad y \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.67}$$

Qui f e g si suppongono funzioni continue.

Definizione. Un problema ai valori iniziali e al contorno si dice *ben posto secondo Hadamard* se esso ammette una e una sola soluzione dipendente in modo continuo dai dati.

Abbiamo verificato che, per il problema (2.60) con le condizioni iniziali e al contorno (2.61), la soluzione se c'è è unica e dipende in modo continuo dai dati. Non abbiamo ancora dimostrato l'esistenza della soluzione. Lo faremo ora con il metodo di Fourier della *separazione delle variabili*, che però è applicabile solo se le condizioni al contorno sono omogenee. Con metodi che verranno sviluppati in seguito, questa limitazione potrà essere eliminata. Tuttavia, in alcuni casi particolari, la limitazione stessa può essere superata in modo elementare.

Si supponga di conoscere una funzione $v(x, t)$ che soddisfa la (2.60) e tale che inoltre $v(0, t) = f_1(t)$ e $v(l, t) = f_2(t)$ (nulla si chiede sui valori iniziali). Allora, se $u(x, t)$ è una soluzione del problema completo di condizioni iniziali e al contorno, $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ soddisfa l'equazione differenziale, condizioni al contorno omogenee: $w(0, t) = w(l, t) = 0$ e condizioni iniziali $w(x, 0) = g(x) - v(x, 0)$. Quindi se sappiamo trovare una soluzione del problema con condizioni al contorno omogenee, $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$ è la soluzione del problema assegnato. In particolare, se $f_1(t) = T_1 = \text{cost}$ e se $f_2(t) = T_2 = \text{cost}$, $v(x, t) = \frac{T_2 - T_1}{l} \cdot x + T_1$ soddisfa le condizioni al contorno e, banalmente, l'equazione differenziale ($\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0$ e $\Delta v(x, t) = 0$).

Teorema 2.10.2 *Data l'equazione differenziale (2.60) e le condizioni iniziali e al contorno*

$$\begin{cases} u(x, 0) = g(x), 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = 0, t \geq 0 \\ u(l, t) = 0, t \geq 0 \end{cases}, \quad (2.68)$$

esiste una soluzione se $g(x)$ si suppone continua con derivata prima a tratti continua ($g'(x)$ è continua tranne che in un numero finito di punti, nei quali esistono finiti i limiti della derivata da destra e da sinistra).

Dimostrazione. Cerchiamo una soluzione “a variabili separate, cioè una funzione del tipo

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t),$$

prodotto di una funzione della sola x e di una della sola t . Per un'equazione di questo tipo, l'equazione differenziale si scrive

$$X(x) \cdot T'(t) - X''(x) \cdot T(t) = 0 \quad .$$

Poiché cerchiamo una soluzione che non sia identicamente nulla, supporremo che per qualche x e per qualche t siano $X(x) \neq 0$ e $T(t) \neq 0$. In un intorno dei punti detti, potremo dividere i due membri dell'equazione per $X(x) \cdot T(t)$, ottenendo

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0 \quad ,$$

ossia

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{cost} \quad .$$

Infatti poiché abbiamo una funzione della sola t che uguaglia una funzione della sola x , il valore comune delle due funzioni è una costante (reale). Relativamente alla funzione $X(x)$ deve valere l'equazione

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad ,$$

con le condizioni al contorno $X(0) = X(l) = 0$. A seconda dei valori di λ si trovano le seguenti soluzioni.

(a) Se $\lambda > 0$, si trova $X(x) = A \cdot e^{x\sqrt{\lambda}} + B e^{-x\sqrt{\lambda}}$; imponendo le condizioni al contorno, si trova $A = B = 0$ e dunque una soluzione identicamente nulla, che non ci interessa.

(b) Se $\lambda = 0$, l'equazione differenziale ha soluzione $X(x) = Ax + B$. Imponendo le condizioni al contorno, si trova nuovamente $A = B = 0$ e dunque ancora una soluzione identicamente nulla, che non ci interessa.

(c) Se $\lambda < 0$, si trova infine $X(x) = A \cos(x\sqrt{-\lambda}) + B \sin(x\sqrt{-\lambda})$. $X(0) = A = 0$ e $X(l) = B \sin(l\sqrt{-\lambda}) = 0$; quest'ultima equazione ha soluzione con $B \neq 0$, se $l\sqrt{-\lambda} = k\pi$, $k \in \mathbf{N}^+$ (prendendo tutti i valori interi relativi di k , nulla si aggiunge alla generalità della soluzione). Dunque troviamo soluzioni non identicamente nulle in corrispondenza ai valori $\lambda = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}$, che si dicono gli *autovalori* del problema al contorno considerato per l'equazione differenziale ordinaria. Ogni funzione del tipo

$$X_k(x) = B_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad k = 1, 2, \dots$$

è soluzione dell'equazione $X_k''(x) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}X_k(x) = 0$, con $X_k(0) = X_k(l) = 0$. Poiché il valore di λ è ora determinato, dobbiamo trovare una funzione di t che soddisfi

$$T_k'(t) = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}T_k(t) \quad .$$

Si trova immediatamente $T_k'(t) = C_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}$. In definitiva

$$u_k(x, t) = X_k(x) \cdot T_k(t) = c_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \quad .$$

Ovviamente una somma di un numero finito di tali soluzioni è ancora soluzione dell'equazione differenziale, non più a variabili separate, che soddisfa le condizioni d'annullamento al contorno. Cerchiamo di capire sotto quali condizioni la somma della serie corrispondente rappresenti una soluzione dell'equazione data, che soddisfa le condizioni al contorno; cercheremo inoltre d'imporre che pure la condizione iniziale sia soddisfatta da questa serie. Se supponiamo che i coefficienti c_k siano limitati (cioè che sia $|c_k| \leq M$, $\forall k = 1, 2, \dots$), la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \quad ,$$

è uniformemente convergente per $0 \leq x \leq l$ e $t \geq t_0 > 0$, in base al criterio di Weierstrass della convergenza totale, poiché vale $|c_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x) e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}| \leq M e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t_0}$, e la serie numerica avente come termine generale $M e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t_0}$ è convergente. Le derivate a termine a termine rispetto a x due volte e rispetto a t sono serie esse pure uniformemente convergenti nello stesso dominio di valori e sono uguali fra loro. Dunque, vista l'arbitrarietà di $t_0 > 0$, la somma della serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \quad , \quad (2.69)$$

fornisce una soluzione continua insieme con le sue derivate rispetto a x e a t in $0 < x < l$ e $t > 0$. Inoltre la funzione $u(x, t)$ è continua anche sulla frontiera e vale 0 in $x = 0$ e in $x = l$. Resta da stabilire il comportamento della serie per t che tende a 0. Se si pone $t = 0$ in (2.69), e si impone che $u(x, 0) = g(x)$, si trova

$$u(x, 0) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad . \quad (2.70)$$

Dunque, se la funzione $g(x)$ è sviluppabile in una serie di Fourier uniformemente convergente, la convergenza della serie (2.69) ad una funzione continua può essere assicurata per $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq l$. La funzione così ottenuta soddisfa l'equazione del calore nei punti interni al dominio e soddisfa le condizioni al contorno e iniziali richieste. La condizione di sviluppabilità in una serie di Fourier uniformemente convergente è sicuramente verificata se $g(x)$ è continua con derivata prima a tratti continua, come si è richiesto nell'enunciato del teorema. Si noti che in questo caso i coefficienti dello sviluppo sono dati da

$$c_k = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx \quad .$$

In questo caso, i coefficienti c_k sono limitati, poiché $g(x)$ continua su $[0, l]$ lo è. \square

Usando, per esempio, la trasformata di Laplace, si può dimostrare che l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad , \quad (2.71)$$

con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = g(x) \quad , \quad (2.72)$$

ha la soluzione

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \quad . \quad (2.73)$$

Ce ne occuperemo in un'altra parte del corso.

2.11 Un esempio d'equazione ellittica: l'equazione di Laplace

Considereremo un tipico problema per la seguente semplice equazione ellittica in due variabili indipendenti a coefficienti costanti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \quad , \quad (2.74)$$

dove Ω è un aperto semplicemente connesso limitato, avente frontiera $\partial\Omega$ che è una curva di Jordan (cioè è continua, a variazione limitata, semplice, chiusa) con la condizione al contorno

$$u(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \quad . \quad (2.75)$$

Qui $f(x, y)$ è una funzione continua. Il problema che ci siamo posti si dice un *problema di Dirichlet interno*. Consiste dunque nel determinare una funzione armonica nell'aperto Ω , noto che sia il suo valore f sulla frontiera $\partial\Omega$, con f funzione continua. Nel caso specifico, di dimensione 2, possiamo prendere un aperto con frontiera di tipo molto generale (cioè facendo una richiesta di regolarità molto blanda per la frontiera stessa). In dimensione superiore, supporremo che valga $\Delta u = 0$ in Ω e $u = f$ su $\partial\Omega$, essendo f continua e $\partial\Omega$ ipersuperficie a tratti liscia. Con ciò si intende che $\partial\Omega$ è composta da un numero finito di parti, ognuna congruente al grafico di una funzione $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$, con g continua e con derivate prime continue. Se g ha anche derivate seconde continue, si dice che $\partial\Omega$ ha curvatura continua a tratti. Si noti infine che per stabilire l'esistenza della soluzione, sono in generale necessarie ulteriori condizioni di regolarità sul dato al contorno f (per esempio che f abbia derivate continue fino all'ordine tre in $\Omega \cup \partial\Omega$), condizioni che, in un momento successivo, si possono rimuovere. L'operatore

$$\Delta u(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \quad , \quad (2.76)$$

si dice laplaciano o operatore di Laplace. Accanto al problema di Dirichlet interno, c'è quello detto *esterno*. Consiste nel trovare $u(x_1, \dots, x_n)$ tale che $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ con la condizione $u = f$ su $\partial\Omega$. Anche qui si suppone che Ω sia un aperto semplicemente connesso e limitato. Per cominciare, supporremo che $u(x, y)$ abbia solo due variabili indipendenti. Come per l'equazione del calore, possiamo stabilire il seguente

Teorema 2.11.1 (Principio di massimo (minimo)). *Se $u(x, y)$ è una funzione continua su $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, che nei punti di Ω soddisfa l'equazione di Laplace (2.74) e al contorno soddisfa (2.75), allora assume il suo valore massimo su $\partial\Omega$. Lo stesso vale per il minimo.*

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema solo per il massimo. La dimostrazione per il minimo segue considerando il massimo di $-u$, come già si è notato per l'equazione del calore. Sia dunque M il massimo di $u(x, y)$ su $\bar{\Omega}$ e m quello su $\partial\Omega$; per assurdo si supponga $M > m$. Dunque il massimo di $u(x, y)$ sarà raggiunto in un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. Consideriamo la seguente funzione ausiliaria

$$v(x, y) = u(x, y) + \frac{M - m}{2d^2} \cdot ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \quad , \quad (2.77)$$

dove d è il diametro di $\bar{\Omega}$. Vale $v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) = M$. Inoltre su $\partial\Omega$ si ha

$$v(x, y) \leq m + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M \quad . \quad (2.78)$$

Dunque anche $v(x, y)$ assume il suo valore massimo in un punto interno $(x_1, y_1) \in \Omega$. In quel punto sarà $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0$, trattandosi di punto di massimo. D'altra parte, calcolando direttamente, in (x_1, y_1) vale

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \cdot \frac{M - m}{d^2} = 2 \cdot \frac{M - m}{d^2} > 0 \quad . \quad (2.79)$$

Abbiamo ottenuto una contraddizione. A questa contraddizione siamo giunti supponendo $M > m$. Deve perciò essere $M = m$ e dunque il valore massimo di $u(x, y)$ si raggiunge sulla frontiera. Lo stesso vale per il minimo. \square

Osservazione 2.11.1 *Nulla cambia nella dimostrazione se si considera il caso di una funzione di n variabili indipendenti.*

Corollario 2.11.1 *Se u_1 e u_2 sono soluzioni dello stesso problema di Dirichlet interno, allora $u_1 = u_2$.*

Dimostrazione. Infatti, in questo caso, $u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1, \dots, x_n) - u_2(x_1, \dots, x_n)$ è una soluzione di $\Delta u = 0$ con $u = 0$ su $\partial\Omega$. Per il principio di massimo (e di minimo) si ottiene perciò

$$0 \leq u_1(x_1, \dots, x_n) - u_2(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega} \quad , \quad (2.80)$$

e quindi $u_1(x_1, \dots, x_n) = u_2(x_1, \dots, x_n)$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}$. \square

Dunque una soluzione al problema interno di Dirichlet, se esiste, è unica.

Inoltre essa dipende in modo continuo dai dati al contorno.

Corollario 2.11.2 *Siano $f(x_1, \dots, x_n)$ e $f^*(x_1, \dots, x_n)$ due funzioni continue su $\partial\Omega$, tali che $|f(x_1, \dots, x_n) - f^*(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon$. Se u e u^* sono le soluzioni del problema interno di Dirichlet con le condizioni al contorno f e f^* , rispettivamente, allora*

$$|u(x_1, \dots, x_n) - u^*(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega} \quad . \quad (2.81)$$

Dimostrazione. La funzione $w = u - u^*$ soddisfa l'equazione di Laplace e inoltre $w|_{\partial\Omega} = f - f^*$. Dunque $-\varepsilon < w|_{\partial\Omega} < \varepsilon$. Per il principio di massimo (minimo) si trova finalmente

$$|u(x_1, \dots, x_n) - u^*(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}. \quad \square$$

Costruiremo ora una soluzione del problema interno di Dirichlet in dimensione 2, quando Ω sia un cerchio di centro l'origine e raggio 1 e $\partial\Omega$ sia la relativa circonferenza.

Teorema 2.11.2 Sia $\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$ e sia $f(\vartheta)$ una funzione continua con derivate prime continue, per $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, con $f(0) = f(2\pi)$. Allora il problema di Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned} \quad , \quad (2.82)$$

ha una soluzione, continua in $\overline{\Omega}$.

Dimostrazione. Lungo la frontiera del cerchio unitario è $x^2 + y^2 = 1$ e quindi la posizione del punto è individuata dalla coordinata angolare $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Converrà esprimere l'operatore laplaciano usando le coordinate polari: $x = \rho \cos(\vartheta)$, $y = \rho \sin(\vartheta)$. Si trova

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \cos(\vartheta) - \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\sin(\vartheta)}{\rho} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \sin(\vartheta) + \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\cos(\vartheta)}{\rho} \end{aligned}$$

e ulteriormente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cdot \cos^2(\vartheta) + 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\sin(\vartheta) \cos(\vartheta)}{\rho^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta \partial \rho} \cdot \frac{\sin(\vartheta) \cos(\vartheta)}{\rho} \\ &\quad + \frac{\sin^2(\vartheta)}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\sin^2(\vartheta)}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cdot \sin^2(\vartheta) - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\sin(\vartheta) \cos(\vartheta)}{\rho^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta \partial \rho} \cdot \frac{\sin(\vartheta) \cos(\vartheta)}{\rho} \\ &\quad + \frac{\cos^2(\vartheta)}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cos^2(\vartheta)}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}. \quad (2.83)$$

Cerchiamo dunque una funzione $u(\rho, \vartheta)$ che sia soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad (2.84)$$

con la condizione al contorno

$$u(1, \vartheta) = f(\vartheta) \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \quad (2.85)$$

Si noti che, affinché la funzione $f(x, y)$ sia continua sul bordo, è necessario che sia $f(0) = f(2\pi)$. Cerchiamo se ci sono soluzioni a variabili separate. $u(\rho, \vartheta) = R(\rho) \cdot T(\vartheta)$. Dovranno soddisfare l'equazione

$$R''(\rho) \cdot T(\vartheta) + \frac{1}{\rho} \cdot R'(\rho) \cdot T(\vartheta) + \frac{1}{\rho^2} \cdot R(\rho) \cdot T''(\vartheta) = 0, \quad (2.86)$$

e quindi, se esistono soluzioni non identicamente nulle, dividendo per $R(\rho) \cdot T(\vartheta)$

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{T''(\vartheta)}{T(\vartheta)} = 0, \quad (2.87)$$

cioè

$$\rho^2 \cdot \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \cdot \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{T''(\vartheta)}{T(\vartheta)}. \quad (2.88)$$

Il primo membro di (2.88) è funzione solo di ρ , il secondo solo di ϑ . Affinché essi siano uguali debbono assumere un valore costante, λ . Ci riduciamo perciò alla soluzione delle seguenti due equazioni

$$T''(\vartheta) + \lambda \cdot T(\vartheta) = 0, \quad T(0) = T(2\pi), \quad (2.89)$$

e

$$\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho) - \lambda \cdot R(\rho) = 0. \quad (2.90)$$

Ragionando sulla (2.89) come già si è fatto in precedenza nella dimostrazione del Teorema (2.9.2), si trova una soluzione non identicamente nulla se $\lambda = n^2$, $n \in \mathbf{N}$ e $T_n(\vartheta) = a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta)$. Con questa scelta di λ la (2.90) diviene

$$\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho) - n^2 \cdot R(\rho) = 0, \quad (2.91)$$

che ha soluzioni del tipo ρ^α . Si trova che i possibili valori di α sono $\pm n$, e, poiché vogliamo che la soluzione sia definita anche per $\rho = 0$, resta solo il valore $\alpha = n$. Dunque le soluzioni a variabili separate sono del tipo $u_n(\rho, \vartheta) = \rho^n (a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta))$. Ripetendo le considerazioni già fatte, cercheremo la soluzione in forma di una serie

$$u(\rho, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta)). \quad (2.92)$$

Se supponiamo, come faremo, che i coefficienti a_n e b_n siano limitati da una costante positiva M , allora la serie converge in ogni punto interno al cerchio, poiché per $\rho \leq \rho_1 < 1$ la serie dei moduli è maggiorata dalla serie numerica convergente

$$2M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \rho_1^n.$$

Si vede inoltre facilmente che sono uniformemente convergenti le serie derivate a termine a termine rispetto a ρ due volte e rispetto a ϑ due volte. Per l'arbitrarietà di $\rho_1 < 1$ la funzione $u(\rho, \vartheta)$ così ottenuta come somma della serie, è armonica in $\rho < 1$. Ponendo $\rho = 1$ si ottiene

$$u(1, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta)). \quad (2.93)$$

Nelle ipotesi fatte per $f(\vartheta)$, posto

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (2.94)$$

la serie di Fourier risulta essere maggiorata dalla serie numerica convergente

$$|u(1, \vartheta)| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|),$$

e dunque la (2.92) converge uniformemente per $\rho \leq 1$ e $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Vediamo come si possa ulteriormente trasformare l'espressione di $u(\rho, \vartheta)$.

$$\begin{aligned} u(\rho, \vartheta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left\{ \int_0^{2\pi} \cos(n\varphi) \cos(n\vartheta) f(\varphi) d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \sin(n\varphi) \sin(n\vartheta) d\varphi \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\varphi - \vartheta) \right\} d\varphi. \end{aligned}$$

Si è potuto integrare a termine a termine per la convergenza uniforme della serie per $\rho \leq 1$.

Osserviamo che $\rho^n \cos(n\alpha) = \Re(\rho^n e^{in\alpha}) = \Re(z^n)$, se $z = \rho e^{i\alpha}$. Perciò, se $\rho < 1$

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos(n\alpha) &= -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos(n\alpha) = -1 + 2\Re\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \\ -1 + 2\Re \frac{1}{1-z} &= -1 + 2 \frac{1 - \rho \cos(\alpha)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\alpha)} = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\alpha)}. \end{aligned}$$

Allora, per $\rho < 1$ si trova

$$u(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\vartheta - \varphi)} d\varphi. \quad (2.95)$$

La formula integrale così ottenuta si dice la *formula integrale di Poisson*. Essa fornisce la soluzione dell'equazione di Laplace per $\rho < 1$. Si può verificare che il limite al quale tende l'integrale è proprio

$f(\vartheta)$ se $(\rho, \varphi) \rightarrow (1, \vartheta)$ da punti interni al cerchio unitario. Più in generale, per un cerchio di raggio r vale la formula

$$u(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\varphi) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\vartheta - \varphi)} d\varphi . \quad (2.96)$$

La rappresentazione integrale della soluzione permette di riconoscere che le condizioni da imporre alla funzione al contorno $f(\vartheta)$, possono essere attenuate. Infatti l'integrale può essere derivato sotto il segno e può essere calcolato il limite per $(\rho, \varphi) \rightarrow (1, \vartheta)$, che è ancora $f(\vartheta)$, nella sola ipotesi di continuità di f .

In \mathbb{R}^3 si può stabilire la seguente formula di Poisson che fornisce la soluzione del problema di Dirichlet $\Delta u = 0$ in $\Omega = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$, con la condizione al contorno $u(r, \vartheta, \varphi) = f(\vartheta, \varphi)$, con f continua.

$$u(\rho, \vartheta, \varphi) = \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(t, s) \frac{r^2 - \rho^2}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \sin t dt ds , \quad (2.97)$$

dove γ è l'angolo compreso tra i vettori aventi origine in $(0, 0, 0)$ e vertici $(\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \varphi)$, con $0 \leq \varphi \leq \pi$ e $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, e $(r \sin s \cos t, r \sin s \sin t, r \cos s)$, con $0 \leq s \leq \pi$ e $0 \leq t \leq 2\pi$.

Dalla formula di Poisson si deduce immediatamente il seguente

Teorema 2.11.3 (Teorema della media.) *Una funzione armonica in un cerchio C e continua sulla sua chiusura \overline{C} , assume nel centro di C un valore che è la media integrale dei valori sulla circonferenza di C .*

Dimostrazione. Basta porre $\rho = 0$ nella formula (2.96) (o rispettivamente (2.97)), per ottenere

$$u(0, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) d\varphi , \quad (2.98)$$

o, rispettivamente

$$u(0, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r \sin s \cos t, r \sin s \sin t, r \cos s) \sin t dt ds . \square$$

Nel caso di funzioni di due variabili indipendenti, si può utilizzare la teoria delle funzioni olomorfe e, in particolare, il Teorema di Riemann, per tradurre l'esistenza di una funzione armonica all'interno di un cerchio di raggio unitario e centro nell'origine con assegnato valore continuo al bordo, nell'esistenza di una funzione armonica all'interno di una curva di Jordan, con assegnato valore continuo sulla curva stessa.

Oltre al problema interno di Dirichlet di cui ci siamo occupati, si possono considerare per l'equazione di Laplace il problema esterno di Dirichlet, e i problemi interno ed esterno di Neumann.

Dato un aperto semplicemente connesso e limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, il problema esterno di Dirichlet consiste nel trovare una soluzione dell'equazione

$$\Delta u = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \quad , \quad (2.99)$$

tale che

$$u(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \quad , \quad (2.100)$$

essendo f un'assegnata funzione continua.

I problemi interno ed esterno di Neumann si enunciano come segue: “Dato un aperto semplicemente connesso e limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, trovare una funzione armonica in Ω (in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$), tale che la sua derivata fatta rispetto alla normale esterna (per esempio) sia un'assegnata funzione continua sul bordo; cioè $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ in $\partial\Omega$.

Nel problema di Neumann, la derivata normale non può essere assegnata in modo arbitrario, e la soluzione del problema è determinata a meno di una costante. Lo verificheremo nel caso bidimensionale

Teorema 2.11.4 *Sia $u(x, y)$ una soluzione del problema di Neumann (interno)*

$$\Delta u = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad , \quad (2.101)$$

con la condizione al contorno

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \quad . \quad (2.102)$$

Allora si ha

$$\int_{+\partial\Omega} g(s) ds = 0 \quad . \quad (2.103)$$

Dimostrazione. Infatti si ha

$$0 = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_{+\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) = \int_{+\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n_e} ds \quad . \square$$

Teorema 2.11.5 *Se u_1 e u_2 sono due soluzioni del problema di Neumann (2.101), (2.102), esse differiscono per una costante.*

Dimostrazione. Posto $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$, abbiamo

$$\iint_{\Omega} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx dy = \int_{+\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x} dy - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad .$$

Un'espressione analoga vale per $u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ e quindi

$$0 = \iint_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_{+\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n_e} ds - \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad .$$

Poiché $\frac{\partial u}{\partial n_e} = 0$, resta

$$\iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = 0 \quad ,$$

e quindi $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0$. Dunque $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y) = \text{costante}$. \square

Una funzione $u(x, y)$ si dice *coniugata* di una funzione $v(x, y)$ se sono soddisfatte le condizioni

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Teorema 2.11.6 *Il problema di Neumann (2.101), (2.102), si riduce a un problema di Dirichlet per una funzione coniugata.*

Dimostrazione. Si voglia trovare una funzione $u(x, y)$ tale che

$$\Delta u = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_e} = g \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega .$$

Poniamo $f(s) = \int_{s_0}^s g(t) dt$. Sia $v(x, y)$ tale che

$$\Delta v = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

$$v = f \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega .$$

Se $u(x, y)$ è una funzione coniugata di $v(x, y)$ allora è pure $\Delta u = 0$, in Ω e su $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial n_e} = u_x \frac{dy}{ds} - u_y \frac{dx}{ds} = v_y \frac{dy}{ds} + v_x \frac{dx}{ds} = \frac{dv}{ds} = \frac{df}{ds} = g(s) \quad . \quad \square$$

Infine notiamo che il problema di Cauchy è mal posto per le equazioni ellittiche. Sia data l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

con le condizioni iniziali in $x = 0$, $u(0, y) = 0$, $u_x(0, y) = \frac{\text{sen}(ny)}{n^k}$, con n, k interi > 0 . Si trova facilmente la soluzione

$$u(x, y) = \frac{1}{n^{k+1}} \text{sen}(ny) \text{senh}(nx) \quad .$$

Ora $|u_x(0, y)| \leq 1/n^k$, e quindi si può rendere piccola a piacere, pur di prendere n opportunamente grande. La soluzione invece, anche se x è piccolo quanto si vuole, purché non nullo, può assumere valori grandi a piacere, se n è sufficientemente grande. Dunque un'oscillazione comunque piccola nei dati iniziali viene amplificata senza limite nella soluzione.

2.12 Un esempio d'equazione iperbolica: l'equazione delle onde

La modellizzazione di molti fenomeni di tipo diverso (propagazione di onde elastiche nei solidi, di onde sonore nei fluidi, di onde elettromagnetiche) conduce alla considerazione di un'equazione di tipo iperbolico, detta equazione delle onde, accompagnata da opportune condizioni iniziali e al contorno. In particolare noi considereremo il seguente problema detto "della corda vibrante, che, sotto opportune condizioni di linearizzazione, permette di descrivere il moto di una corda tesa tra due punti fissi e soggetta a opportune condizioni iniziali di forma e di "pizzicamento. Considereremo dunque il seguente problema: trovare la funzione $u(x, t)$ tale che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (2.104)$$

accompagnata dalle condizioni iniziali

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \quad 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned} \quad (2.105)$$

e dalle condizioni al contorno

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \quad t \geq 0, \\ u(l, t) &= 0 \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.106)$$

In generale, supporremo che $F(x, t)$ sia funzione continua delle sue variabili; supporremo che $f(x)$ sia funzione di classe \mathcal{C}^2 e $g(x)$ sia funzione di classe \mathcal{C}^1 . Cominceremo a trattare il caso dell'equazione (2.104) omogenea, cioè con $F(x, t)$ identicamente nulla. Dunque cerchiamo una funzione che sia soluzione di

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (2.107)$$

accompagnata dalle condizioni iniziali e al contorno (2.105) e (2.106).

È noto che, operando il cambiamento di variabili

$$\xi = x + ct$$

$$\eta = x - ct,$$

si trova

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.\end{aligned}$$

Perciò la (2.107) diviene

$$-4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \xi > 0, \eta < l. \quad (2.108)$$

Dunque l'equazione è soddisfatta da

$$u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta) \quad \xi > 0, \eta < l,$$

con ϕ e ψ funzioni di classe C^2 . Tornando alle variabili originali, si trova

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \quad 0 < x < l, t > 0. \quad (2.109)$$

$\phi(x + ct)$ è un'onda che viaggia nella direzione dell'asse x negativo (con velocità $-c$) senza cambiare forma, mentre $\psi(x - ct)$ è un'onda che viaggia con velocità c nella direzione positiva dell'asse x .

Imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali si trova

$$\begin{aligned}\phi(x) + \psi(x) &= f(x) \quad 0 \leq x \leq l \\ c \cdot \phi'(x) - c \cdot \psi'(x) &= g(x) \quad 0 \leq x \leq l.\end{aligned} \quad (2.110)$$

Derivando la prima equazione e moltiplicandola per c , si trova agevolmente

$$\begin{aligned}2c \cdot \phi'(x) &= c \cdot f'(x) + g(x) \quad 0 \leq x \leq l \\ 2c \cdot \psi'(x) &= c \cdot f'(x) - g(x) \quad 0 \leq x \leq l.\end{aligned}$$

Di qui, integrando su $[0, \xi]$ e su $[0, \eta]$ rispettivamente si ottiene infine

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) + \frac{1}{2c} \int_0^\xi g(s) ds + K_1, \quad 0 \leq \xi \leq l, \quad (2.111)$$

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2}f(\eta) - \frac{1}{2c} \int_0^\eta g(s) ds + K_2, \quad 0 \leq \eta \leq l. \quad (2.112)$$

Ricordando la prima delle condizioni (2.110), si vede che deve essere $K_1 + K_2 = 0$, e quindi si ottiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (2.113)$$

Questa è la formula stabilita da D'Alembert nel 1747, formula che per ora ha validità solo per $0 \leq x + ct \leq l$, $0 \leq x - ct \leq l$. Dunque questa formula risolve il problema per la regione

triangolare del piano x, t , delimitata da $t \geq 0$, $t \leq \frac{x}{c}$, $t \leq \frac{l-x}{c}$, regione nella quale le condizioni al contorno ancora non entrano in gioco e contano solo le condizioni iniziali. Naturalmente (2.113) è una soluzione "classica di (2.107) solo se $f \in \mathcal{C}^2(0, l)$ e $g \in \mathcal{C}^1(0, l)$. Cerchiamo ora d'imporre le condizioni al contorno in $x = 0$ e $x = l$. Si trova

$$\phi(ct) + \psi(-ct) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.114)$$

$$\phi(l+ct) + \psi(l-ct) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.115)$$

Se nella (2.114) poniamo $\zeta = -ct$, si trova

$$\psi(\zeta) = -\phi(-\zeta), \quad -l \leq \zeta \leq 0, \quad (2.116)$$

che permette di definire i valori di $\psi(\zeta)$ sull'intervallo $-l \leq \zeta \leq l$. Infatti inizialmente ψ è nota per valori del suo argomento nell'intervallo $[0, l]$. La (2.116) permette di estendere la sua definizione anche a $[-l, 0]$. Posto poi $\zeta = l+ct$ nella (2.115), si trova

$$\phi(\zeta) = -\psi(2l-\zeta), \quad l \leq \zeta \leq 3l. \quad (2.117)$$

Infatti quando $l \leq \zeta \leq 3l$, si ha $-l \leq 2l-\zeta \leq l$. ϕ era definita inizialmente su $[0, l]$; ora viene estesa all'intervallo $[0, 3l]$. Riapplicando la (2.116) si ottiene dunque l'estensione di ψ sull'intervallo $[-3l, l]$, e poi, riapplicando la (2.117), si ottiene l'estensione di ϕ all'intervallo $[0, 5l]$, e così via...

Riapplicando successivamente le condizioni al contorno, ϕ risulterà definita per ogni $\xi \geq 0$ e ψ per ogni $\eta \leq l$. Dunque otterremo in questo modo la soluzione del problema $u(x, t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$ per ogni $0 \leq x \leq l$ e ogni $t \geq 0$. C'è un altro modo, forse più conveniente, di tenere conto delle condizioni al contorno. Se scriviamo esplicitamente la (2.116) otteniamo

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2}f(-\zeta) - \frac{1}{2c} \int_0^{-\zeta} g(s) ds - K, \quad -l \leq \zeta \leq 0. \quad (2.118)$$

Se estendiamo la definizione di $f(x)$ all'intervallo $-l \leq x \leq 0$, ponendo $f(x) = -f(-x)$, per $-l \leq x \leq 0$ e lo stesso facciamo per $g(x)$, allora si vede che la (2.118) si riduce alla (2.112). Dunque estendendo per disparità intorno allo 0 sia la $f(x)$ che la $g(x)$, si vede che la formula inizialmente valida solo per il valore dell'argomento in $[0, l]$ ora vale nell'intervallo più ampio in $[-l, l]$. Estendendo poi per disparità sia f che g intorno a l , definendo $f(x) = -f(2l-x)$ e $g(x) = -g(2l-x)$ per $l \leq x \leq 3l$ e poi intorno a $-l, 3l$, e così via, si trovano due funzioni che sono periodiche di periodo $2l$, definite su tutta la retta reale. Avendo operato quest'estensione di f e g , la formula di D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (2.119)$$

risulta essere valida per ogni $0 \leq x \leq l$ e per ogni $t \geq 0$.

Naturalmente, affinché la soluzione sia di classe \mathcal{C}^2 , dovremo fare ipotesi sui valori di f e g e delle loro derivate nei punti estremi del campo. Precisamente, per assicurare la continuità di f e di g dovremo supporre che sia $f(0) = f(l) = g(0) = g(l) = 0$; che esistano finiti $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ e $f'_-(l), g'_+(0), g'_-(l)$; che esistano e siano nulle $f''_+(0)$ e $f''_-(l)$. Imposte le condizioni in 0 e in l ,

automaticamente saranno verificate in tutti i punti del tipo $k \cdot l$, con $k \in \mathbf{Z}$. In questo modo si trovano $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Se f e g non forniscono una soluzione classica, non appartenendo alla classe funzionale opportuna, tuttavia la soluzione (2.119) potrà essere interpretata come soluzione “generalizzata, anche nel senso delle distribuzioni, come si vedrà in altra parte del corso.

Supponiamo che sia $0 < \bar{x} < l$ e $\bar{t} < \frac{\bar{x}}{c}$, $\bar{t} < \frac{l - \bar{x}}{c}$. Allora la soluzione dipende solo dai dati iniziali del segmento $\bar{x} - c\bar{t} \leq x \leq \bar{x} + c\bar{t}$. Cambiando i valori di f e g al di fuori di questo segmento il valore $u(\bar{x}, \bar{t})$ non cambia. Il segmento ritagliato sull’asse x dalle rette di pendenza $1/c$ e $-1/c$, passanti per (\bar{x}, \bar{t}) , cioè il segmento $[\bar{x} - c\bar{t}, \bar{x} + c\bar{t}]$, si dice il *dominio di dipendenza* del punto (\bar{x}, \bar{t}) . Le rette $x - ct = \text{costante}$ e $x + ct = \text{costante}$ sono le *linee caratteristiche* dell’equazione delle onde.

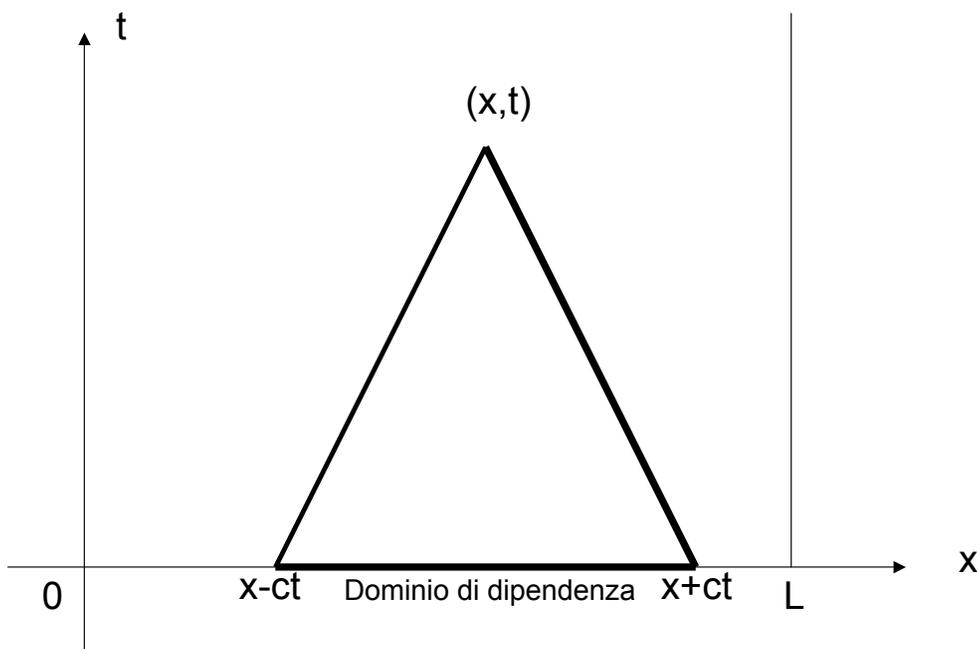


Figura 2.1: Dominio di dipendenza.

Le informazioni contenute nella funzione f si trasmettono con velocità c e $-c$ lungo le linee caratteristiche uscenti da un punto \bar{x} dell’asse x ; quelle relative alla funzione g si trasmettono con velocità $|v| \leq c$. Da un punto \bar{x} dell’asse x escono le due linee caratteristiche $x - ct = \bar{x}$ e $x + ct = \bar{x}$. Il cono da esse individuato si dice il *campo d’influenza* del punto \bar{x} . Se \bar{x} e \bar{t} non soddisfano le restrizioni sopra ricordate, si potrà individuare il dominio di dipendenza di (\bar{x}, \bar{t}) , o pensando f e g estese a tutta la retta reale secondo il procedimento sopra illustrato, o seguendo le riflessioni delle

caratteristiche lungo le linee $x = 0$ e $x = l$.

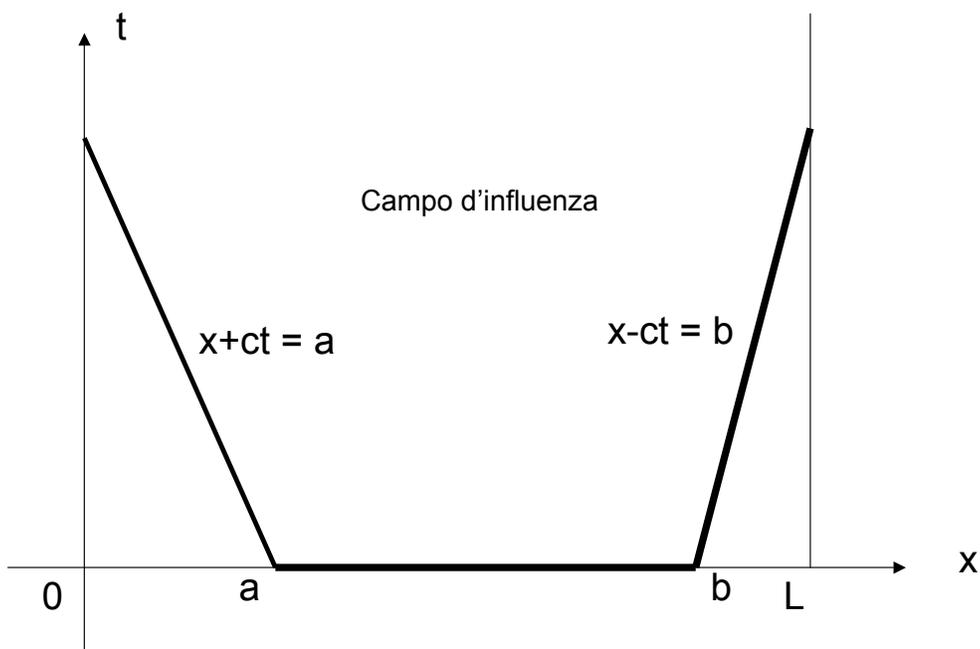


Figura 2.2: Campo d'influenza dell'intervallo $[a, b]$.

Per chiarire il significato della formula di D'Alembert, è opportuno considerare il caso particolare in cui $f(x)$ è non nulla solo in un intorno del punto x' e $g(x)$ è nulla, come è mostrato nella Figura 2.3. Allora l'onda iniziale si suddivide in due onde di ampiezza metà che si propagano una lungo la direzione positiva dell'asse x con velocità c e l'altra lungo la direzione negativa dell'asse x e quindi con velocità $-c$. La situazione a un tempo $t > 0$, tempo nel quale i due segnali si sono sufficientemente allontanati fra loro e non hanno ancora raggiunto gli estremi della corda, è mostrata nella Figura 2.4. Il segnale è non nullo, solo in un intorno dei punti x tali che $x \pm ct \approx x'$, cioè in un intorno dei punti $x_1 \approx x' + ct$ e $x_2 \approx x' - ct$. Successivamente i due segnali vengono riflessi agli estremi della corda, invertono il senso di marcia e interferiscono fra loro.

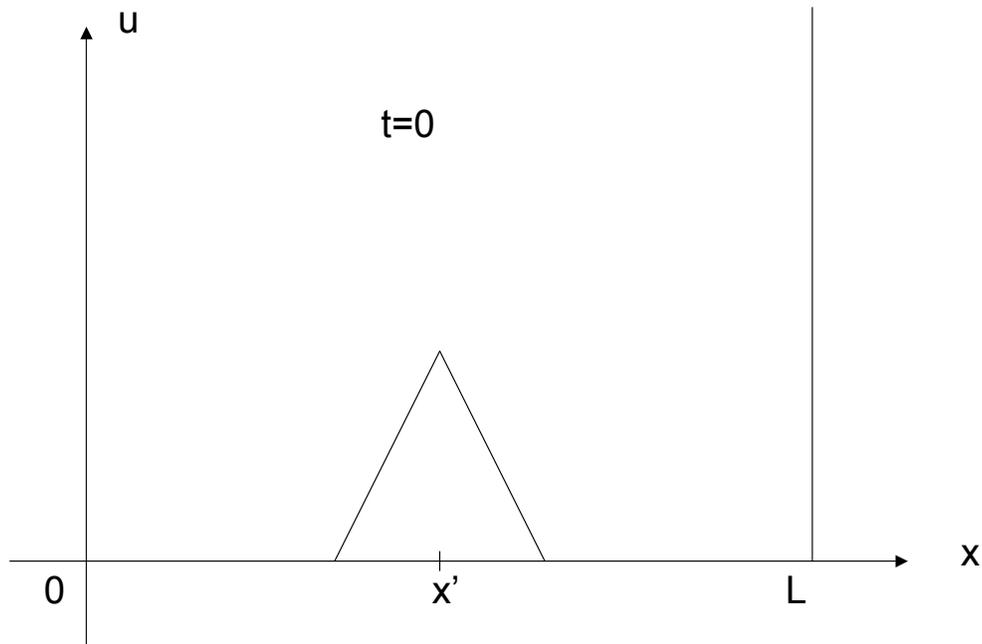


Figura 2.3: Corda: forma iniziale.

2.12.1 L'equazione completa

Si voglia ora risolvere l'equazione completa, con l'associato problema ai valori iniziali, ma senza tenere conto delle condizioni al contorno. Cioè si consideri il caso di una corda di lunghezza infinita.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2.120)$$

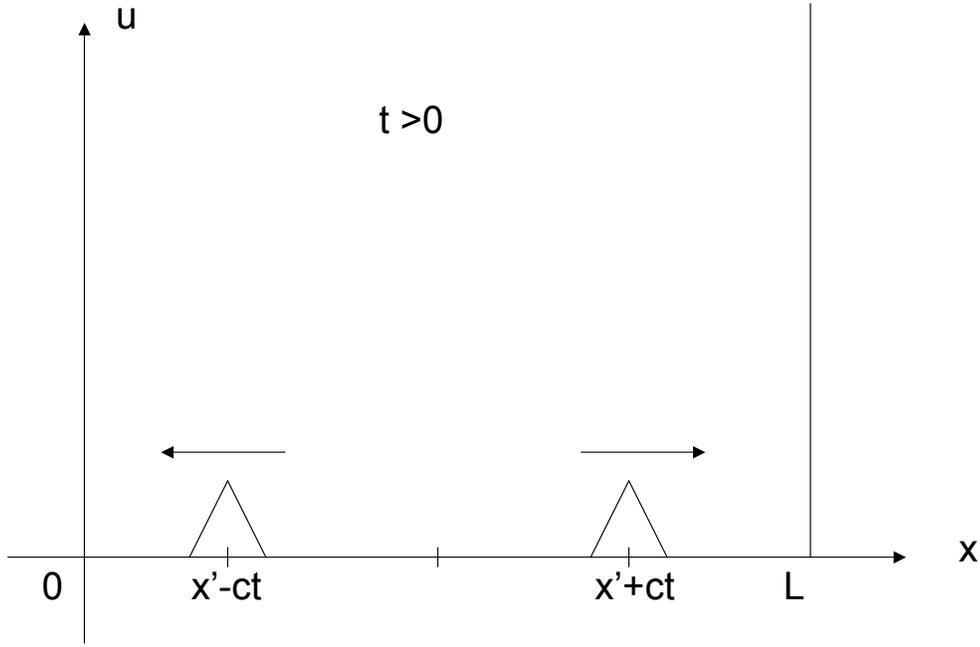
$$u(x, 0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.121)$$

Con il cambiamento di variabili più volte ricordato

$$\xi = x + ct$$

$$\eta = x - ct,$$

Figura 2.4: Corda: forma al tempo t .

l'equazione differenziale diviene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c} \right) = -\frac{1}{4c^2} F \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c} \right). \quad (2.122)$$

Integrando rispetto alla prima variabile tra gli estremi d'integrazione η e ξ , si trova

$$\int_{\eta}^{\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \eta} \left(\frac{s + \eta}{2}, \frac{s - \eta}{2c} \right) ds = -\frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} F \left(\frac{s + \eta}{2}, \frac{s - \eta}{2c} \right) ds,$$

cioè

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \left(\frac{s + \eta}{2}, \frac{s - \eta}{2c} \right) \Big|_{s=\eta}^{s=\xi} = -\frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} F \left(\frac{s + \eta}{2}, \frac{s - \eta}{2c} \right) ds,$$

ossia

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c} \right) = \frac{\partial u}{\partial \eta} (\eta, 0) - \frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} F \left(\frac{s + \eta}{2}, \frac{s - \eta}{2c} \right) ds.$$

Ma

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(\eta, 0) = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(\eta, 0) - \frac{1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t}(\eta, 0)$$

Integrando ancora una volta rispetto alla seconda variabile (η), si trova

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{\xi} \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\xi+z}{2}, \frac{\xi-z}{2c} \right) dz &= \int_{\eta}^{\xi} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(z, 0) - \frac{1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t}(z, 0) \right) dz \\ &\quad - \frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} \left(\int_z^{\xi} F \left(\frac{s+z}{2}, \frac{s-z}{2c} \right) ds \right) dz. \end{aligned}$$

Tenendo conto che

$$\int_{\eta}^{\xi} \frac{\partial u}{\partial x}(z, 0) = u(\xi, 0) - u(\eta, 0),$$

che $s = \bar{x} + c\bar{t}$, $z = \bar{x} - c\bar{t}$ che il dominio d'integrazione è dato da $\eta \leq \bar{x} - c\bar{t} \leq \bar{x} + c\bar{t} \leq \xi$, cioè $\eta + c\bar{t} \leq \bar{x} \leq \xi - c\bar{t}$ e $0 \leq \bar{t} \leq \frac{1}{2c}(\xi - \eta)$ e che $\det|J \begin{pmatrix} s & z \\ \bar{x} & \bar{t} \end{pmatrix}| = 2c$, si trova

$$\frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} \left(\int_z^{\xi} F \left(\frac{s+z}{2}, \frac{s-z}{2c} \right) ds \right) dz = \frac{1}{2c} \int_0^{\frac{\xi-\eta}{2c}} d\bar{t} \left(\int_{\eta+c\bar{t}}^{\xi-c\bar{t}} F(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} \right),$$

e, quindi

$$\begin{aligned} u \left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c} \right) &= \frac{1}{2} [u(\xi, 0) + u(\eta, 0)] + \frac{1}{2c} \int_{\eta}^{\xi} \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, 0) d\bar{x} \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_0^{\frac{\xi-\eta}{2c}} d\bar{t} \left(\int_{\eta+c\bar{t}}^{\xi-c\bar{t}} F(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, tenendo conto dei valori iniziali, si trova

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\bar{x}) d\bar{x} \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_0^t d\bar{t} \left(\int_{x-c(t-\bar{t})}^{x+c(t-\bar{t})} F(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} \right). \end{aligned} \quad (2.123)$$

2.12.2 Unicità della soluzione

Consideriamo il seguente problema completo per la corda vibrante, con assegnati movimenti negli estremi 0 e l :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (2.124)$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \quad 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \tag{2.125}$$

e con le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} u(0, t) &= f_1(t) \quad t \geq 0, \\ u(l, t) &= f_2(t) \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.126}$$

Se $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ sono soluzioni del precedente problema, allora $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ è soluzione dell'equazione (2.124) con le condizioni (2.125) e (2.126) omogenee, cioè con $F = f = g = f_1 = f_2 = 0$. Ora se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0,$$

moltiplicando per $\frac{\partial u}{\partial t}$, si trova

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = 0.$$

Integrando tra 0 e T in t e tra 0 e l in x , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2(x, T) + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2(x, T) \right\} dx = \\ \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2(x, 0) + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2(x, 0) \right\} dx = 0, \end{aligned}$$

poiché $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ e $u(x, 0) = 0$ e quindi $\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0$. Perciò, per ogni $T > 0$ si trova

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2(x, T) + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2(x, T) \right\} dx = 0,$$

il che implica, se $u \in \mathcal{C}^2$, che $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0$ per ogni $0 < x < l$ e per ogni $t > 0$. Ma allora $u(x, t) = \text{costante}$ nello stesso dominio. Poiché supponiamo che $u(x, t)$ sia continua sulla chiusura del precedente dominio, essa è costante anche per $0 \leq x \leq l$ e $t \geq 0$. Allora assume il valore che ha sulla frontiera di questo dominio, in particolare per $t = 0$ e $0 \leq x \leq l$; dunque, essendo $u(x, 0) = 0$, è $u(x, t) = 0$ per $0 \leq x \leq l$ e $t \geq 0$. Dunque $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ per $0 \leq x \leq l$ e $t \geq 0$. Il metodo qui utilizzato per dimostrare l'unicità della soluzione è detto *dell'energia*. Infatti la quantità $\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2(x, t) + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2(x, t) \right\}$ è associata all'energia trasportata dall'onda.

2.13 Equazioni dell'idrodinamica

Supponiamo che sia dato un liquido (o più in generale un fluido) del quale si vuole conoscere in ogni istante ($t \geq t_0$) e in ogni punto x di un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ la densità, la velocità, la pressione. Le equazioni più generali atte a descrivere lo stato di moto del liquido sono le equazioni di Navier-Stokes. E precisamente:

L'equazione di continuità

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u = 0, \quad (2.127)$$

L'equazione di conservazione della quantità di moto

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla \cdot T + \rho f, \quad (2.128)$$

L'equazione di conservazione dell'energia

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) = \nabla \cdot (w - q) + \rho \cdot (r + u \cdot f). \quad (2.129)$$

Qui

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \cdot \nabla h = \frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \cdot \frac{\partial h}{\partial x_k}, \quad (2.130)$$

è l'operatore di derivazione euleriana della quantità $h(x_1, x_2, x_3, t)$;

$\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ è la densità del liquido; $u(x_1, x_2, x_3, t)$ è il vettore velocità di componenti u_1, u_2, u_3 ;

T è il tensore degli sforzi di componenti

$T_{jk}(x_1, x_2, x_3, t)$; $f(x_1, x_2, x_3, t)$ è l'accelerazione che agisce sul fluido (forza per unità di massa); e è

l'energia interna per unità di massa, $w = Tu$ di componenti $w_k = \sum_{j=1}^3 T_{kj} u_j$ è il vettore potenza;

q è il vettore flusso di calore; r è l'apporto energetico volumetrico.

L'equazione dell'energia (2.129) potrà essere trascurata se non teniamo in considerazione fenomeni energetici, cosa che sarà lecita nei più semplici problemi d'idrodinamica che affronteremo.

Nel caso di un fluido viscoso il tensore degli sforzi si potrà scrivere

$$T_{ij} = p\delta_{ij} + \frac{2}{3}\mu\delta_{ij} \cdot \operatorname{div} u - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.131)$$

dove p è la pressione e μ rappresenta il coefficiente di viscosità del fluido, supposto isotropo.

Allora l'equazione di conservazione della quantità di moto si scrive

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f - \operatorname{grad} p + \frac{1}{3}\mu \operatorname{grad} (\operatorname{div} u) + \mu \Delta u. \quad (2.132)$$

A quest'equazione andrà in generale aggiunta un'equazione di stato o complementare, che descrive la natura del fluido e che lega fra loro pressione e densità, se si possono trascurare gli effetti termici.

$$\mathcal{F}(p, \rho) = 0. \quad (2.133)$$

Può essere utile tenere presente che l'operatore di derivazione euleriana si scrive anche come segue

$$\begin{aligned} \frac{Du_i}{Dt} &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (2.134)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \times (\nabla \times u) + \nabla \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \times (\text{rot } u) + \text{grad} \left(\frac{1}{2} u^2 \right), \end{aligned} \quad (2.135)$$

dove \times rappresenta il prodotto vettoriale e $(\nabla \times)u$ rappresenta il rotore del campo vettoriale u le cui componenti i -esime sono $\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ per $i, j, k = 1, 2, 3$, prese in ordine ciclico; l'uguaglianza si riconosce facilmente con semplici calcoli formali. Si scrive u^2 per indicare il quadrato del modulo della velocità, ossia il prodotto scalare del vettore u per sé stesso. $u^2 := u \cdot u = \langle u, u \rangle$.

Nel caso di un fluido come l'acqua, l'equazione (2.133) sarà ridotta a $\rho = \text{costante}$, cioè penseremo all'acqua come a un fluido incompressibile. Questa è una buona approssimazione per molti casi che interessano l'ingegneria navale. Nel caso dei gas a temperatura costante (e sufficientemente elevata) avremo $p = \kappa \cdot \rho$ (κ costante opportuna), mentre in condizioni adiabatiche sarà $p = \kappa \rho^\gamma$, con κ e γ costanti opportune.

2.13.1 Fluidi perfetti. Alcuni casi speciali

Considereremo il caso nel quale la viscosità sia trascurabile. Valori tipici del coefficiente di viscosità sono $\mu = 0,001308 \text{ kg m}^{-1} \text{ sec}^{-1}$ per l'acqua a 10^0C e $\mu = 0,0000176 \text{ kg m}^{-1} \text{ sec}^{-1}$ per l'aria a 0^0C . In questo caso il tensore degli sforzi si riduce alla pressione; $T_{ij} = p\delta_{ij}$.

Allora le equazioni da considerare saranno le equazioni di continuità, di conservazione della quantità di moto (scritta in forma semplificata) e quella di stato del fluido

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } u &= 0 \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho f - \text{grad } p \\ \mathcal{F}(p, \rho) &= 0. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Supponiamo ora che il fluido perfetto sia in moto stazionario, cosicché tutte le grandezze in gioco siano indipendenti dal tempo. Allora le precedenti equazioni (2.136) si semplificano essendo $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Se supponiamo che la forza per unità di massa sia conservativa, esisterà un potenziale U tale che $f = \text{grad } U$. Introduciamo inoltre una funzione $\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho}$, in modo che $\text{grad } \mathcal{P} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p$. Allora l'equazione del momento diviene

$$u \times (\text{rot } u) + \text{grad} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = \text{grad} (U - \mathcal{P}). \quad (2.137)$$

Se consideriamo una linea di flusso della velocità, che nel caso stazionario diviene una linea di corrente, ossia se proiettiamo quest'equazione vettoriale sul vettore u , otteniamo

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} u^2 - U + \mathcal{P} \right) \cdot u = 0. \quad (2.138)$$

Cioè, lungo una linea di corrente, la quantità

$$\frac{1}{2} u^2 - U + \mathcal{P} = C. \quad (2.139)$$

Quest'equazione esprime il Teorema di Daniel Bernoulli: *Nel moto stazionario di un fluido perfetto è costante lungo ogni linea di corrente la somma dell'energia cinetica, dell'energia per unità di massa U e dell'entalpia \mathcal{P} .* Nel caso di un fluido incompressibile, nel quale $U = -gz$ è il potenziale gravitazionale, si può riscrivere la precedente equazione come segue

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = C. \quad (2.140)$$

Il vettore $w = \text{rot } u$, associato in ogni punto al campo di velocità u di un fluido, si dice la *vorticità* del fluido. Se $u = \omega \times r$ dove $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ è un vettore costante e $r = (x_1, x_2, x_3)^T$, allora $\omega \times r = (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1)^T$ e quindi $w = \nabla \times (\omega \times r) = 2\omega$. Dunque il rotore del campo di velocità è il doppio della velocità angolare associata all'atto di moto locale. Se il dominio sul quale è assegnato il campo di velocità è semplicemente connesso, qualora il campo sia irrotazionale, cioè sia $\text{rot } u = 0$, allora esiste un *potenziale di velocità* φ , tale cioè che $u = \text{grad } \varphi$. Per moti irrotazionali l'equazione del momento diviene dunque

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 \right) = f - \text{grad} (\mathcal{P}). \quad (2.141)$$

Perciò deve esistere un campo potenziale U relativo a f e si ha che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 - U + \mathcal{P}, \quad (2.142)$$

non cambia da punto a punto. Se poi il moto è stazionario la quantità

$$\frac{1}{2} u^2 - U + \mathcal{P}, \quad (2.143)$$

è una costante in tutto il dominio del moto ed è costante nel tempo. Dunque la quantità che per il teorema di Bernoulli è costante lungo ogni linea di corrente, nel caso di campo di moto irrotazionale, è costante ovunque.

Nel caso in cui il fluido sia incomprimibile, l'equazione di continuità (2.127) diviene $\operatorname{div} u = 0$. Tenuto conto che $u = \operatorname{grad} \varphi$ si trova l'equazione

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^3. \quad (2.144)$$

Qui Ω è il dominio dello spazio nel quale si ricerca il campo di velocità u . In generale un fluido non passa attraverso il bordo di Ω e quindi è assegnata la derivata normale del potenziale $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n$ essendo n la normale a $\partial\Omega$ nel punto considerato. Dunque il problema associato a (2.144) è un problema di Neumann che permette di determinare il potenziale φ a meno di una costante arbitraria (peraltro inessenziale ai fini della determinazione della velocità).

2.13.2 Azioni dinamiche

Se un corpo avente superficie Σ è immerso in un fluido, questo esercita forze sul corpo stesso che in ogni punto sono del tipo $T(n) d\Sigma$ su ogni elemento $d\Sigma$ della superficie avente vettore normale interna n . Se a parità di altre condizioni il corpo fosse in quiete su di esso si eserciterebbe la forza $p_0 n$ su ogni elemento di superficie, essendo p_0 la pressione statica. Le *azioni dinamiche* sono dunque rappresentate dalle forze $(T(n) - p_0 n) d\Sigma$. Se il corpo considerato è rigido, l'effetto delle azioni dinamiche è descritto dalla risultante R delle forze e dal loro momento M rispetto ad un assegnato polo.

$$R = \int_{\Sigma} (T(n) - p_0 n) d\Sigma, \quad M = \int_{\Sigma} r \times (T(n) - p_0 n) d\Sigma. \quad (2.145)$$

Qui r è il raggio vettore che congiunge il punto generico con l'assegnato polo.

Nel caso di un fluido perfetto incomprimibile in moto irrotazionale, sotto l'azione di forze di massa conservative si ha per l'equazione (2.142)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 - U + \frac{p}{\rho} = \text{costante}, \quad (2.146)$$

In condizioni statiche si può valutare la costante

$$-U + \frac{p_0}{\rho} = \text{costante}, \quad (2.147)$$

e quindi

$$p - p_0 = -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 \right). \quad (2.148)$$

Dunque per la prima delle (2.145), si ha

$$R = -\rho \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 \right) n d\Sigma,$$

e, nel caso di moto stazionario,

$$R = -\rho \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) n d\Sigma. \quad (2.149)$$

Nel caso di un moto piano si può trarre vantaggio dalla notazione complessa. I punti del piano siano individuati dal numero complesso $z = x + iy$ e sia $W = u_x - iu_y$ la *velocità complessa*. Il versore normale interna è $n = (-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds})^T$ e $nds = (-dy, dx)^T$; $u^2 = W \cdot \bar{W} = u_x^2 + u_y^2$.

Perciò la risultante (2.149) si può scrivere con notazione complessa

$$R_y + iR_x = -\frac{\rho}{2} \int_S (W\bar{W})(dx - idy). \quad (2.150)$$

Si noti che S è la linea piana che delimita nel piano complesso il corpo, prima delimitato dalla superficie Σ . Si noti anche che $\bar{W}(dx - idy) = \bar{W}d\bar{z} = (u_x + iu_y)(dx - idy) = (u_x - iu_y)(dx + idy) = Wdz$. Ciò segue dal fatto che $\bar{W}d\bar{z} = (u_x dx + u_y dy) + i(u_y dx - u_x dy)$, mentre $Wdz = (u_x - iu_y)(dx + idy) = (u_x dx + u_y dy) - i(u_y dx - u_x dy)$. Poiché la linea S è una linea di corrente u e $(dx, dy)^T$ sono paralleli e quindi $(u_y dx - u_x dy) = 0$.

In definitiva si ottiene si trova l'equazione, detta di Blasius:

$$R_y + iR_x = -\frac{\rho}{2} \int_S W^2 dz. \quad (2.151)$$

2.13.3 Paradosso di D'Alembert

Stabiliremo il cosiddetto *Paradosso di D'Alembert* in un caso particolare. Supponiamo di essere nel caso bidimensionale e che un corpo sia immerso in una corrente che a grande distanza dal corpo di profilo S abbia valore c . Potremo pensare che il potenziale di velocità sia allora del tipo $F(z) = cz + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$. Ciò si suppone che $F(z)$ differisca da $c \cdot z$ per una funzione regolare all'infinito. Dunque $W(z) = \frac{dF}{dz} = c - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \dots$ e quindi $W^2(z) = c^2 - \frac{2a_1c}{z^2} - \frac{4a_2c}{z^3} + \frac{a_1^2}{z^4} + \dots$. Poiché manca il termine in $1/z$ il residuo della funzione è nullo e quindi il valore della resistenza dato dalla formula di Blasius (2.151) è nullo: $R = 0$. In realtà si può dimostrare che la validità del paradosso di D'Alembert rimane inalterata anche rinunciando all'incompressibilità del fluido e all'irrotazionalità del moto che può subire anche l'influenza della viscosità. In presenza di regolarità del moto e della condizione asintotica la viscosità non permette di eliminare il paradosso; bisogna rinunciare ad almeno una delle ipotesi suddette: regolarità e comportamento asintotico. Poiché sperimentalmente è sempre $R \neq 0$, una delle due ipotesi deve essere rinnegata se si vuole che lo schema matematico si adatti alla realtà.

2.13.4 Teorema di Kutta-Joukowski

Supporremo dunque che la velocità complessa $W = u_x - iu_y$ sia una funzione regolare, cioè olomorfa, al di fuori del dominio delimitato da S . Inoltre supporremo che asintoticamente la velocità sia parallela all'asse x , con valore c ; cioè $\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = c$. Dunque, in base a queste ipotesi avremo

$$W(z) = c + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots \quad (2.152)$$

Il potenziale complesso è dato dunque (a meno di una costante inessenziale) $F(z) = cz + b_1 \log z - \frac{b_2}{z} + \dots$. Dunque si ha

$$W^2(z) = c^2 + \frac{2cb_1}{z} + \frac{b_1^2 + 2cb_2}{z^2} + \dots, \quad (2.153)$$

Allora dalla formula di Blasius si ottiene

$$R_y + iR_x = -2\pi i \rho c b_1, \quad (2.154)$$

contraddicendo così il paradosso di D'Alembert. Una situazione di questo tipo nasce quando si compone una corrente traslatoria di velocità asintotica c che investe un profilo circolare di raggio a , con una corrente circolatoria dovuta ad un vortice virtuale d'intensità I posto nel centro del profilo, che dà luogo ad una circolazione I della velocità intorno al profilo. In questo caso si trova

$$W(z) = c + \frac{I}{2\pi iz} - \frac{ca^2}{z^2}, \quad (2.155)$$

e quindi

$$R_y + iR_x = -\rho c I.$$

Quest'ultima equazione afferma che

$$R_x = 0, \quad R_y = -\rho c I. \quad (2.156)$$

Cioè *il risultante delle azioni dinamiche è un'azione deviatrice, perpendicolare alla direzione asintotica della corrente, nel verso ottenuto rotando questa di un angolo retto nel senso opposto alla circolazione, e in modulo uguale al prodotto della densità del fluido per i moduli della velocità asintotica e della circolazione*. Questo è l'enunciato del Teorema di Kutta - Joukowski.

La formula trovata, pur non dando conto della resistenza all'avanzamento del profilo S , rende conto dell'azione deviatrice in direzione perpendicolare a quella d'avanzamento; questa è la *portanza* del profilo S . Il calcolo è stato fatto per un profilo circolare; sappiamo che un teorema di Riemann (1.14.1) ci permette di valutare il campo all'esterno di un profilo di grande generalità, noto che sia quello all'esterno di un cilindro.

2.13.5 Effetto della viscosità sulla resistenza al moto.

Le equazioni dei fluidi viscosi sono difficili da integrare. Si possono semplificare notevolmente se il termine $\sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ nell'equazione (2.134) può essere trascurato rispetto agli altri termini. Si ottiene allora un'equazione lineare nelle derivate seconde della velocità. La semplificazione è lecita nei moti detti "lenti". Se inoltre supponiamo che il liquido sia in moto stazionario l'equazione (2.132) e l'equazione della conservazione della massa si semplificano notevolmente e assumono la seguente forma

$$\rho f - \text{grad } p + \mu \Delta u = 0, \quad \text{div } u = 0. \quad (2.157)$$

In quest'equazione si mantengono i termini dipendenti dalla viscosità, mentre si sopprimono i termini non lineari relativi alle forze d'inerzia. Ciò è giustificato quando il numero di Reynolds ($Re = \frac{\rho \cdot a \cdot c}{\mu}$) è piccolo; qui ρ è la densità, a è una dimensione tipica del corpo, c è una velocità tipica del fluido nel caso in oggetto.

Una soluzione notevole, dovuta a Stokes, delle equazioni dette si ottiene nel caso $f = 0$ che si riferisce ad una corrente traslatoria di velocità asintotica c parallela all'asse x , che investe una sfera immobile con centro nell'origine e raggio a . Se r rappresenta la distanza tra il centro della sfera e un generico punto del campo di moto, l'espressione cartesiana della soluzione di Stokes è la seguente

$$\begin{cases} v_x = \frac{3}{4} \frac{ca}{r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) x^2 + c \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \\ v_y = \frac{3}{4} \frac{ca}{r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) xy \\ v_z = \frac{3}{4} \frac{ca}{r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) xz. \end{cases} \quad (2.158)$$

La soluzione è attendibile quando il numero di Reynolds è piccolo, il che accade quando il rapporto tra ρ e μ (il "coefficiente cinematico di viscosità") è grande, oppure quando il raggio della sfera è piccolo, oppure quando la velocità c della corrente è piccola.

Utilizzando questa soluzione nella prima delle equazioni (2.145) si trova che il modulo della risultante delle azioni dinamiche vale

$$R = 6\pi\mu c a, \quad (2.159)$$

che è detta la formula di Stokes per la resistenza di tipo viscoso.

Capitolo 3

Un'introduzione alle serie di Fourier

3.1 Considerazioni preliminari

Dato un sistema numerabile di funzioni $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x), \dots$ definite su un intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} e una funzione $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$, ci poniamo il problema di approssimare $f(x)$ con una serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$, essendo i coefficienti c_n scelti opportunamente.

Cioè, considerata la somma parziale $s_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x)$, ci poniamo il problema di indagare che cosa accade facendo tendere N a $+\infty$, nel senso di vari tipi di convergenza: puntuale, uniforme o in *media quadratica*, come viene meglio precisato di seguito.

Precisamente, diremo che la somma $s_N(x)$ converge *puntualmente* a $f(x)$ se $\forall x \in [a, b]$, si ha che $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$.

Se il limite è uniforme rispetto a x , cioè se $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$, tale che $\forall N > N_\varepsilon$ e $\forall x \in [a, b]$ si ha

$$|s_N(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

diremo che *la convergenza è uniforme*.

Data una funzione $w(x)$ definita su $[a, b]$, per la quale, in generale, è $w(x) \geq 0$ e che chiameremo *funzione peso*, consideriamo l'integrale

$$\int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2 w(x) dx \quad .$$

Diremo che $s_N(x)$ converge in *media quadratica* a $f(x)$ se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2 w(x) dx = 0.$$

Quest'integrale è detto *deviazione quadratica media* o *scarto quadratico medio* di $s_N(x)$ da $f(x)$.

Due funzioni $\phi(x)$ e $\psi(x)$ sono *ortogonali* su $[a, b]$ rispetto al peso $w(x)$ se

$$\int_a^b \phi(x) \cdot \psi(x) \cdot w(x) dx = 0 \quad .$$

Per esempio, le funzioni 1 e x sono ortogonali rispetto al peso $w(x) = 1$ su $[-1, 1]$.

Considereremo data, d'ora in poi, una successione di funzioni $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x), \dots$ definite su $[a, b]$ e a due a due ortogonali rispetto al peso $w(x)$. Possiamo allora porci il problema di determinare i coefficienti c_n in modo tale che per la funzione integrabile $f(x)$ lo scarto quadratico medio sia minimo. Cioè che sia minimo:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x) \right)^2 w(x) dx = \int_a^b f^2(x) w(x) dx \\ & - 2 \sum_{n=1}^N c_n \int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx + \sum_{n=1}^N c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx = \\ & = \sum_{n=1}^N \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx \left[c_n - \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx} \right]^2 + \\ & + \int_a^b f^2(x) w(x) dx - \sum_{n=1}^N \frac{[\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx]^2}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx} \end{aligned}$$

Si vede facilmente che lo scarto è minimo se

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx} \quad (3.1)$$

e in questo caso vale

$$\int_a^b f^2(x) w(x) dx - \sum_{n=1}^N \frac{[\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx]^2}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx}$$

I coefficienti così determinati si dicono i *coefficienti di Fourier* di $f(x)$ rispetto alle funzioni ortogonali $\phi_n(x)$. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (3.2)$$

si dice la *serie di Fourier* di $f(x)$.

Se al posto di c_n si pone il suo valore sopra calcolato, si trova

$$\begin{aligned} 0 & \leq \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x) \right]^2 w(x) dx = \\ & \int_a^b f^2(x) w(x) dx - \sum_{n=1}^N c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dunque, per ogni $N \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{n=1}^N c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) w(x) dx.$$

Se $f(x)$ è a quadrato sommabile su $[a, b]$, prendendo il limite per $N \rightarrow \infty$, si vede che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx$$

converge e inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) w(x) dx. \quad (3.4)$$

Questa disuguaglianza è detta *disuguaglianza di Bessel*.

Un'ulteriore conseguenza è che

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx)^2}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx} = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se, per il sistema di funzioni considerato, la serie ha somma $\int_a^b f^2(x) w(x) dx$, cioè se

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx = \int_a^b f^2(x) w(x) dx, \quad (3.6)$$

allora si dice che vale *l'equazione di Parseval*.

In questo caso il sistema $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x), \dots$ si dice *completo* su $[a, b]$ rispetto al peso $w(x)$.

3.2 Lemma di Riemann-Lebesgue

Abbiamo appena constatato che se $\int_a^b f^2(x) w(x) dx$ è finito e se $(\phi_n(x))_{n=1}^{\infty}$ è un sistema ortogonale, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx}{\sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx}} = 0.$$

In realtà si può ottenere un risultato più forte, che qui riportiamo senza dimostrazione

Lemma 3.2.1 [di Riemann–Lebesgue] *Se la famiglia ortogonale $(\phi_n(x))_n$ di funzioni è tale che $\frac{\phi_n(x)}{\sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)dx}}$ è uniformemente limitata, cioè se esiste una costante $K > 0$ tale che*

$$\forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{\phi_n(x)}{\sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)dx}} \right| \leq K,$$

e se $f(x)$ è assolutamente integrabile, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)w(x)dx}{\sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)dx}} = 0.$$

3.3 Serie di Fourier trigonometriche

Le funzioni $1, \text{sen } x, \cos x, \text{sen } 2x, \cos 2x, \dots, \text{sen } nx, \cos nx, \dots$ sono ortogonali su $-\pi \leq x \leq \pi$, con peso $w = 1$. Lo si vede facilmente calcolando (per parti) gli integrali

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \text{sen } mx \, dx &= \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \text{sen } mx \, dx \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx \, dx &= -\frac{n}{m} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \text{sen } mx \, dx \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \cos mx \, dx &= \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \cos mx \, dx \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \cos nx \, dx &= \frac{\text{sen }^2 nx}{2n} \Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Dunque si trova

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \text{sen } mx \, dx = 0 \quad \text{se } n \neq m; \quad (3.7)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0 \quad \text{se } n \neq m; \quad (3.8)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \cos mx \, dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad . \quad (3.9)$$

Vale poi $\int_{-\pi}^{+\pi} 1 \, dx = 2\pi$, $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen}^2 nx \, dx = \pi$.

Diremo serie di Fourier trigonometrica per una funzione $f(x)$ definita su $[-\pi, \pi]$ e scriveremo

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \text{sen } x + \dots + a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx + \dots \quad (3.10)$$

una serie di funzioni trigonometriche nella quale

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad , \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad , \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx \quad , \end{aligned} \quad (3.11)$$

in accordo con il valore di c_n ottenuto in generale:

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx} \quad .$$

Qui si è preferito scrivere $\frac{a_0}{2}$ al posto di c_0 , per consentire una maggiore simmetria nelle formule.

Ora

$$\begin{aligned} s_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N (\cos nx \cdot \cos nt + \operatorname{sen} nx \cdot \operatorname{sen} nt) \right\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(x-t) \right\} dt \quad . \end{aligned}$$

Si osservi che

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos ny \right\} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} y \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} y \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) y - \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{2} \right) y] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} y \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{3}{2} y \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} y \right) + \dots + \operatorname{sen} \left(N + \frac{1}{2} \right) y - \operatorname{sen} \left(N - \frac{1}{2} \right) y \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(N + \frac{1}{2} \right) y \quad . \end{aligned}$$

Dunque

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos ny = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} \left(N + \frac{1}{2} \right) y}{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} y \right)} \quad (3.12)$$

e quindi

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\operatorname{sen} \left(N + \frac{1}{2} \right) (t-x)}{\operatorname{sen} \left(\frac{t-x}{2} \right)} dt \quad .$$

Se poniamo $t = x + \tau$, allora $\tau \in [-\pi - x, \pi - x]$ e si trova

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau) \frac{\operatorname{sen} \left(N + \frac{1}{2} \right) \tau}{\operatorname{sen} \left(\frac{\tau}{2} \right)} d\tau \quad .$$

Prolungando per periodicità $f(x)$ fuori da $[-\pi, \pi]$, avendo definito $f(x + 2\pi n) = f(x)$, per $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, allora anche $s_N(x)$ è periodica di periodo 2π e l'integrale esteso a $[-\pi - x, \pi - x]$ è uguale all'integrale esteso a $[-\pi, \pi]$. Cioè

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \tau) \frac{\text{sen}(N + \frac{1}{2})\tau}{\text{sen}(\frac{\tau}{2})} d\tau \quad . \quad (3.13)$$

Abbiamo usato come sistema ortogonale le funzioni $1, \text{sen } x, \cos x, \dots, \text{sen}(nx), \cos(nx), \dots$

Un altro sistema comunemente usato è quello dato dalle funzioni $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$, che sono periodiche di periodo 2π . È facile riconoscere che

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ihx} dx = \frac{1}{k-h} e^{i(k-h)x} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq h \\ 2\pi & \text{se } k = h \end{cases} .$$

Dunque il sistema $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ è ortogonale e la serie di Fourier relativa ad una funzione a quadrato sommabile, rispetto al nuovo sistema di funzioni ortogonali, si scrive

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad (3.14)$$

dove $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$. Si noti che essendo qui le funzioni a valori complessi il prodotto scalare di due funzioni f e g , definite su $[a, b]$, è dato da $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$. Poiché per una stessa funzione f le due rappresentazioni 3.10 e 3.14 debbono coincidere, la relazione tra i coefficienti a_n, b_n e i c_n deve essere la seguente:

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.15)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n \in \mathbb{N}^+ \dots, \quad (3.16)$$

e, rispettivamente,

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad (3.17)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (3.18)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n \in \mathbb{N}^+. \quad (3.19)$$

Se $p_n = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$, allora

$$\|p_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |p_n(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=0}^n (|a_k|^2 + |b_k|^2) \right). \quad (3.20)$$

3.4 Convergenza puntuale

Vale il seguente teorema di convergenza puntuale per le serie di Fourier

Teorema 3.4.1 (Convergenza puntuale. Criterio di Dini.) *Sia $f(x)$ una funzione definita su $[-\pi, \pi]$ che penseremo estesa per periodicità a tutto \mathbb{R} . Se f è continua in x e vale la seguente condizione di Dini*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x+\tau) - f(x)}{\tau} \right| d\tau < +\infty \quad , \quad (3.21)$$

allora la serie di Fourier converge a $f(x)$. Se la funzione ha in x limiti finiti da destra e da sinistra che indicheremo con $f(x+)$ e $f(x-)$ ripettivamente e vale la condizione di Dini generalizzata

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x+\tau) - f(x+) + f(x-\tau) - f(x-)}{\tau} \right| d\tau < +\infty \quad , \quad (3.22)$$

allora la serie di Fourier converge a $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$.

Dimostrazione: Integrando l'equazione (3.12) su $[-\pi, \pi]$, si trova

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}(N + \frac{1}{2})\tau}{\text{sen}(\frac{\tau}{2})} d\tau \quad .$$

Tenendo conto di quest'uguaglianza e della (3.13) si ottiene

$$\begin{aligned} s_N(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) \frac{\text{sen}(N + \frac{1}{2})\tau}{\text{sen}(\frac{\tau}{2})} d\tau - \\ &- f(x) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}(N + \frac{1}{2})\tau}{\text{sen}(\frac{\tau}{2})} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\tau) - f(x)] \frac{\text{sen}(N + \frac{1}{2})\tau}{\text{sen}(\frac{\tau}{2})} d\tau . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Le funzioni $\text{sen}(N + \frac{1}{2})\tau$, $N = 0, 1, 2, \dots$ sono ortogonali e soddisfano le condizioni del Lemma di Riemann – Lebesgue. Allora, se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x+\tau) - f(x)}{\text{sen}(\frac{\tau}{2})} \right| d\tau < +\infty \quad ,$$

ossia se, equivalentemente, vale 3.21, si trova che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x) \quad . \quad (3.24)$$

Osserviamo che, affinché valga la (3.24), non è sufficiente che $f(x)$ sia continua nel punto x . Infatti una serie di Fourier può divergere in punti nei quali $f(x)$ è continua se la condizione di Dini è violata. Se $f(x)$ è assolutamente integrabile e derivabile in un punto x , allora la serie di Fourier converge a $f(x)$. Più in generale, se in un intorno di x la funzione è hölderiana, cioè se esistono $M > 0$ e $\alpha > 0$ (e $\alpha \leq 1$) tali che $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$, allora la serie di Fourier è convergente.

Più in generale si osservi che si può scrivere

$$s_N(x) - s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x+\tau) - s(x) + f(x-\tau) - s(x)] \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}(\frac{\tau}{2})} d\tau. \quad (3.25)$$

Se f non è continua in x , ma ha limiti finiti da destra e da sinistra, indicati rispettivamente con $f(x+)$ e $f(x-)$, e vale la condizione di Dini generalizzata 3.22 allora, posto $s(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$, si trova

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] \quad . \quad (3.26)$$

□

3.5 Convergenza uniforme

Da quanto abbiamo appena detto segue che, affinché $s_N(x)$ converga uniformemente a $f(x)$ la funzione *deve* essere continua e inoltre *deve valere* $f(-\pi) = f(\pi)$. Queste condizioni non sono tuttavia sufficienti.

Teorema 3.5.1 *Supponiamo che $f(x)$ sia continua, periodica di periodo 2π e che $f'(x)$ sia continua tranne che in un numero finito di punti dove può non essere definita. Supponiamo inoltre che sia finito $\int_{-\pi}^\pi (f'(x))^2 dx$ e che valga la formula $f(x) - f(-\pi) = \int_{-\pi}^x f'(t) dt$. Allora la convergenza della serie di Fourier a $f(x)$ è uniforme.*

Dimostrazione: Sia

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \dots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \dots ;$$

calcoliamo i coefficienti di Fourier di $f'(x)$.

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f'(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \{f(x) \cos nx|_{-\pi}^\pi + n \int_{-\pi}^\pi f(x) \operatorname{sen} nx dx\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cos n\pi \{f(\pi) - f(-\pi)\} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \operatorname{sen} nx dx = nb_n. \end{aligned}$$

Analogamente $\beta_n = -na_n$. Dunque

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \operatorname{sen} nx).$$

La disuguaglianza di Bessel dà

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (f'(x))^2 dx \quad . \quad (3.27)$$

Ora $s_N(x) - s_M(x) = \sum_{n=N+1}^M (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ e $|s_N(x) - s_M(x)| \leq \sum_{n=N+1}^M (|a_n| + |b_n|) = \sum_{n=N+1}^M \left(\frac{n|a_n|}{n} + \frac{n|b_n|}{n} \right) \leq \left(\sum_{n=N+1}^M 2 \cdot n^2 (a_n^2 + b_n^2) \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}$. Si è tenuto conto della disuguaglianza di Cauchy - Buniakovski - Schwarz e del fatto che $(|a_n| + |b_n|)^2 \leq 2 \cdot (|a_n|^2 + |b_n|^2)$. Dunque

$$|s_N(x) - s_M(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x) dx} \cdot \sqrt{\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^2}}. \quad (3.28)$$

Poiché la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, possiamo concludere che, per il criterio generale di convergenza di Cauchy, la successione $s_N(x)$ converge uniformemente alla sua somma. Si trova poi che la somma è proprio $f(x)$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f'(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} |f'^2(t)| dt} \cdot \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} 1 dt} \\ &\leq |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\int_a^b |f'^2(t)| dt} \leq K \cdot |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dunque $f(x)$ è hölderiana con esponente $\alpha = \frac{1}{2}$ e quindi la serie di Fourier, per ogni x , converge a $f(x)$. \square

In particolare, c'è convergenza uniforme a $f(x)$ se $f'(x)$ è hölderiana o se nel numero finito di punti nei quali non è continua ha limiti finiti da destra e da sinistra.

Si dimostra poi che la serie di Fourier di una funzione a quadrato sommabile converge in media quadratica. Cioè che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_N(x)|^2 dx = 0, \quad ,$$

se $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < \infty$.

Ciò significa che il sistema ortogonale $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ è *completo*.

3.6 Cambiamento di scala

Finora abbiamo supposto $f(t)$ definita su $[-\pi, \pi]$. Supponiamo ora che sia definita su un generico intervallo $[a, b]$. La sostituzione di variabile

$$x = \frac{2\pi(t - \frac{a+b}{2})}{b - a}, \quad ,$$

porta $[a, b]$ in $[-\pi, \pi]$. Si trova poi

$$t = \frac{b-a}{2\pi}x + \frac{1}{2}(a+b) \quad .$$

Data $f(t)$ su $[a, b]$, $F(x) = f(\frac{b-a}{2\pi}x + \frac{1}{2}(a+b))$ è definita su $[-\pi, \pi]$. La serie di Fourier di $F(x)$ sia

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots ,$$

con

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(nx) dx . \end{aligned}$$

Allora

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos \frac{2n\pi}{b-a} \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.29)$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \sin \frac{2n\pi}{b-a} \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt, \quad n \in \mathbb{N}^+ . \quad (3.30)$$

In particolare, se $f(t)$ è definita tra 0 e T e la prolunghiamo per parità (disparità) tra $-T$ e T ,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \quad \text{e} \quad b_n = 0 \quad (3.31)$$

$$(b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \quad \text{e} \quad a_n = 0) . \quad (3.32)$$

3.7 Qualche esempio

Sia $f(x) = x$ su $[-\pi, \pi]$. Allora $a_n = 0$ per ogni n e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = -2 \frac{(-1)^n}{n} .$$

Perciò

$$x \sim -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx = 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{2}{4} \sin 4x + \dots$$

La serie di Fourier converge in $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Il valore di $\sin \frac{n\pi}{2}$ è 0 se n è pari, è $(-1)^k$ se $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$.

Perciò si ottiene $\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ cioè

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} .$$

Nel caso considerato l'uguaglianza di Parseval fornisce

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$$

Dunque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Se $f(x) = x^2$ su $[-\pi, \pi]$, $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$ e $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$, per $n \geq 1$, mentre $b_n = 0$ per ogni n . Allora

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x + \dots$$

In $x = 0$ la serie converge e si trova $0 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cdot (1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots)$. Cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

3.8 Serie di Fourier di funzioni continue

È noto che esistono funzioni continue per le quali le serie di Fourier sono divergenti in qualche punto; a maggiore ragione la serie di Fourier di una funzione continua può non convergere uniformemente alla funzione stessa. Tuttavia vale la pena di mettere in evidenza che i coefficienti di Fourier di una funzione continua individuano la funzione. Cioè i coefficienti di Fourier permettono di individuare una successione di polinomi che converge uniformemente alla funzione. È noto che se una serie converge, cioè se la successione delle ridotte della serie data $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha limite finito s anche la serie delle medie

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n+1},$$

converge allo stesso limite. Questo modo di sommare le serie si dice sommazione alla Cesàro. Può accadere che una serie sia convergente per la sommazione alla Cesàro, senza essere convergente. Infatti vale il seguente

Lemma 3.8.1 *Sia data una successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente al limite s . Allora $\sigma_n \rightarrow s$. Tuttavia esistono successioni non convergenti che risultano convergenti nel senso di Cesàro.*

Dimostrazione. È immediato riconoscere che la successione $s_n = (-1)^n$ fornisce un esempio all'ultima affermazione del teorema. Infatti $((-1)^n)$ non ha limite per $n \rightarrow \infty$. Tuttavia $\sum_{k=0}^n (-1)^k = 0$ se n è pari, e $= 1$ se n è dispari. Dunque $|\sigma_n| \leq \frac{1}{n+1}$ e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$.

Supponiamo ora che la successione di termine generale s_n converga al numero s . Dimostriamo che anche $\sigma_n \rightarrow s$. Poiché $s_n \rightarrow s$, dato $\varepsilon > 0$ esiste un numero \bar{n} tale che se $n > \bar{n}$ si ha $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Si ponga $B = \sum_{k=1}^{\bar{n}} |s_k - s|$ e si prenda un numero $\bar{m} > \bar{n}$ tale che $\bar{m} > \frac{2B}{\varepsilon}$. Si consideri poi un valore di $n > \bar{m}$ e si valuti

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (s_k - s) \right| &= \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n (s_k - s) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |s_k - s| = \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{\bar{n}} |s_k - s| + \sum_{k=\bar{n}+1}^n |s_k - s| \right) < \frac{1}{n+1} \left(B + (n - \bar{n}) \frac{\varepsilon}{2} \right) < \\ &< \frac{1}{n+1} \left((n+1) \frac{\varepsilon}{2} + (n+1) \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Ebbene dimostreremo il seguente teorema dovuto al matematico ungherese Lipót Fejér¹:

Teorema 3.8.1 (Fejér, 1900) *Sia f una funzione periodica di periodo 2π definita su \mathbb{R} e a valori in \mathbb{C} . Supponiamo che f sia integrabile secondo Riemann su $[0, 2\pi]$. Denotiamo con $\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(f, x)$, dove $s_k(f, x)$ sono le usuali somme parziali della serie di Fourier della funzione f nel punto $x \in \mathbb{R}$. Allora*

(i) *Se f è continua in un punto $x \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f, x) = f(x)$.*

(ii) *Se f è continua su tutto \mathbb{R} , il precedente limite è uniforme su \mathbb{R} .*

Dimostrazione. Vogliamo valutare il polinomio trigonometrico di Fejér d'ordine n , così definito

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}. \quad (3.33)$$

Ricordando l'espressione di ogni $s_k(x)$ per $k = 0, 1, \dots, n$, si ottiene

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \frac{n}{n+1} (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \frac{n-1}{n+1} (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \\ &\dots + \frac{1}{n+1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned}$$

Dunque, nel passaggio da $s_n(x)$ a $\sigma_n(x)$ il termine $(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ viene sostituito da $\frac{n-k+1}{n+1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Ricordando che

$$s_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin(t/2)} dt,$$

si trova

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sum_{k=0}^n \sin(k+1/2)t}{\sin(t/2)} dt. \quad (3.34)$$

¹Lipót Fejér alla nascita (9 febbraio 1880, Pécs) si chiamava Leopold Weiss. Cambiò il suo nome nel 1900 per apparire più ungherese. Questa era ai suoi tempi una pratica piuttosto diffusa per dimostrare rispetto verso la cultura ungherese. Studente molto precoce studiò matematica e fisica a Budapest e a Berlino. Allievo di Schwarz a Berlino, quando costui seppe del cambiamento di nome, si rifiutò di rivolgergli la parola da allora in poi.

Indichiamo il nucleo di Fejér con

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \frac{\sum_{k=0}^n \operatorname{sen}(k+1/2)t}{\operatorname{sen}(t/2)},$$

e vediamo come si possa riscrivere in modo adeguato. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\operatorname{sen}(\frac{t}{2})$ si trova (ricordando che $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]/2$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \operatorname{sen}((k+1/2)t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n [\cos(kt) - \cos((k+1)t)] = \\ &= \frac{1}{2} [1 - \cos((n+1)t)] = \operatorname{sen}^2\left(\frac{n+1}{2}t\right). \end{aligned}$$

Dunque

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\operatorname{sen}^2(t/2)}, \quad (3.35)$$

che è una funzione non negativa, pari, periodica di periodo 2π , come si riconosce immediatamente, e inoltre tale che $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$. Quest'ultima proprietà segue dalla proprietà analoga del nucleo di Dirichlet. Si ha inoltre, per ogni $\delta > 0$

$$\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(t) dt = \int_{\delta}^{\pi} F_n(t) dt \leq \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{\operatorname{sen}^2(\delta/2)} \rightarrow 0, \quad (3.36)$$

per $n \rightarrow +\infty$. Possiamo infine valutare la differenza tra $\sigma_n(x)$ e $f(x)$. Si ha $\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt$ e $f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(t) dt$. Dunque

$$\sigma_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) F_n(t) dt,$$

e, passando ai valori assoluti

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt. \quad (3.37)$$

Se f è continua su $[-\pi, \pi]$ essa è ivi uniformemente continua; essendo periodica di periodo 2π è poi uniformemente continua su tutto \mathbb{R} . Perciò, preso $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $|t| < \delta$, $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon/2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; dunque in questo caso dimostreremo che la convergenza di $\sigma_n(x)$ a $f(x)$ è uniforme; altrimenti, nell'ipotesi della continuità nel punto x , si ottiene la convergenza nel punto (il valore δ_x trovato in corrispondenza al dato $\varepsilon > 0$ dipende anche da x).

Possiamo considerare

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt &= \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt + \\ &+ \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt. \end{aligned}$$

Per il contributo dell'integrale da $-\delta$ a δ si ha

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Osserviamo poi che $|f(x+t) - f(x)| \leq 2\|f\|_{\infty}$. Vale perciò

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt &\leq \\ &\leq 4\|f\|_{\infty} \int_{\delta}^{\pi} F_n(t) dt. \end{aligned}$$

Per la validità della relazione (3.8), esiste un valore \bar{n} tale che per $n > \bar{n}$ quest'ultima somma è $< \varepsilon/2$. Tenuto conto delle disuguaglianze ricordate, si trova che quale che sia $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{per } n > \bar{n}. \quad (3.38)$$

□

Il teorema di Fejér è particolarmente sorprendente alla luce di un precedente risultato dovuto al matematico tedesco Paul David Gustav Du Bois-Reymond (nato a Berlino nel 1831, morto a Freiburg nel 1889)

Teorema 3.8.2 (Du Bois-Reymond, 1876) *Esiste una funzione continua su \mathbb{R} e periodica di periodo 2π tale che $\max \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, 0) = \infty$.*

Ricordiamo che $\max \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} s_k)$.

La storia della convergenza delle serie di Fourier è ricca di colpi di scena. Infatti nel 1926 il matematico russo Andrey Nikolaevich Kolmogorov (Tambov 1903, Mosca 1987) dimostrò

Teorema 3.8.3 *Dato $K > 0$ esiste un polinomio trigonometrico $G : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$(i) \quad G(t) \geq 0 \text{ per ogni } t \in [0, 2\pi] \text{ e } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(t) dt \leq 1;$$

$$(ii) \quad \max \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n(G, t)| \geq K \text{ per ogni } t \in [0, 2\pi].$$

Passando alle funzioni integrabili secondo Lebesgue dimostrò inoltre che

Teorema 3.8.4 *Esiste una funzione $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile secondo Lebesgue e tale che $\max \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n(f, t)| = \infty$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$.*

Benché la funzione costruita da Kolmogoroff non fosse neppure integrabile secondo Riemann, molti si attendevano che di lì a poco qualcuno avrebbe costruito un esempio di funzione continua su $\mathbb{T} = \mathbb{R} \bmod (2\pi\mathbb{Z})$ la serie di Fourier della quale divergesse in ogni punto. Tuttavia nel 1964 il matematico svedese Lennart Carleson dimostrò

Teorema 3.8.5 *Se $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ è continua o anche solo integrabile secondo Riemann allora $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, t) = f(t)$ per ogni $t \notin E$, dove E è un sottoinsieme di misura nulla secondo Lebesgue di \mathbb{T} .*

Infine Jean-Pierre Kahane (Parigi) e Yitzhak Katznelson (Stanford) nel 1966 trovarono un interessante complemento al teorema di Carleson

Teorema 3.8.6 *Dato un insieme di misura nulla $E \subset \mathbb{T}$ esiste una funzione continua $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\max \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n(f, t)| = \infty$ per ogni $t \in E$.*

Si può dunque concludere che il problema della convergenza puntuale delle serie di Fourier di una funzione continua è completamente risolto. Infatti, mentre la serie di Fourier di una funzione continua o anche solo integrabile secondo Riemann, può non essere convergente alla funzione stessa in un insieme di misura nulla, tuttavia i coefficienti di Fourier di una funzione continua, poiché la serie converge quasi ovunque, individuano la funzione continua (o anche solo integrabile secondo Riemann). La stessa situazione si verifica per ogni funzione di $L^p(\mathbb{R})$, periodica di periodo 2π , per $p > 1$. Invece se si suppone solo che la funzione sia di classe $L^1(\mathbb{R})$, cioè integrabile secondo Lebesgue sulla retta reale e periodica di periodo 2π , ossia $f \in L^1(\mathbb{T})$, la serie di Fourier relativa può essere ovunque divergente, come dimostra il teorema di Kolmogorov. I precedenti risultati traggono origine dal seguente teorema di Katznelson (1966): “ Se $1 < p < \infty$ vale la seguente alternativa: o tutte le serie di Fourier delle funzioni $f \in L^p(\mathbb{T})$ sono convergenti quasi ovunque, o ne esiste una che diverge ovunque. La proprietà dimostrata per le funzioni di classe $L^p(\mathbb{T})$ fu poi estesa con la collaborazione di Kahane alle funzioni di classe $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, come già abbiamo ricordato.

3.9 Il fenomeno di Gibbs

Il fisico americano (di origine prussiana) Albert Abraham Michelson aveva costruito una macchina per calcolare le funzioni periodiche a partire dalle loro serie di Fourier e viceversa. Volle sperimentare la sua macchina per ricostruire la funzione “dente di sega”, $f(x) = x$ su $[-\pi, \pi]$, prolungata per periodicità su tutto \mathbb{R} , sommando 80 termini dello sviluppo di Fourier. Con sua grande sorpresa, la sua macchina non riproduceva esattamente il grafico della funzione, ma aggiungeva, in corrispondenza ai punti di discontinuità, uno “sbuffo” del grafico che sopravvalutava il salto nel grafico della funzione. Gibbs successivamente spiegò il fenomeno. In realtà il matematico inglese Wilbraham aveva previsto e spiegato il fenomeno nel 1848, circa 50 anni prima. Tuttavia la spiegazione di Wilbraham, come quella di Gibbs, si riferiva a esempi particolari di serie di Fourier. Una spiegazione generale del fenomeno venne data dal matematico americano Maxime Bôcher nel

1906. Per meglio mettere in evidenza il cosiddetto “fenomeno di Gibbs”, faremo riferimento ad un semplice caso specifico di serie di Fourier, relativa alla funzione $\text{sign}(x)$ (ristretta all'intervallo $[-\pi, \pi]$ e prolungata per periodicità su tutto \mathbb{R}).

Abbiamo

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_n &= 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}(x) \text{sen}(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}(nx) dx = -\frac{2}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{per } n \text{ dispari,} \\ 0, & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque

$$\text{sign}(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \text{sen}((2n+1)x). \quad (3.39)$$

Dunque

$$\begin{aligned} s_{2n-1}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4}{(2k+1)\pi} \text{sen}((2k+1)x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x \cos((2k+1)t) dt = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\text{sen}(2nt)}{\text{sen } t} dt. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è fatto uso del fatto che

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos((2k+1)t) \text{sen } t}{\text{sen } t} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\text{sen } t} (\text{sen}(2k+2)t - \text{sen}(2kt)) = \frac{\text{sen}(2nt)}{2\text{sen}(t)} \end{aligned}$$

Ora la derivata di $s_{2n-1}(x)$ è $s'_{2n-1}(x) = \frac{2 \text{sen}(2nx)}{\pi \text{sen } x}$ che si annulla per $2nx = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. I punti $x'_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sono punti di massimo relativo, i punti $x''_k = \frac{k\pi}{n}$ sono di minimo relativo. Il primo punto di massimo relativo a destra dello zero è $x'_0 = \frac{\pi}{2n}$ e il valore della somma in quel punto è $s_{2n-1}(x'_0) = y'_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\text{sen}(2nt)}{\text{sen } t} dt$. Ora si ha

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\text{sen}(2nt)}{\text{sen } t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\text{sen}(2nt)}{t} dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \text{sen}(2nt) \left(\frac{1}{\text{sen } t} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Ma $\left(\frac{1}{\text{sen } t} - \frac{1}{t} \right)$ è limitato in $[0, \pi]$ poiché ha limite 0 per $t \rightarrow 0$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \text{sen}(2nt) \left(\frac{1}{\text{sen } t} - \frac{1}{t} \right) dt = 0$$

Inoltre

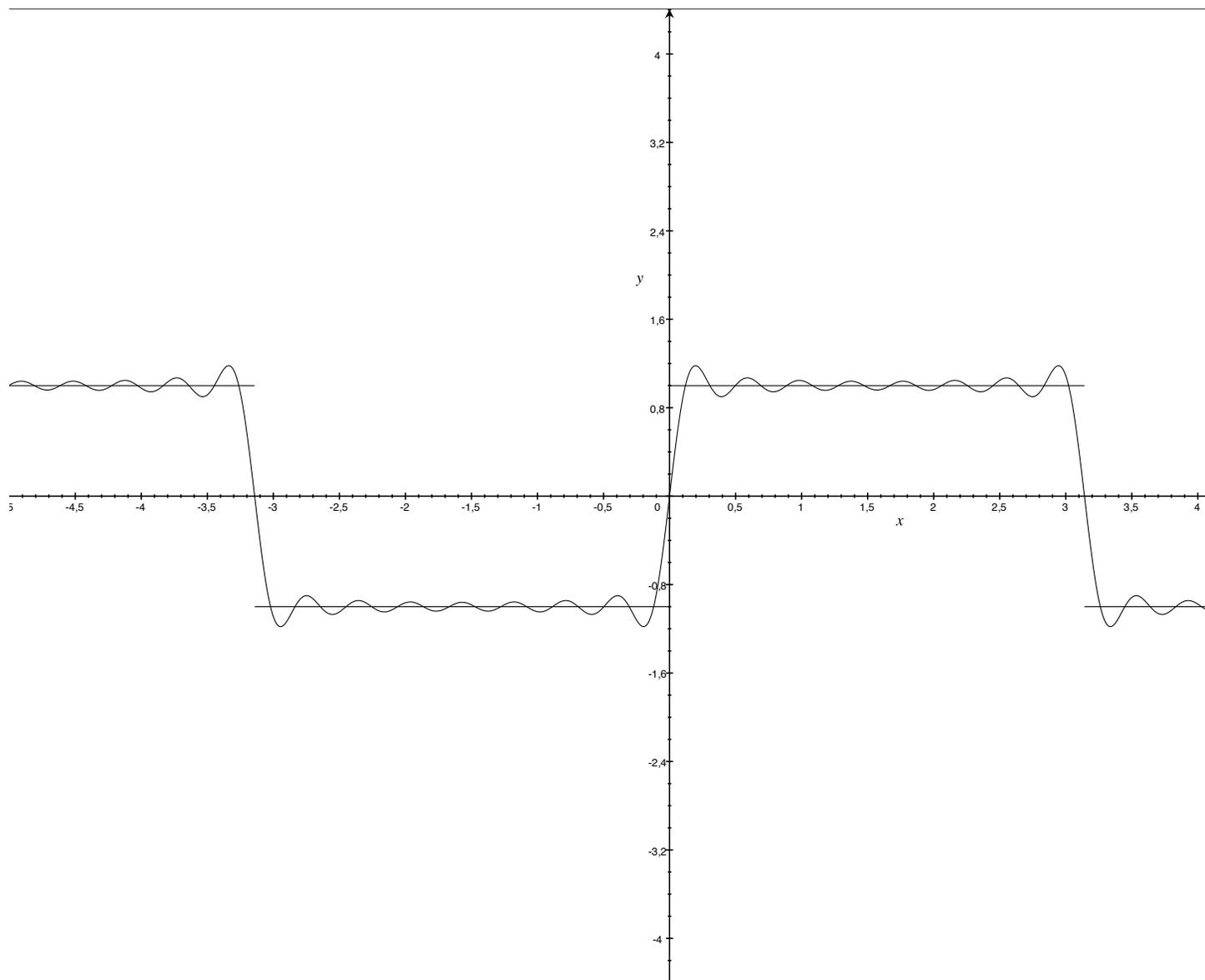
$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\text{sen}(2nt)}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } \sigma}{\sigma} d\sigma,$$

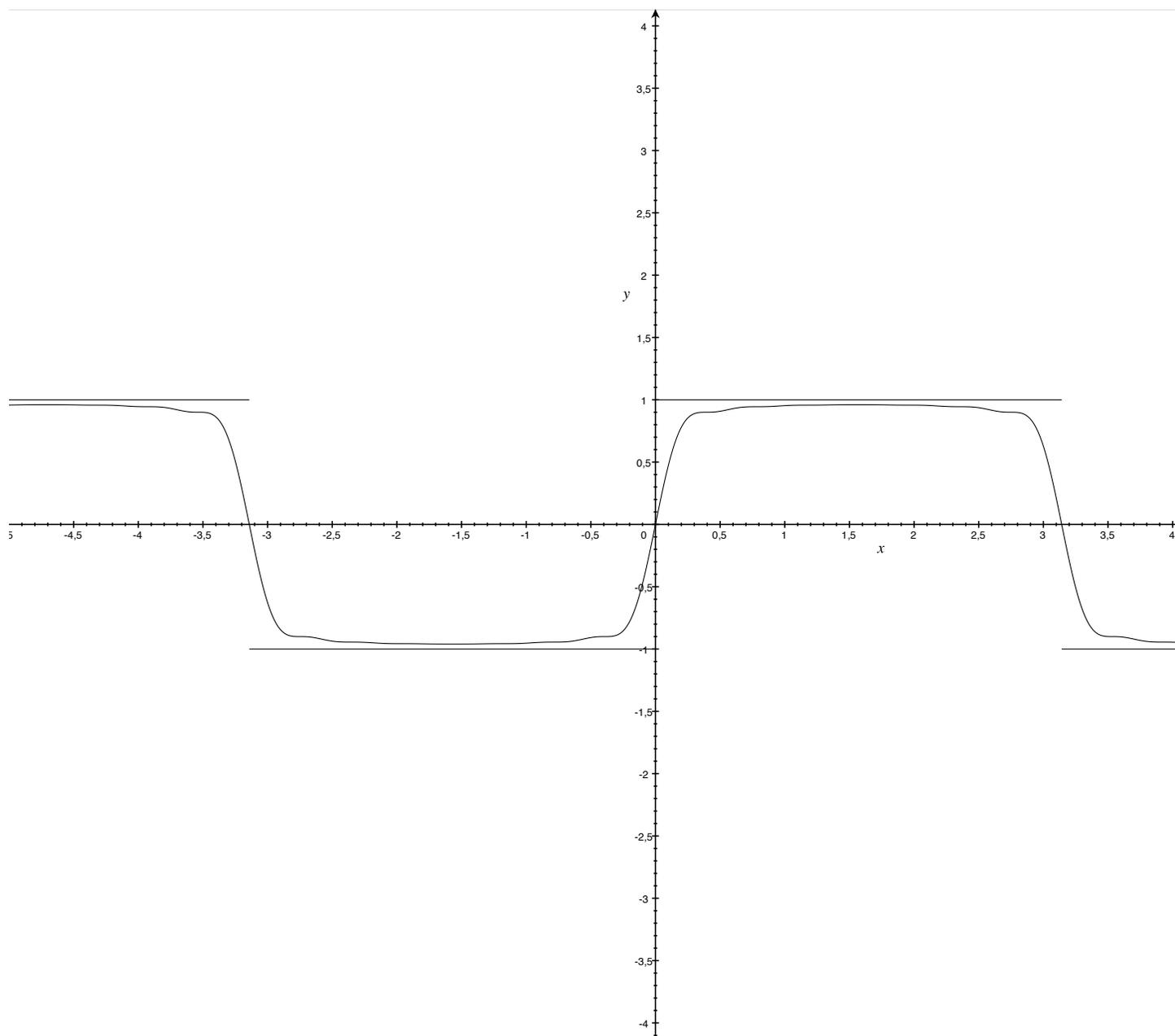
(qui si è fatta la sostituzione $\sigma = 2nt$) e dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\text{sen}(2nt)}{\text{sen } t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } \sigma}{\sigma} d\sigma.$$

Il valore del secondo membro dell'uguaglianza è all'incirca 1,18 (valutato per eccesso). Dunque, quando ci si avvicina da destra alla singolarità in 0 della nostra funzione il valore del limite della funzione (che è 1) viene sopravvalutato di circa il 18%.

Il fenomeno di Gibbs non si verifica se le serie di Fourier vengono sommate alla Cesàro, come accade nel Teorema di Féjer.

Figura 3.1: Fenomeno di Gibbs, per $s_{15}(x)$.

Figura 3.2: Fenomeno di Gibbs, per $\sigma_{15}(x)$ (somma alla Cesàro).

Capitolo 4

Un'introduzione all'integrale di Lebesgue

4.1 Definizioni e prime proprietà

Introdurremo l'integrale di Lebesgue cercando di evitare, per quanto è possibile le difficoltà tecniche, e cercando di mettere in evidenza gli aspetti sostanziali della teoria, evitando talvolta le dimostrazioni dei teoremi più ponderosi.

Cominceremo pertanto mettendo in evidenza una nozione fondamentale. Quella di *insieme di misura nulla secondo Lebesgue*.

Definizione 4.1.1 *Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice di misura nulla secondo Lebesgue (o semplicemente di misura nulla) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione di rettangoli $\{R_k\}$ tale che*

$$A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} m(R_k) \leq \varepsilon$$

Qui per rettangolo R di \mathbb{R}^n intendiamo un insieme del tipo $R = [a_1, b_1[\times [a_2, b_2[\times \dots \times [a_n, b_n[$ con, in generale, $a_i < b_i, i = 1, \dots, n$, cioè un rettangolo superiormente semiaperto. La misura elementare di R è $m(R) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$. Non escluderemo tuttavia il caso del rettangolo vuoto, di misura nulla.

Esempio 4.1.1

- Se A è un insieme di misura nulla secondo Peano - Jordan, lo è anche secondo Lebesgue. Basta scegliere i rettangoli vuoti da un certo \bar{n} in poi.

- Ogni insieme numerabile ha misura nulla. Infatti se $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si prenda un rettangolo R_k tale che $x_k \in R_k$ e $m(R_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Allora $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R_k$ e $\sum_{k \in \mathbb{N}} m(R_k) < \varepsilon \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+1}} = \varepsilon$.

Piú in generale si ha

Proposizione 4.1.1 *Sia $\{A_k\}$ una successione di insiemi di misura nulla. Allora $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ ha misura nulla.*

Dimostrazione: Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $\{R_{k,j} : j \in \mathbb{N}\}$ una successione di rettangoli tale che $A_k \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} R_{k,j}$ con $\sum_{j=0}^{\infty} m(R_{k,j}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.

Se $\mathcal{R} = \{R_{k,j} : k, j \in \mathbb{N}\}$, allora $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k,j=0}^{\infty} R_{k,j}$ e $\sum_{k,j=0}^{\infty} m(R_{k,j}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{\infty} m(R_{k,j})) < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon$. \square

Definizione 4.1.2 *Diremo che una proprietà $\mathcal{P}(x)$, ($x \in \mathbb{R}^n$) è vera quasi ovunque (q.o.) se l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ per i quali è falsa ha misura nulla secondo Lebesgue (L-nulla).*

Esempio 4.1.2

- 1. $\mathcal{P}(x) = "x \in \mathbb{R}$ non è un intero" è vera q.o.
- 2. $e^{-k|x|} \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ è vera q.o. (infatti è falsa solo per $x = 0$).
- 3. $u_k(x) \rightarrow u(x)$ per $k \rightarrow +\infty$ vale q.o. se l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^n$ tali che $u_k(x) \not\rightarrow u(x)$ ha misura L-nulla.

- 4.

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

è nulla q.o.

- 5. $u(x) = v(x)$ q.o. se $\{x : u(x) \neq v(x)\}$ ha misura L-nulla.

Definizione 4.1.3 *Una funzione a valori complessi $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ è detta a scala se è combinazione lineare (dunque finita) di funzioni caratteristiche di rettangoli (superiormente semiaperti). Cioè se*

$$u(x) = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{R_k}(x). \quad (4.1)$$

Si definisce poi l'integrale elementare della funzione

$$\int u \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \, dx = \sum_{k=1}^m c_k \cdot m(R_k) \quad (4.2)$$

Si osservi che si può sempre supporre che i rettangoli superiormente semiaperti che entrano nella definizione di funzione a scala siano a due a due disgiunti se ciò è opportuno. Infatti l'unione di due rettangoli di \mathbb{R}^2 con intersezione non vuota è data da al più sette rettangoli superiormente semiaperti a due a due disgiunti. Naturalmente i valori delle costanti risulteranno mutati. Analogamente si può procedere in \mathbb{R}^n : se due rettangoli si intersecano, la loro riunione è data da al più $2^{n+1} - 1$ rettangoli superiormente semiaperti a due a due disgiunti.

Definizione 4.1.4 *una funzione $u(x)$ a valori complessi definita q.o. in \mathbb{R}^n è detta integrabile secondo Lebesgue (o L-integrabile o semplicemente integrabile) o sommabile se esiste una successione di funzioni a scala $(u_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ tale che*

$$(a) \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(x) = u(x) \text{ q.o.}$$

$$(b) \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} : \forall k_1, k_2 \geq \bar{k} \int |u_{k_1} - u_{k_2}| dx < \varepsilon.$$

Esempio 4.1.3 $f(x) = e^{-|x|}$ è integrabile su \mathbb{R} .

Dimostrazione: Dividiamo l'intervallo chiuso $[-k, k]$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ in $2k^3$ parti uguali e poniamo

$$u_k(x) = \begin{cases} e^{-\frac{j}{k^2}} & \text{se } \frac{j-1}{k^2} \leq |x| < \frac{j}{k^2}, 1 \leq j \leq k^3 \\ 0 & \text{se } |x| > k. \end{cases}$$

Osserviamo che, se $\frac{j-1}{k^2} \leq |x| < \frac{j}{k^2}$, allora $e^{-|x|} - e^{-\frac{j}{k^2}} \leq e^{-\frac{j-1}{k^2}} - e^{-\frac{j}{k^2}} = e^{-\frac{j-1}{k^2}}(1 - e^{-\frac{1}{k^2}}) \leq e^{-\frac{j-1}{k^2}} \cdot \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$. Dunque $|u(x) - u_k(x)| \leq \frac{1}{k^2}$ per $|x| \leq k$, mentre $|u(x) - u_k(x)| \leq e^{-|x|} \leq e^{-k}$ se $|x| > k$.

Da ciò si deduce che $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(x) = u(x)$ q.o. e inoltre che

$$\int |u_{k'} - u_{k''}| dx \leq \int u_{k'} dx + \int u_{k''} dx \leq \frac{2}{k'} + \frac{2}{k''} \rightarrow 0 \text{ per } k', k'' \rightarrow \infty,$$

cioè che valgono le condizioni (a) e (b) della precedente definizione. Infatti $\int u_k dx = \int_{-k}^k u_k dx = \sum_{j=-k}^k e^{-\frac{|j|}{k^2}} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{j=-k}^k \frac{1}{k^2} = \frac{2k}{k^2} = \frac{2}{k}$.

Osservazione 4.1.1 *Se u è integrabile e $v = u$ q.o. allora anche v è integrabile.*

Osservazione 4.1.2 *Se u è integrabile anche $|u|$ è integrabile.*

Dimostrazione: Infatti, se (u_k) è una successione che verifica le condizioni (a) e (b) per la funzione $u(x)$ allora la successione $(|u_k(x)|)$ le soddisfa per $|u(x)|$. Ciò segue dal fatto che $||u_k(x)| - |u(x)|| \leq$

$|u_k(x) - u(x)|$ e quindi che se $u_k \rightarrow u$ qo, allora $|u_k| \rightarrow |u|$ qo. Inoltre $||u_{k'}(x)| - |u_{k''}(x)|| \leq |u_{k'}(x) - u_{k''}(x)|$ e quindi se $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} : \forall k', k'' > \bar{k}$ si ha

$$\int |u_{k'} - u_{k''}| dx < \varepsilon$$

a maggiore ragione

$$\int ||u_{k'}| - |u_{k''}|| dx < \varepsilon.$$

Dunque resta dimostrato che $|u|$ è integrabile se u lo è. \square

Possiamo ora definire l'*integrale di Lebesgue* di una funzione integrabile. Osserviamo che

$$\left| \int u_{k'} - \int u_{k''} \right| \leq \int |u_{k'} - u_{k''}|.$$

Dunque se $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione che soddisfa le due condizioni della definizione 4.1.4 allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un \bar{k} tale che se $k', k'' > \bar{k}$ si ha $|\int u_{k'} - \int u_{k''}| < \varepsilon$ e quindi per il criterio generale di convergenza di Cauchy la successione degli integrali elementari delle funzioni a scala $\int u_k(x) dx$ ha un limite finito.

Definizione 4.1.5 Si dice *integrale di Lebesgue della funzione $u(x)$ definita qo in \mathbb{R}^n* il

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k(x) dx := \int u(x) dx.$$

Potrebbe sembrare che la definizione dell'integrale di Lebesgue della funzione $u(x)$ dipenda dalla particolare successione (u_k) che abbiamo scelto. Dimostreremo che questo limite è indipendente dalla successione di funzioni a scala purché esse soddisfino la definizione 4.1.4. Si ha infatti

Lemma 4.1.1 Siano $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(v_h)_{h \in \mathbb{N}}$ successioni di funzioni a scala per le quali valgono le condizioni (a) e (b) della definizione 4.1.4. Allora

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int v_h = \lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k. \quad (4.3)$$

La dimostrazione di questo lemma è molto tecnica. Per il suo sviluppo serviranno alcune definizioni e lemmi preliminari.

Definizione 4.1.6 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un arbitrario insieme. Diremo *misura esterna di A*

$$m_e(A) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} m(R_k) : \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k \supseteq A \right\} \quad (4.4)$$

al variare di tutte le famiglie numerabili di rettangoli $\{R_k\}$ che coprono A .

Ricordiamo un risultato tecnico piuttosto ovvio, ma noioso da dimostrare.

Proposizione 4.1.2 *Sia $P = \bigcup_{k=1}^{\ell} R_k$ un plurirettangolo unione di un numero finito di rettangoli a due a due disgiunti. Allora*

$$m_e(P) = \sum_{k=1}^{\ell} m(R_k) = m(P).$$

Proposizione 4.1.3 *Sia (A_k) una successione di insiemi di \mathbb{R}^n . Allora*

$$m_e\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m_e(A_k).$$

Dimostrazione: Dato $\varepsilon > 0$, sia per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\{R_{k,j} : j \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di rettangoli tale che $A_k \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} R_{k,j}$ e

$$\sum_{j=0}^{\infty} m(R_{k,j}) \leq m_e(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Allora

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k,j=0}^{\infty} R_{k,j}$$

e

$$m_e\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k,j=0}^{\infty} m(R_{k,j}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m_e(A_k) + \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} m_e(A_k) + \varepsilon$$

Segue la tesi per l'arbitrarietà di ε . □

Lemma 4.1.2 *Siano u una funzione a scala e $\varepsilon > 0$ tali che $\int |u| < \varepsilon^2$. Allora il plurirettangolo $P = \{x : |u(x)| \geq \varepsilon\}$ ha misura minore di ε .*

Dimostrazione: Se per assurdo fosse $m(P) \geq \varepsilon$, avremmo

$$\int |u| \geq \int_P |u| \geq \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2,$$

contro l'ipotesi. □

Abbiamo infine il seguente

Lemma 4.1.3 (Fondamentale) *Da ogni successione (u_k) di funzioni a scala che soddisfano la condizione (b) della definizione 4.1.4 si può estrarre una sottosuccessione (v_j) convergente qo a una funzione v tale che per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $m_e(E) \leq \varepsilon$ e $v_j \rightarrow v$ uniformemente in $\mathbb{R}^n \setminus E$.*

Dimostrazione: Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{k}$ tale che $\forall k_1, k_2 \geq \bar{k}$

$$\int |u_{k_1} - u_{k_2}| < \varepsilon.$$

Prendiamo $\varepsilon = 4^{-j}$. Allora $\exists \bar{k} = k_j$ tale che se $k \geq k_j$ si ha

$$\int |u_k - u_{k_j}| < 4^{-j}.$$

Si trova così una successione, che possiamo prendere crescente, di interi $k_1 < k_2 < \dots < k_j < k_{j+1} < \dots$ tale che $\forall j \geq 1$

$$\int |u_{k_{j+1}} - u_{k_j}| < 4^{-j}.$$

Diciamo $v_j = u_{k_j}$ e quindi $\forall j \geq 1$ abbiamo $\int |v_{j+1} - v_j| < 4^{-j}$. Sia $P_j = \{x \in \mathbb{R}^n : |v_j(x) - v_{j+1}(x)| \geq 2^{-j}\}$ il plurirettangolo che, in base al precedente lemma 4.1.2 ha misura esterna $m_e(P_j) = m(P_j) < 2^{-j}$. Sia infine $Q_j = \bigcup_{i=j}^{\infty} P_i$.

Allora, poiché $P_i \subseteq Q_j$ ($\forall i \geq j$), si ha

$$|v_i(x) - v_{i+1}(x)| < 2^{-i} \quad \forall x \notin Q_j, \forall i \geq j.$$

Ne segue, per il teorema di Weierstrass sulla convergenza normale, che la serie di funzioni

$$\sum_{i=j}^{\infty} [v_i(x) - v_{i+1}(x)]$$

è uniformemente convergente in $\mathbb{R}^n \setminus Q_j$. Perciò la successione (v_i) , per ogni $j \geq 1$, converge uniformemente ad una funzione w_j definita in $\mathbb{R}^n \setminus Q_j$. Ora $Q_{j+1} \subseteq Q_j$ e quindi (v_i) converge uniformemente ad una funzione w_{j+1} in $\mathbb{R}^n \setminus Q_{j+1} \supseteq \mathbb{R}^n \setminus Q_j$. Le funzioni w_{j+1} e w_j debbono coincidere in $\mathbb{R}^n \setminus Q_j$ e quindi w_{j+1} prolunga w_j in $\mathbb{R}^n \setminus Q_{j+1}$.

Dunque tutte le funzioni w_j sono le restrizioni di una stessa funzione v definita come limite puntuale della successione (v_j) nell'insieme complementare di $Q = \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j$. La funzione v soddisfa le condizioni del lemma. Infatti

$$m_e(Q_j) \leq \sum_{i=j}^{\infty} m_e(P_i) = \sum_{i=j}^{\infty} m(P_i) \leq \sum_{i=j}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-j+1}.$$

Poiché $m_e(Q_j) \leq 2^{-j+1}$, Q è un insieme di misura nulla. Cioè $v_j \rightarrow v$ qo. Infine, dato $\varepsilon > 0$, se m è tale che $2^{-m+1} \leq \varepsilon$, posto $E = Q_m$, si ha $m_e(E) \leq 2^{-m+1} \leq \varepsilon$ e $v_i \rightarrow v$ uniformemente in $\mathbb{R}^n \setminus E$.

□

Possiamo ora dare finalmente la dimostrazione del Lemma 4.1.1.

Dimostrazione: (del **Lemma 4.1.1**) Sia dunque (v_k) una successione di funzioni a scala tale che (a) $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x) = u(x)$ qo e (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k}$ tale che $\forall k_1, k_2 \geq \bar{k}$ si ha $\int |v_{k_1}(x) - v_{k_2}(x)| dx \leq \varepsilon$ soddisfacente cioè le stesse condizioni della successione (u_k) . Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int v_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k.$$

Possiamo supporre che $u(x)$ sia la funzione identicamente nulla. Dimostreremo che se (u_k) è una successione di funzioni a scala che converge qo alla funzione nulla e verifica la condizione (b), allora $\int u_k \rightarrow 0$.

Dato $\varepsilon > 0$ sia \bar{k} come è dato dalla condizione (b). Sia poi P un plurirettangolo tale che $u_{\bar{k}}(x) = 0, \forall x \notin P$ e $|u_{\bar{k}}(x)| \leq M, \forall x \in P$. Sia $(v_j) = (u_{k_j})$ la sottosuccessione descritta nel lemma Fondamentale 4.1.3. La funzione v è qo nulla. Esistono dunque un insieme E e un indice h tali che $m_e(E) \leq \frac{\varepsilon}{M}$ e $|v_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{m_e(P)}, \forall x \notin E, \forall j \geq h$. Non è restrittivo supporre $k_h \geq \bar{k}$. Consideriamo poi il plurirettangolo

$$Q = \left\{ x : |v_h(x)| > \frac{\varepsilon}{m(P)} \right\};$$

$Q \subseteq E$ e quindi $m(Q) = m_e(Q) \leq m_e(E) \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Per ogni $k \geq \bar{k}$ si ha

$$\int |u_k| \leq \int |u_k - v_h| + \int |v_h| = \int |u_k - v_h| + \int_{\mathbb{R}^n \setminus P} |v_h| + \int_P |v_h|;$$

Poiché $v_h = u_{k_h}, k_h \geq \bar{k}$, abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus P} |v_h| = \int_{\mathbb{R}^n \setminus P} |v_h - u_{\bar{k}}| \leq \int |v_h - u_{\bar{k}}| \leq \varepsilon.$$

Infatti $u_{\bar{k}} = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus P$.

D'altra parte $P \setminus Q \subseteq \mathbb{R}^n \setminus Q$ dove $|u_{\bar{k}}| \leq M$, e quindi

$$\begin{aligned} \int_P |v_h| &\leq \int_{P \setminus Q} |v_h| + \int_Q |v_h| \leq \int_{P \setminus Q} |v_h| + \int_Q |v_h - u_{\bar{k}}| + \\ &+ \int_Q |u_{\bar{k}}| \leq m(P \setminus Q) \cdot \frac{\varepsilon}{m(P)} + \int_{\mathbb{R}^n} |v_h - u_{\bar{k}}| + m(Q) \cdot M \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

E dunque, in definitiva,

$$\int |u_k| \leq 5\varepsilon.$$

Ossia

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int u_k = 0.$$

□

Abbiamo un ulteriore risultato tecnico

Lemma 4.1.4 *Sia u una funzione integrabile e sia (u_k) una successione di funzioni a scala che soddisfa la definizione 4.1.4. Allora*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int |u_k - u| = 0.$$

Dimostrazione: Assegnato k sia $v_j = |u_k - u_j|$ che è una funzione a scala, poiché lo sono u_k e u_j . Ora, ovviamente $|u_k - u_j| \rightarrow |u_k - u|$ qo per $j \rightarrow \infty$, inoltre vale la condizione (b); infatti

$$||u_k - u_j| - |u_k - u_m|| \leq |u_j - u_m|.$$

Allora, per la definizione di integrale, si ha $\lim_{j \rightarrow \infty} \int |u_k - u_j| = \int |u_k - u|$. Dato $\varepsilon > 0$ sia \bar{k} tale che $\forall k, j \geq \bar{k}$ allora $\int |u_k - u_j| \leq \varepsilon$. Prendendo il limite per $j \rightarrow \infty$ si trova

$$\int |u_k - u| \leq \varepsilon.$$

□

Teorema 4.1.1 (di Completezza). *Sia (u_k) una successione di funzioni integrabili che soddisfano la condizione (b) della definizione 4.1.4. Allora esistono una sottosuccessione (w_j) e una funzione $u(x)$ tali che $\lim_{j \rightarrow \infty} w_j(x) = u(x)$ qo e $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |u - u_k| = 0$. (E perciò $\lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k = \int u$).*

Dimostrazione: Applicando ad ogni u_k la definizione di integrabilità, si trova, per ogni k una successione di funzioni a scala $(v_{k,j})_{j \in \mathbb{N}}$ che soddisfano le condizioni (a) e (b) della definizione 4.1.4. Usando il lemma 4.1.3 e il lemma precedente 4.1.4, si scelga tra le $v_{k,j}$ una v_k e un insieme E_k tali che $m_e(E_k) \leq 2^{-k}$, $|v_k(x) - u_k(x)| \leq 2^{-k}$, $\forall x \notin E_k$ e $\int |v_k - u_k| \leq 2^{-k}$. Poiché per la successione (u_k) vale la condizione (b), anche per la successione (v_k) vale la stessa condizione (b)¹.

Per il lemma 4.1.3 esiste una sottosuccessione (k_j) tale che (v_{k_j}) è una sottosuccessione convergente qo a una certa funzione integrabile u . Diciamo dunque $w_j = v_{k_j}$. Sia $E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$. Allora, se $x \notin E$ e $j \in \mathbb{N}$ si ha

$$|u(x) - w_j(x)| \leq |u(x) - v_{k_j}(x)| + |v_{k_j}(x) - u_{k_j}| \leq |u(x) - v_{k_j}(x)| + 2^{-k_j},$$

e dunque $w_j \rightarrow u$ qo. Infine, per ogni $k, j \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int |u - u_k| \leq \int |u - v_{k_j}| + \int |v_{k_j} - u_{k_j}| + \int |u_{k_j} - u_k|,$$

grazie al lemma precedente e all'ipotesi. Perciò si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int |u_k - u| = 0.$$

□

Il nome del teorema prelude alla dimostrazione della completezza dello spazio $L^1(\mathbb{R}^n)$.

¹Dato $\varepsilon > 0$ sia k tale che $2^{-k} < \frac{\varepsilon}{3}$. Sia inoltre k tale che $\forall k_1, k_2 > k$, valga $\int |u_{k_1} - u_{k_2}| < \frac{\varepsilon}{3}$; allora $\int |v_{k_1} - v_{k_2}| \leq \int |v_{k_1} - u_{k_1}| + \int |u_{k_1} - u_{k_2}| + \int |u_{k_2} - v_{k_2}| < 3 \cdot 2^{-k} < \varepsilon$.

4.2 Alcuni teoremi importanti

Cominciamo con un primo importante risultato

Teorema 4.2.1 (Teorema della convergenza monotona di Beppo Levi) *Sia (u_k) una successione di funzioni integrabili a valori reali. Sia tale successione non decrescente, cioè sia $u_k(x) \leq u_{k+1}(x)$ qo, $\forall k \in \mathbb{N}$. Si ha*

a) *Se $\lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k$ è finito, allora u_k converge qo ad una funzione u integrabile e valgono*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k = \int u \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int |u_k - u| = 0.$$

b) *Se invece il $\lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k$ è infinito, allora u_k converge qo a u non integrabile oppure non converge.*

Dimostrazione: a) Supponiamo il limite finito. Preso $k_1 > k$, per la monotonia della successione $\int |u_{k_1} - u_k| = \int u_{k_1} - \int u_k$. Poiché il limite della successione degli integrali è finito, per la necessità della condizione di Cauchy, vale la condizione (b) della definizione 4.1.4. Per il teorema di completezza 4.1.1 esistono una funzione $u(x)$ e una sottosuccessione $w_j(x)$ che converge qo a $u(x)$. Per l'ipotesi di monotonia valida qo, per quasi ogni x esiste $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$. Poiché $w_j \rightarrow u$ qo, segue che $u_k \rightarrow u$ qo. Il teorema di completezza assicura che $u(x)$ è integrabile e che $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |u_k - u| = 0$. Per la monotonia è $u_k(x) \leq u(x)$ qo e dunque si ha pure

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k = \int u.$$

□

Corollario 4.2.1 *Sia (u_k) una successione di funzioni integrabili, non negative. Allora $u(x) = \inf\{u_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$, definita qo, è integrabile.*

Dimostrazione: Sia $v_k = \inf_{1 \leq j \leq k} u_j(x)$. Le v_k sono integrabili e $v_k(x) \geq v_{k+1}(x)$ qo, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Si ha $\int v_k \geq 0$. Applicando il teorema 4.2.1 a $-v_k$, parte a), si trova che la successione converge qo a una funzione integrabile. Ma $v_k \rightarrow u$ e dunque u è integrabile. □

Teorema 4.2.2 (Teorema di Lebesgue o della convergenza dominata) *Sia (u_k) una successione di funzioni (complesse) integrabili, convergente qo a una funzione $u(x)$, definita qo in \mathbb{R}^n . Se esiste una funzione a valori reali integrabile $\varphi(x)$, tale che*

$$|u_k(x)| \leq \varphi(x) \quad \text{qo} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

allora $u(x)$ è integrabile e valgono

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k = \int u \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int |u_k - u| = 0. \quad (4.5)$$

Dimostrazione: Ci possiamo limitare a considerare le funzioni a valori reali, poiché sia la parte reale che quella immaginaria soddisfano le condizioni delle funzioni u_k . Inoltre, considerando separatamente la parte positiva e quella negativa, potremo supporre $u_k(x) \geq 0$. Definiamo perciò $w_k(x) = \inf_{j \geq k} u_j(x)$ qo. Per il corollario precedente 4.2.2 le funzioni $w_k(x)$ sono integrabili e inoltre $w_k(x) \leq w_{k+1}(x)$ qo per ogni $k \in \mathbb{N}$ e infine $w_k(x) \rightarrow u(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ per il quale $u_k(x) \rightarrow u(x)$. Dunque $w_k \rightarrow u$ qo. Abbiamo

$$\int w_k \leq \int u_k \leq \int \varphi.$$

Dunque $\lim_{k \rightarrow \infty} \int w_k$ è finito e u per il teorema di Beppo Levi 4.2.1 parte a) è integrabile.

Sappiamo che $\int w_k \rightarrow \int u$; fissato $\varepsilon > 0$, $\exists k'$ tale che $\forall k \geq k'$ si ha $\int u - \int w_k < \varepsilon$ e quindi anche $\int u - \int u_k < \varepsilon$. Ora $\varphi - u \geq 0$ e $\varphi - u_k \rightarrow \varphi - u$ e $\varphi - u_k$ si trova, rispetto a $\varphi - u$, nelle stesse condizioni di u_k rispetto a u . Dunque esiste k'' tale che per ogni $k \geq k''$

$$\int u_k - \int u = \int (\varphi - u) - \int (\varphi - u_k) < \varepsilon.$$

Dunque, per ogni $k \geq \max\{k', k''\}$ si ha

$$\left| \int u_k - \int u \right| < \varepsilon.$$

Quindi $\lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k = \int u$. Vale infine $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |u - u_k| = 0$ perchè $|u - u_k| \rightarrow 0$ qo e $|u - u_k| \leq 2\varphi$. □

Dimostrazione: [Teorema di Beppo Levi, parte b)]

Se $\lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k$ è infinito, allora (u_k) non può convergere qo ad una funzione integrabile u . Infatti se così fosse, sarebbe $0 \leq u_k(x) - u_0(x) \leq u(x) - u_0(x)$ qo, per ogni k e dunque per il Teorema di Lebesgue 4.2.2 esisterebbe finito $\lim \int u_k$. □

Definizione 4.2.1 Una funzione $u(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ si dice misurabile se è limite qo di una successione di funzioni a scala.

Si possono dimostrare i seguenti risultati

Proposizione 4.2.1 Sia $u : \mathbb{R}^n \rightarrow I$ misurabile e f continua su I . Allora $f \circ u$ è misurabile.

Teorema 4.2.3 Sia (u_k) una successione di funzioni misurabili che converge qo ad una funzione u . Allora $u(x)$ è misurabile.

Teorema 4.2.4 Sia u una funzione misurabile. La funzione u è integrabile se e solo se esiste φ positiva e integrabile tale che

$$|u(x)| \leq \varphi(x) \quad \text{qo.} \tag{4.6}$$

Dimostrazione: Se u è integrabile, anche $|u|$ lo è; basta prendere $\varphi = |u|$. Sia poi u misurabile e valga la condizione 4.6. Si può supporre che u sia reale a valori non negativi (considerando eventualmente le parti reali e immaginarie e poi di ciascuna le parti positive e negative). Posto $v_k = \min\{u_k^+(x), \varphi(x)\}$ (con $u_k(x)$ funzioni a scala e $u_k \rightarrow u$ qo), poichè φ e u_k sono integrabili, lo è v_k ; inoltre $0 \leq v_k(x) \leq \varphi(x)$. Si ha poi, $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x) = u(x)$ qo. Dal Teorema di Lebesgue si ottiene il risultato. \square

Teorema 4.2.5 (Teorema di Beppo Levi per le serie) *Sia (u_k) una successione di funzioni non negative integrabili. Se la serie degli integrali converge, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ converge qo a una funzione integrabile e vale*

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int u_k(x). \quad (4.7)$$

Citiamo ancora due fondamentali teoremi sugli integrali multipli, dei quali non forniremo la dimostrazione.

Teorema 4.2.6 (Teorema di Fubini) *Sia $u(x, y)$ una funzione a valori complessi delle variabili $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ integrabile in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Allora valgono i fatti seguenti:*

a) *Per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $x \mapsto u(x, y)$ è integrabile su \mathbb{R}^m .*

b) *La funzione $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} u(x, y) dx$ è integrabile su \mathbb{R}^n .*

c) *Vale la formula*

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} u(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} u(x, y) dx \right) dy. \quad (4.8)$$

Teorema 4.2.7 (Teorema di Tonelli) *Sia $u(x, y)$ a valori reali misurabile e non negativa definita per $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Se valgono le proprietà a) e b) del precedente teorema di Fubini 4.2.6, allora u è integrabile su $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.*

Si osservi che nel teorema di Tonelli l'ipotesi del segno di $u(x, y)$ è essenziale. Infatti sia

$$u(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{qo in } \mathbb{R}^2. \quad (4.9)$$

Per ogni $y \neq 0$ $u_y(x) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}$ è integrabile in x , poichè è continua ed è infinitesima di ordine 3 all'infinito. Inoltre, essendo dispari, l'integrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx = 0$. Se valesse la tesi del teorema di Tonelli, la funzione dovrebbe essere assolutamente integrabile in \mathbb{R}^2 . Ma ciò non è; infatti

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\rho \cos \vartheta}{\rho^4} \right| \rho d\rho d\vartheta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} \frac{|\cos \vartheta|}{\rho^2} d\rho d\vartheta = 4 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} = +\infty.$$

Dunque $|u|$ non è integrabile e quindi non lo è u nel senso di Lebesgue. Quanto manca all'applicabilità del teorema di Tonelli è l'ipotesi sul segno della funzione.

4.3 Integrali su insiemi misurabili

Esamineremo ora l'integrabilità di una funzione su un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sarà naturale imporre la condizione che l'insieme A sia *misurabile*, secondo la definizione che segue

Definizione 4.3.1 *Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice misurabile secondo Lebesgue (o semplicemente misurabile) se è misurabile la sua funzione caratteristica*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

Se χ_A è integrabile, l'insieme A si dice di misura finita e la misura secondo Lebesgue di A (o semplicemente la misura di A) è il valore dell'integrale su \mathbb{R}^n di χ_A . Altrimenti A si dice di misura infinita. La misura di A si indicherà con $|A|$ o con $m(A)$.

$$|A| = m(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) dx .$$

Proposizione 4.3.1 *Tutti gli aperti e tutti i chiusi di \mathbb{R}^n sono misurabili.*

Dimostrazione: Infatti in \mathbb{R}^n gli aperti sono riunioni numerabili di rettangoli. I chiusi sono i complementari degli aperti. Se C è un chiuso, $\chi_C(x) = 1 - \chi_{(\mathbb{R}^n \setminus C)}(x)$, dunque χ_C è misurabile se $\chi_{(\mathbb{R}^n \setminus C)}$ lo è. \square

Definizione 4.3.2 *Se u è una funzione definita qo in A , insieme misurabile, il prolungamento banale di u è la funzione definita qo in \mathbb{R}^n*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in A = \text{dom}(u) \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \text{dom}(u) \end{cases} .$$

Definizione 4.3.3 *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e u una funzione complessa definita qo su A . Diciamo che u è integrabile su A se è integrabile su \mathbb{R}^n il prolungamento banale di u . Se $B \subseteq A$ è misurabile, u è integrabile su B se lo è la restrizione di u a B . Infine u è misurabile su A se lo è il prolungamento banale di u su \mathbb{R}^n .*

Dalla definizione segue che le costanti sono integrabili su ogni insieme A di misura finita. Inoltre se A e B sono insiemi disgiunti e misurabili $A \cup B$ è misurabile e $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Valgono inoltre

Proposizione 4.3.2 *v) Sia (A_k) una successione di insiemi misurabili a due a due disgiunti, allora è misurabile la loro unione e si ha*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \quad (4.10)$$

u) Se $A_k \subseteq A_{k+1}$ allora

$$m(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k). \quad (4.11)$$

m) Se $A_k \cap A_{k'} = \emptyset$ per $k \neq k'$ e u è definita qo in $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, allora u è integrabile su A se e solo se u è integrabile su ogni A_k e si ha

$$\int_A u = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} u. \quad (4.12)$$

w) Se $A_k \subseteq A_{k+1}$, u è integrabile su A_k , per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, allora u è integrabile su $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ e si ha

$$\int_A u = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{A_k} u. \quad (4.13)$$

v) Se $A_k \supseteq A_{k+1}$, u è integrabile su A_k , per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, allora u è integrabile su $B = \cap_{k=1}^{\infty} A_k$ e si ha

$$\int_B u = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{A_k} u. \quad (4.14)$$

Dimostrazione: Dimostreremo solo il punto u). Per ipotesi χ_{A_k} è misurabile per ogni $k \geq 1$. Se poi ogni A_k ha misura finita, ce l'ha pure $\chi_{\cup_{k=1}^n A_k} = \chi_{A_1} + \dots + \chi_{A_n}$ e si ha

$$m(\cup_{k=1}^n A_k) = m(A_1) + \dots + m(A_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

L'insieme $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ è misurabile e se ha misura finita si ha anche

$$m(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Ma poiché $m(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \geq \sum_{k=1}^n m(A_k), \forall n \in \mathbb{N}^+$ si ha pure

$$m(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k),$$

e quindi vale l'uguaglianza. □

Proposizione 4.3.3 *Sia u misurabile a valori in \mathbb{R} definita su A misurabile e $c \in \mathbb{R}$. Allora sono misurabili gli insiemi*

$$A_c = \{x \in A : u(x) > c\}. \quad (4.15)$$

Lo stesso vale se si sostituisce $>$ con $\geq, <, \leq$.

Non dimostriamo questa proposizione. Tuttavia osserviamo che in altre trattazioni dell'integrale secondo Lebesgue quella che qui viene presentata come una proposizione è invece data come definizione di misurabilità di una funzione.

Infine mettiamo in evidenza i seguenti risultati dei quali non forniamo la dimostrazione, che è piuttosto tecnica. Tuttavia essi sono di grande utilità per il calcolo pratico degli integrali secondo Lebesgue.

Teorema 4.3.1 *Sia $u(x)$ una funzione limitata e nulla fuori di un compatto di \mathbb{R}^n integrabile secondo Riemann. Allora essa è integrabile secondo Lebesgue e i due integrali coincidono.*

Un Lemma importante nella dimostrazione e utile di per sé è il seguente

Lemma 4.3.1 *Sia u una funzione reale non negativa e integrabile su A misurabile. Se l'integrale di u è nullo, allora $u(x) = 0$ qo in A .*

Dimostrazione: Siano $A_0 = \{x \in A : u(x) \neq 0\}$ e $A_k = \{x \in A : u(x) > \frac{1}{k}\}$, per $k \geq 1$. Allora per ogni $k \geq 1$ vale

$$\frac{m(A_k)}{k} \leq \int_{A_k} u \, dx \leq \int_A u \, dx = 0.$$

Dunque $m(A_k) = 0$. Poiché $A_0 = \cup_{k \geq 1} A_k$, A_0 stesso ha misura nulla e quindi $u(x) = 0$ qo in A . \square

Il legame dell'integrale di Lebesgue con gli integrali generalizzati secondo Riemann è dato dai seguenti

Teorema 4.3.2 *Sia $u(x)$ una funzione complessa definita in $B_r \setminus \{0\}$, integrabile secondo Riemann su ognuno degli insiemi $B_r \setminus B_\varepsilon$ con $0 < \varepsilon < r$. Allora u è integrabile secondo Lebesgue in B_r se e solo se $|u|$ è integrabile in senso generalizzato secondo Riemann in B_r . Se esiste l'integrale generalizzato esso coincide con quello di Lebesgue.*

Teorema 4.3.3 *Sia $u(x)$ definita in $\mathbb{R}^n \setminus B_r$, e integrabile secondo Riemann in ogni insieme $B_R \setminus B_r$, $R > r$. Allora u è L -integrabile se e solo se $|u|$ è R -integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}^n \setminus B_r$. In questo caso i due integrali coincidono.*

Qui $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$, dove $\|x\|$ è la norma euclidea di $x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

4.3.1 Continuità assoluta

Una nozione importante, che qui ci limitiamo a considerare nel caso unidimensionale, è la seguente (dovuta al matematico italiano Giuseppe Vitali)

Definizione 4.3.4 Una funzione $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice assolutamente continua su $[a, b]$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni famiglia finita di intervalli aperti e a due a due disgiunti $(\alpha_k, \beta_k) \subseteq [a, b], k = 1, \dots, m$ si ha

$$\sum_{k=1}^m |\beta_k - \alpha_k| < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^m |u(\beta_k) - u(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

Se $m = 1$ si ha, in particolare, la nozione di continuità uniforme.

Vale il seguente

Teorema 4.3.4 Se $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile, allora la sua funzione integrale

$$U(x) := \int_{x_0}^x u(t) dt \quad (4.16)$$

è assolutamente continua. Inversamente, se $U : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua allora essa è derivabile qo su questo intervallo, e se $U'(x) = u(x)$, comunque si prendano x_1 e x_2 in $[a, b]$, si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} u(t) dt = U(x_2) - U(x_1). \quad (4.17)$$

Dimostrazione: Omessa.

Vitali ha utilizzato una funzione $V : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, che è crescente, continua, uniformemente continua tale che $V(0) = 0$ e $V(1) = 1$ (funzione già in precedenza descritta da Georg Cantor e detta appunto *funzione di Cantor* o *scala del diavolo*) e che ha la proprietà che $V'(x) = 0$ qo. Poiché per ogni coppia di punti x_1, x_2 in $[0, 1]$ si ha $\int_{x_1}^{x_2} V'(t) dt = 0$ la funzione **non** è assolutamente continua.

Riteniamo utile dare un'idea della costruzione della funzione $V(x)$. Uno dei modi che sembra più "semplice" è il seguente. Sia $C_0 = [0, 1]$, $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, che si ottiene dal precedente insieme C_0 sopprimendo l'intervallo aperto centrale $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, ottenuto dall'insieme precedente dividendo ciascuno degli intervall costituenti in tre parti uguali e sopprimendo l'intervallo aperto centrale, e così via... L'insieme C_n è formato da 2^n sottointervalli, ciascuno di lunghezza $\frac{1}{3^n}$, di $[0, 1]$. La lunghezza totale di C_n è dunque $\frac{2^n}{3^n}$. L'intersezione $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ è nota come insieme ternario di Cantor. I suoi punti, usando la notazione di base tre, si scrivono $0, c_1 c_2 \dots c_k \dots$ dove c_k assume solo i valori 0 o 2.

Sia ora $g_n(x) = (\frac{3}{2})^n \chi_{C_n}(x)$, dove $\chi_A(x)$, al solito, rappresenta la funzione caratteristica dell'insieme A . Sia infine

$$V_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt.$$

Si può dimostrare che la successione $(V_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione $V(x)$, che, come le singole f_n è continua, crescente, tale che $V(0) = 0, V(1) = 1$ e per la quale $V'(x) = 0$ qo in $[0, 1]$. La funzione $V(x)$ è dunque uniformemente continua, ma non assolutamente continua, poiché

$$V(x) \neq \int_0^x V'(t) dt = 0.$$

Qui sotto è data la rappresentazione grafica (indicativa) della funzione $V_2(x)$.

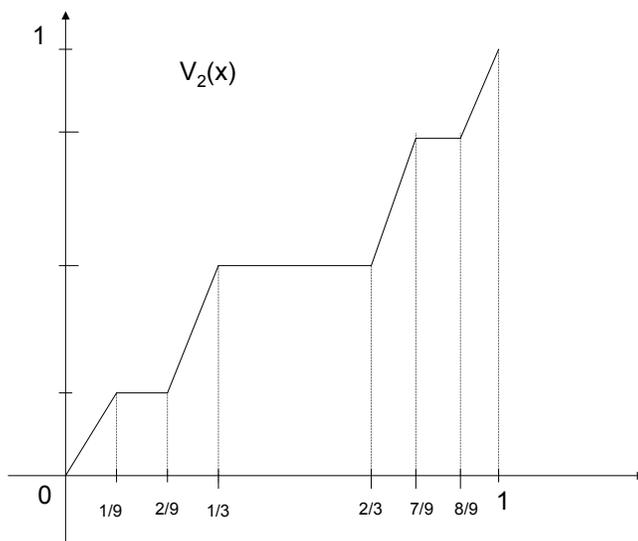


Figura 4.1: Seconda approssimazione per la funzione di Cantor - Vitali.

Come regola pratica per ottenere i valori di $V(x)$ si può procedere come segue. Si scriva il numero $0 < x < 1$ in base tre, scegliendo la rappresentazione che non ha periodo 1. Sia dunque $x = 0, c_1 c_2 \dots c_{n-1} 1 c_{n+1} \dots$ dove è stata messa in evidenza la prima occorrenza della cifra 1. Si muti tale 1 in 2 e si tronchi la scrittura: $T(x) = 0, c_1 c_2 \dots c_{n-1} 2$. Se nella scrittura di x non compare alcun 1, allora $T(x) = x$. Infine si mutino tutti i 2 in $T(x)$ in 1 e si interpreti questa scrittura come numero in base due. Quello che si ottiene è il valore di $V(x)$. È poi $V(0) = 0$ e $V(1) = 1$.

Per esempio $\frac{1}{4} = 0,020202\dots$ e quindi $V(\frac{1}{4}) = 0,010101\dots = \frac{1}{3}$.

Capitolo 5

Spazi L^p

Definiremo nel seguito spazi di funzioni $L^p(A)$, che si dimostreranno essere spazi normati completi, con la norma definita per mezzo dell'integrale di Lebesgue. Ora due funzioni che differiscono fra loro solo su un insieme di misura nulla hanno lo stesso integrale (se esiste). Faremo dunque la seguente

Convenzione. Diremo che due funzioni misurabili u e v , definite qo su un insieme misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sono *equivalenti* se $u(x) = v(x)$ qo in A . Si vede immediatamente che questa è una relazione di equivalenza. Parlando di funzioni misurabili ci riferiremo, in generale, alle classi d'equivalenza di funzioni così definite. L'inconveniente che nasce da questa convenzione è che così non si può più parlare del valore di una funzione in un punto. Tuttavia si osservi che vale la seguente

Proposizione 5.0.4 *Sia u una funzione misurabile in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Se esiste una funzione f qo uguale a u e continua in Ω , tale funzione è unica.*

Se dunque una funzione $u(x)$ ammette come *rappresentante qualificato* una funzione continua $v(x)$, diremo che $u(x_0) = v(x_0)$, poiché il valore è assegnato in maniera inequivocabile, vista l'unicità di $v(x)$. Per esempio, la funzione $u(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$ per $x \neq 0$ è qo uguale a una funzione continua su \mathbb{R} data da $v(x) = u(x)$ se $x \neq 0$ e $v(0) = 1$. Potremo dunque dire che $u(0) = 1$.

5.1 Gli spazi $L^p(A)$, con $p = 1, 2, \infty$

Definizione 5.1.1 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme di misura positiva. Per cominciare considereremo i casi $p = 1, 2$. Con $L^p(A)$ indicheremo l'insieme delle funzioni v (anzi, delle classi d'equivalenza delle funzioni) misurabili in A e tali che $|v|^p$ sia integrabile su A . Con $L^\infty(A)$ indicheremo le funzioni misurabili su A e limitate, cioè quelle funzioni u misurabili tali che esista $M > 0$ per il quale $|u(x)| \leq M$ qo in A .*

Se necessario distinguere scriveremo, $L^p(A, \mathbb{R})$ o $L^p(A, \mathbb{C})$. Gli insiemi $L^1(A)$ e $L^\infty(A)$ sono spazi vettoriali su \mathbb{C} come si può facilmente verificare. Per quanto concerne $L^2(A)$, osservato che da $0 \leq (a-b)^2$ segue $2ab \leq a^2 + b^2$, si deduce che vale $2|u||v| \leq |u|^2 + |v|^2$ e quindi $|u+v|^2 \leq 2(|u|^2 + |v|^2)$. Ciò mostra che se u e v sono funzioni di $L^2(A)$ anche $u+v$ lo è. È poi ovvio che se $u \in L^2(A)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, anche $\alpha \cdot u \in L^2(A)$. Dunque anche $L^2(A)$ è uno spazio vettoriale sul corpo \mathbb{C} .

Definizione 5.1.2 *Indicheremo con*

$$\|u\|_{p,A} = \left(\int_A |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5.1)$$

la norma di $u \in L^p(A)$, con $p = 1, 2$.

Nel caso $p = 1$ è immediato verificare che quella data soddisfa le proprietà per essere dichiarata una norma. In particolare, se $\|u\|_{1,A} = 0$, grazie al risultato del lemma 4.3.1, si ha che $u(x) = 0$ qo. Abbiamo il seguente

Lemma 5.1.1 *Siano u una funzione reale misurabile su A misurabile di misura positiva e M costante reale tale che $u(x) \leq M$ qo. Allora l'insieme di tali costanti ha un minimo.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{M} = \{M : u(x) \leq M \text{ qo in } A\}$. Sia $\lambda = \inf \mathcal{M}$ (non escludendo a priori che $\lambda = -\infty$). Esiste una successione decrescente (λ_k) che converge a λ con $\lambda_k > \lambda$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $M_k < \lambda_k$, $M_k \in \mathcal{M}$, cioè tale che $u(x) \leq M_k$ qo. Dunque per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste B_k di misura nulla tale che $u(x) \leq M_k$ per ogni $x \in A \setminus B_k$. Se $B = \cup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ avremo

$$u(x) \leq M_k, \forall x \in A \setminus B, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dunque $u(x) \leq \lambda$ per ogni $x \in A \setminus B$, con B di misura nulla. Si osservi che $\lambda \in \mathcal{M}$ in base alla definizione e al fatto che non può essere $\lambda = -\infty$. Infatti, se così fosse avremmo $u(x) = -\infty$ sull'insieme $A \setminus B$ di misura positiva (eventualmente di misura infinita). \square

Il numero λ ora trovato si dice l'*estremo superiore essenziale* di $u(x)$ su A .

$$\text{ess sup}_{x \in A} u(x) = \min\{M : u(x) \leq M \text{ qo}\}. \quad (5.2)$$

Analogamente si definisce l'*estremo inferiore essenziale* di $u(x)$ su A

$$\text{ess inf}_{x \in A} u(x) = \max\{M : u(x) \geq M \text{ qo}\}. \quad (5.3)$$

Se tali costanti non esistono diremo che $\text{ess sup } u(x) = +\infty$ o $\text{ess inf } u(x) = -\infty$ rispettivamente.

Definizione 5.1.3 *In $L^\infty(A)$*

$$\|u\|_{\infty,A} = \text{ess sup}_{x \in A} |u(x)|. \quad (5.4)$$

Si riconosce facilmente che quella data è una norma in $L^\infty(A)$. Si ha poi $|u(x)| \leq \|u\|_{\infty, A}$ qo in A e, se $|u(x)| \leq M$, allora $\|u\|_{\infty, A} \leq M$.

Definizione 5.1.4 Ricordiamo che si dice spazio di Banach sul corpo \mathbb{C} (o \mathbb{R}) uno spazio vettoriale B su \mathbb{C} (o su \mathbb{R}) che sia dotato di una norma e che sia completo cioè tale che ogni successione di Cauchy in B sia convergente a un elemento di B . Uno spazio di Banach nel quale la norma sia dedotta da un prodotto scalare si dice spazio di Hilbert.

Teorema 5.1.1 Gli spazi $L^p(A)$, ($p = 1, 2, \infty$) sono spazi di Banach rispetto alle norme dette. $L^2(A)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare definito da

$$\langle u, v \rangle_A = \int_A u(x) \cdot \overline{v(x)} dx \quad u, v \in L^2(A). \quad (5.5)$$

Dimostrazione: Tutte le proprietà della norma sono facili da verificare, compresa la disuguaglianza triangolare che vale in L^2 grazie alla validità della disuguaglianza di Buniakovskiĭ-Cauchy-Schwarz (detta comunemente di Schwarz). Rimane sostanzialmente da dimostrare la completezza. Il caso $p = 1$ discende direttamente dal teorema di completezza 4.1.1. Esaminiamo ora il caso $p = 2$. Per dimostrare la completezza di $L^2(A)$ e di $L^\infty(A)$ useremo il seguente criterio: uno spazio vettoriale V su \mathbb{C} , normato, è completo se e solo se vale la seguente proprietà: data una successione (u_k) di elementi di V , se $\sum \|u_k\|$ converge, allora anche $\sum u_k$ converge in V .

Sia dunque (u_k) una successione di $L^2(A)$ tale che la serie $\sum \|u_k\|_{2, A}$ converga a un numero $\lambda \geq 0$ e dimostriamo che allora converge anche $\sum u_k$ in $L^2(A)$. Supporremo per cominciare $u_k(x) \geq 0$. Introduciamo le ridotte $w_k = \sum_{j=0}^k u_j$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ $w_k \in L^2(A)$ e si ha $\|w_k\|_2 \leq \sum_{j=0}^k \|u_j\|_2 \leq \lambda$, cioè $\int_A w_k^2 \leq \lambda^2$.

Poiché (w_k^2) è non decrescente, grazie al Teorema di Beppo Levi 4.2.1, essa converge qo a una funzione w integrabile e non negativa. Sia poi $u = \sqrt{w}$. Mostreremo che $w_k \rightarrow u$ in $L^2(A)$. Ora $u \in L^2(A)$; inoltre $w_k \rightarrow u$ qo. Infine vale $|w_k(x) - u(x)|^2 \leq 2|u(x)|^2$ qo per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora per il teorema di Lebesgue 4.2.2 applicato a $|w_k - u|^2$ si ha che $w_k \rightarrow u$ in $L^2(A)$.

Se poi u_k ha segno arbitrario, si può applicare il criterio precedente alle parti positiva e negativa, con $\|u_k^\pm\|_2 \leq \|u_k\|_2$. Nel caso complesso si considerano poi le serie delle parti reali e immaginarie.

Consideriamo infine il caso $p = \infty$. Sia dunque (u_k) una successione a valori in $L^\infty(A)$ tale che la serie $\sum \|u_k\|_{\infty, A}$ converga. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste B_k di misura nulla tale che $|u_k(x)| \leq \|u_k\|_{\infty} \forall x \in A \setminus B_k$. Sia $B = \cup_{k=0}^{\infty} B_k$ che ha misura nulla ed è tale che

$$|u_k(x)| \leq \|u_k\|_{\infty} \forall x \in A \setminus B, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Poiché converge $\sum \|u_k\|_{\infty}$, per il criterio di Weierstrass della convergenza normale, si ottiene che la serie $\sum u_k(x)$ converge uniformemente in $A \setminus B$. Dunque la serie converge ad una funzione misurabile e limitata in $A \setminus B$, funzione che sta quindi in $L^\infty(A)$. Infine, si ha

$$\|u - \sum_{j=0}^k u_j\|_{\infty} \leq \sup_{x \in A \setminus B} |u(x) - \sum_{j=0}^k u_j(x)|,$$

e il membro destro tende a 0 per $k \rightarrow \infty$. Dunque la serie converge nel senso di $L^\infty(A)$. \square

Osservazione 5.1.1 *Esistono funzioni*

1. $u \in L^1(0, \infty)$ ma non in $L^2(0, \infty)$, né in $L^\infty(0, \infty)$;
2. $u \in L^2(0, \infty)$ ma non in $L^1(0, \infty)$, né in $L^\infty(0, \infty)$;
3. $u \in L^\infty(0, \infty)$ ma non in $L^1(0, \infty)$, né in $L^2(0, \infty)$.

Dimostrazione: Per il punto 1. Si consideri $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $0 < x \leq 1$ e $u(x) = \frac{1}{x^2}$ per $1 \leq x$.

Per il punto 2. Si consideri $u(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ per $0 < x \leq 1$ e $u(x) = \frac{1}{x}$ per $1 \leq x$.

Per il punto 3. Si consideri $u(x) = 1, \forall x > 0$. \square

Proposizione 5.1.1 *Sia A un insieme misurabile di misura finita. Allora*

$$L^\infty(A) \subseteq L^2(A) \subseteq L^1(A). \quad (5.6)$$

Inoltre

$$\|v\|_2 \leq m(A)^{1/2} \|v\|_\infty, \forall v \in L^\infty \quad (5.7)$$

$$\|v\|_1 \leq m(A)^{1/2} \|v\|_2, \forall v \in L^2 \quad (5.8)$$

$$\|v\|_1 \leq m(A) \|v\|_\infty, \forall v \in L^\infty. \quad (5.9)$$

Dimostrazione: Immediata. \square

Teorema 5.1.2 *Se A è misurabile si ha*

$$L^1(A) \cap L^\infty(A) \subseteq L^2(A) \quad (5.10)$$

e per ogni $v \in L^1 \cap L^\infty$ vale

$$\|v\|_2 \leq \|v\|_1^{1/2} \cdot \|v\|_\infty^{1/2}. \quad (5.11)$$

Dimostrazione: Infatti si ha

$$\|v\|_2^2 = \int_A |v|^2 = \int_A |v| \cdot |v| \leq \|v\|_\infty \cdot \int_A |v| = \|v\|_\infty \cdot \|v\|_1.$$

\square

La relazione tra la convergenza q_0 di una successione di funzioni e la convergenza in L^1 , L^2 o L^∞ è fornita dai seguenti teoremi.

Teorema 5.1.3 *Sia $p = 1$ o $p = 2$. Se (u_k) è una successione a valori in $L^p(A)$, se $u_k \rightarrow u$ qo ed esiste una funzione $\varphi \in L^p(A)$ tale che*

$$|u_k(x)| \leq \varphi(x) \text{ qo } \forall k \in \mathbb{N},$$

allora $u \in L^p(A)$ e (u_k) converge a u in $L^p(A)$.

Dimostrazione: Omessa. □

Vale un inverso parziale.

Teorema 5.1.4 *Sia $p = 1$ o $p = 2$. Sia (u_k) una successione di funzioni in $L^p(A)$ e si supponga che u_k converga a u nella norma di $L^p(A)$. Allora esistono una sottosuccessione (v_j) e una funzione $\varphi \in L^p(A)$ tali che $v_j(x) \rightarrow u(x)$ qo e $|v_j(x)| \leq \varphi(x)$ qo, per ogni $j \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione: Omessa. □

Per quanto concerne $L^\infty(A)$, si ha

Teorema 5.1.5 *Siano (u_k) una successione a valori in $L^\infty(A)$ e $u \in L^\infty(A)$. La successione (u_k) converge a u in $L^\infty(A)$ se e solo se esiste un insieme B di misura nulla tale che $u_k(x) \rightarrow u(x)$ uniformemente in $A \setminus B$.*

Dimostrazione: Omessa. □

Osservazione 5.1.2 *Sia $A = \mathbb{R}$ e sia u_k la funzione caratteristica dell'intervallo $[\log k, \log(k+1)[$, $k \geq 1$; allora per $p = 1, 2$*

$$\int |u_k|^p = \log(k+1) - \log k = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Dunque $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |u_k|^p = 0$. Tuttavia non esiste $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ tale che $|u_k(x)| \leq \varphi(x)$ qo pure se $u_k(x) \rightarrow 0$ qo. Infatti, se fosse $|u_k(x)| \leq \varphi(x)$ qo per ogni $k \geq 1$, si avrebbe $\varphi(x) \geq 1$ qo e dunque $\varphi \notin L^p(\mathbb{R})$. Esiste tuttavia una sottosuccessione con le proprietà del teorema 5.1.4. Se si prende la sottosuccessione corrispondente a $j = k^2$, e $\varphi(x)$ è la funzione caratteristica di

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} [\log(k^2), \log(k^2 + 1)[,$$

si ha $|v_j(x)| = |u_{k^2}(x)| \leq \varphi(x)$ qo e

$$\int \varphi^p = \sum_{k=1}^{\infty} [\log(k^2 + 1) - \log(k^2)] = \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) < +\infty.$$

Osservazione 5.1.3 *Esiste una successione di funzioni che converge in $L^1(0,1)$ e in $L^2(0,1)$ ma che non converge qo. Per ogni $n \geq 1$ suddividiamo l'intervallo $[0,1]$ in n intervalli uguali: $I_{n,j} = [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$, $j = 1, 2, \dots, n$. Imponiamo sulla successione $(I_{n,j})$ l'ordine lessicografico. Cioè $I_{n,j} \prec I_{m,k}$ se $n < m$ o se $n = m$ ma $j < k$. Riordiniamo ora in un'unica successione la successione doppia così ottenuta, procedendo come segue: $I_1 = I_{1,1}$ e se I_1, I_2, \dots, I_k sono stati scelti I_{k+1} sia il primo (nell'ordine lessicografico) degli $(I_{n,j})$ non presenti fra I_1, I_2, \dots, I_k . Sia poi u_k la funzione caratteristica dell'intervallo I_k : $u_k(x) = \chi_{I_k}(x)$. La successione (u_k) è la successione richiesta. Infatti, se $p = 1, 2$*

$$\int_0^1 |u_k(x)|^p = m(I_k) = \frac{1}{n}, \quad \text{se } I_k = (I_{n,j}).$$

Dunque $u_k \rightarrow 0$ in L^1 e in L^2 . Ma la successione non converge qo a 0. Infatti essa ha un andamento oscillante per ogni $x \in [0,1]$. Per ogni x esistono infiniti valori di k tali che $x \in I_k$ e infiniti per i quali $x \notin I_k$. Dunque per infiniti k $u_k(x) = 1$ e per infiniti k $u_k(x) = 0$. Una sottosuccessione come quella del teorema 5.1.4 si ottiene, per esempio, prendendo quei valori di k corrispondenti a $(n, 1)$, prendendo poi $\varphi(x) \equiv 1$.

Diamo ancora la seguente definizione.

Definizione 5.1.5 *Sia u una funzione a valori reali o complessi definita in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremo supporto di u ($\text{supp}(u)$) il sottoinsieme di Ω così definito: $x_0 \in \Omega$ **non** sta in $\text{supp}(u)$ se esiste un intorno U di x_0 , $U \subseteq \Omega$ tale che $u(x) = 0$ qo in U .*

L'insieme $\text{supp}(u)$ è un insieme relativamente chiuso di Ω . Per esempio, se $\Omega =]-1, 1[\subseteq \mathbb{R}$ e

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases},$$

allora $\text{supp}(u) = [0, 1[$ che non è un insieme chiuso in \mathbb{R} , ma lo è in $\Omega =]-1, 1[$.

Definizione 5.1.6 *Una funzione $u(x)$ definita sull'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice a supporto compatto se il suo supporto è un sottoinsieme compatto di Ω .*

5.2 Sottospazi densi di $L^p(\Omega)$

Definizione 5.2.1 *Una funzione misurabile in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è detta funzione a scala se 1) $\text{supp}(u)$ è compatto e 2) il prolungamento banale di u è una funzione a scala di \mathbb{R}^n .*

Dalla definizione di $L^p(\Omega)$ con $p = 1, 2$, segue

Teorema 5.2.1 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Allora le funzioni a scala sono un sottospazio denso di $L^1(\Omega)$ e di $L^2(\Omega)$.*

Definizione 5.2.2 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Indicheremo con $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \equiv \mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio vettoriale su \mathbb{C} delle funzioni $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ che hanno supporto compatto in Ω .

Consideriamo il seguente esempio fondamentale.

Esempio 5.2.1 Sia

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \end{cases} . \quad (5.12)$$

Come è noto $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Se $x \in \mathbb{R}^n$, $v_n(x) = \varphi(1 - \|x\|^2)$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto $\|x\| \leq 1$. Qui $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ è la norma euclidea di $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $v_n(\frac{x-x_0}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ è una funzione di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ che ha supporto dato da $\overline{B_{x_0, \varepsilon}} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$. Come noto, $B_{x_0, \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ è la palla aperta di centro x_0 e raggio ε in \mathbb{R}^n , $\overline{B_{x_0, \varepsilon}}$ è la sua chiusura. Si consideri poi $V_1(x) = \int_{-\infty}^x k \cdot v_1(t) dt$ che è identicamente nulla se $x \leq -1$, è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ed ha un valore costante $c > 0$ se $x \geq 1$. Scegliendo opportunamente la costante k , $k = 1/(\int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t) dt)$, si può fare in modo che $c = 1$. Se a, b, a', b' sono tali che $[a', b'] \subseteq]a, b[$, posto $\alpha = (a + a')/2$, $\beta = (b + b')/2$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4} \min(|a' - a|, |b - b'|)$, definiamo

$$\psi_1(x) = V_1\left(\frac{x - \alpha}{\varepsilon}\right) \cdot V_1\left(\frac{\beta - x}{\varepsilon}\right). \quad (5.13)$$

Si vede facilmente (lo si faccia per esercizio) che $\psi_1(x) \equiv 0$ se $x \notin [\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon] \subseteq]a + \varepsilon, b - \varepsilon[$ e $\psi_1(x) \equiv 1$ se $x \in [\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon] \subseteq]a' - \varepsilon, b' + \varepsilon[$. In particolare, fissato un intervallo aperto I e un intervallo compatto $J \subseteq I$, esiste $\psi_1(x)$ di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ che vale identicamente 1 se $x \in J$ ed è identicamente nullo se $x \notin I$. Se $R = I_1 \times I_2$ è un rettangolo aperto di \mathbb{R}^2 e $J_1 \times J_2 \subseteq R$ è un rettangolo compatto, la funzione

$$\psi_2(x, y) = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y)$$

è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ che vale identicamente 1 in $J_1 \times J_2$ ed è identicamente nulla fuori di $I_1 \times I_2$. La costruzione si può agevolmente generalizzare a \mathbb{R}^n , per $n \geq 2$.

Dunque si possono costruire funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ che sono identicamente nulle fuori da un rettangolo aperto e valgono identicamente 1 su ogni rettangolo compatto strettamente contenuto nel rettangolo aperto. Diamo ora, senza dimostrazione, il seguente risultato di densità

Teorema 5.2.2 Sia Ω un aperto non vuoto di \mathbb{R}^n . Allora lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ è sottospazio denso sia di $L^1(\Omega)$ che di $L^2(\Omega)$, con le rispettive norme.

5.3 Gli spazi L^p , con $p \geq 1$

Definizione 5.3.1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile di misura positiva e sia $p \geq 1$. Con $L^p(A)$ denotiamo l'insieme delle funzioni v definite su A a valori complessi e tali $|v|^p$ sia integrabile su A .

In $L^p(A)$ introdurremo la norma

$$\|v\|_{p,A} = \left(\int_A |v|^p \right)^{1/p}, \quad v \in L^p(A). \quad (5.14)$$

Teorema 5.3.1 Per ogni $p \geq 1$, $L^p(A)$ è uno spazio di Banach.

Dimostrazione: Si verifica facilmente che si tratta di uno spazio vettoriale e anche alcune proprietà della norma sono facilmente verificate. Non così immediata è la verifica che se $u, v \in L^p(A)$ anche $(u+v) \in L^p(A)$ e la verifica della disuguaglianza triangolare.

Si consideri la funzione $\psi(t) = 2^{p-1}(t^p + 1) - (t+1)^p$, definita in $0 \leq t \leq 1$. La derivata $\psi'(t) = p2^{p-1} \cdot t^{p-1} - p(t+1)^{p-1} = p[2^{p-1} \cdot t^{p-1} - (t+1)^{p-1}] \leq 0$ se $0 \leq t \leq 1$. Si ha $\psi(1) = 0$ e quindi $\psi(t) \geq 0$ per $0 \leq t \leq 1$. Se $a, b > 0$ e $a \geq b$, posto $t = \frac{b}{a} \leq 1$ si avrà perciò $\psi(\frac{b}{a}) \geq 0$, cioè

$$2^{p-1} \left(\frac{b^p}{a^p} + 1 \right) \geq \left(\frac{b}{a} + 1 \right)^p$$

e quindi, moltiplicando i due membri dell'uguaglianza per a^p si trova

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Di qui si trae la conclusione valida qo per due funzioni u e v di $L^p(A)$:

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|u(x)|^p + |v(x)|^p).$$

Dunque se $u, v \in L^p(A)$ anche $u+v \in L^p(A)$. Per dimostrare la disuguaglianza triangolare ci serviremo della seguente

Disuguaglianza di Hölder

Per ogni $u \in L^p, v \in L^q$, tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si ha che

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q. \quad (5.15)$$

Per provare questa disuguaglianza, osserviamo che la funzione $\log x$ è una funzione concava su $]0, \infty[$ e quindi se $0 < s < 1, t_1, t_2 > 0$, si ha

$$s \log(t_1) + (1-s) \log(t_2) \leq \log(st_1 + (1-s)t_2).$$

Passando all'esponenziale

$$t_1^s \cdot t_2^{(1-s)} \leq s \cdot t_1 + (1-s) \cdot t_2.$$

Se $t_1 = a^{(1/s)}$ e $t_2 = b^{1/(1-s)}$ si trova dunque

$$a \cdot b \leq s \cdot a^{(1/s)} + (1-s) \cdot b^{1/(1-s)}.$$

Se, infine, $a = k \cdot |u(x)|$, $b = |v(x)|/k$, con $k > 0$, $s = \frac{1}{p}$ e quindi $1 - s = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, si trova

$$|u(x) \cdot v(x)| \leq \frac{1}{p} \cdot k^p |u(x)|^p + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{k^q} \cdot |v(x)|^q.$$

Poiché $u \in L^p$ e $v \in L^q$ si deduce che $u \cdot v$ è integrabile, e integrando si trova

$$\int_A |u(x) \cdot v(x)| \leq \frac{k^p}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q \cdot k^q} \cdot \|v\|_q^q. \quad (5.16)$$

Definiamo $g(k) = \frac{k^p}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q \cdot k^q} \cdot \|v\|_q^q$, il secondo membro della precedente disuguaglianza. Al variare di $k > 0$ questa funzione deve avere un minimo. La derivata

$$g'(k) = k^{p-1} \cdot \|u\|_p^p - k^{-q-1} \cdot \|v\|_q^q$$

si annulla se e solo se $k = \|u\|_p^{p-1/q} \cdot \|v\|_q^{1/p}$, che fornisce il minimo di $g(k)$. Calcolando in corrispondenza a questo valore di k la disuguaglianza 5.16 si ottiene

$$\|uv\|_1 \leq \frac{1}{p} \|u\|_p \|v\|_q + \frac{1}{q} \|u\|_p \|v\|_q = \|u\|_p \|v\|_q, \quad (5.17)$$

cioè la disuguaglianza di Hölder 5.15.

Siamo ora in grado di dimostrare la disuguaglianza triangolare in L^p che in questo caso assume il nome di **disuguaglianza di Minkowski**.

Se $u, v \in L^p(A)$, si ponga $w = |u| + |v| \in L^p(A)$. Osserviamo che

$$\|w\|_p^p = \int_A w^p = \int_A (|u| + |v|) \cdot w^{p-1} = \int_A |u| \cdot w^{p-1} + \int_A |v| \cdot w^{p-1}.$$

Si noti che $w^{(p-1)q} = w^p$ e dunque $w^{p-1} \in L^q(A)$. Per la disuguaglianza di Hölder si trova allora

$$\begin{aligned} \|w\|_p^p &\leq \|u\|_p \cdot \|w^{p-1}\|_q + \|v\|_p \cdot \|w^{p-1}\|_q = (\|u\|_p + \|v\|_p) \cdot \|w^{p-1}\|_q = \\ &(\|u\|_p + \|v\|_p) \cdot \left(\int_A w^p \right)^{1/q} = (\|u\|_p + \|v\|_p) \cdot \|w\|_p^{p/q}. \end{aligned}$$

Cioè

$$\|w\|_p^{p(1-1/q)} = \|w\|_p^{1/p} = \|(|u| + |v|)\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Poiché $\|u + v\|_p \leq \|(|u| + |v|)\|_p$ segue la disuguaglianza di Minkowski (ossia la disuguaglianza triangolare per la norma di L^p)

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \quad . \quad (5.18)$$

Infine, per quanto attiene alla completezza dello spazio, si procede come si è fatto nel caso $L^2(A)$, sostituendo ovunque 2 con p . \square

Per concludere ricordiamo il seguente risultato

Proposizione 5.3.1 *Se $u \in L^p(A)$ per ogni $p \geq p_0$, esiste*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|u\|_p,$$

finito o infinito. Precisamente, se $u \in L^\infty(A)$ allora il limite è $\|u\|_{\infty, A}$, altrimenti il limite è $+\infty$.

Osservazione 5.3.1 *Se $0 < p < 1$, $u \in L^p(A)$, $|u|_p = \left(\int_A |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, non è una norma, perché non vale la disuguaglianza triangolare.*

Infatti, si consideri $A = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, $u(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x)$, $v(x) = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x)$. Allora

$$\begin{aligned} |u+v|_p &= \left(\int_{[0,1]} |u(x)+v(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1 > |u|_p + |v|_p = \\ &= \left(\int_{[0,1]} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{[0,1]} |v(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Infatti, nelle nostre ipotesi, $1 - \frac{1}{p} < 0$. Se, per esempio $p = \frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{p} = -1$. Lo stesso fenomeno si può osservare con la “ p -norma” in \mathbb{R}^2 . Si considerino i vettori $u = (1, 1)$, $v = (1, 0)$, $w = (0, 1)$. Sia $|(x, y)|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$. Allora $|(1, 1)|_p = 2^{\frac{1}{p}} > |(1, 0)|_p + |(0, 1)|_p = 1 + 1 = 2$. Questo fatto è conseguenza della non convessità delle sfere rispetto alla “ p -norma”, quando $0 < p < 1$. \square

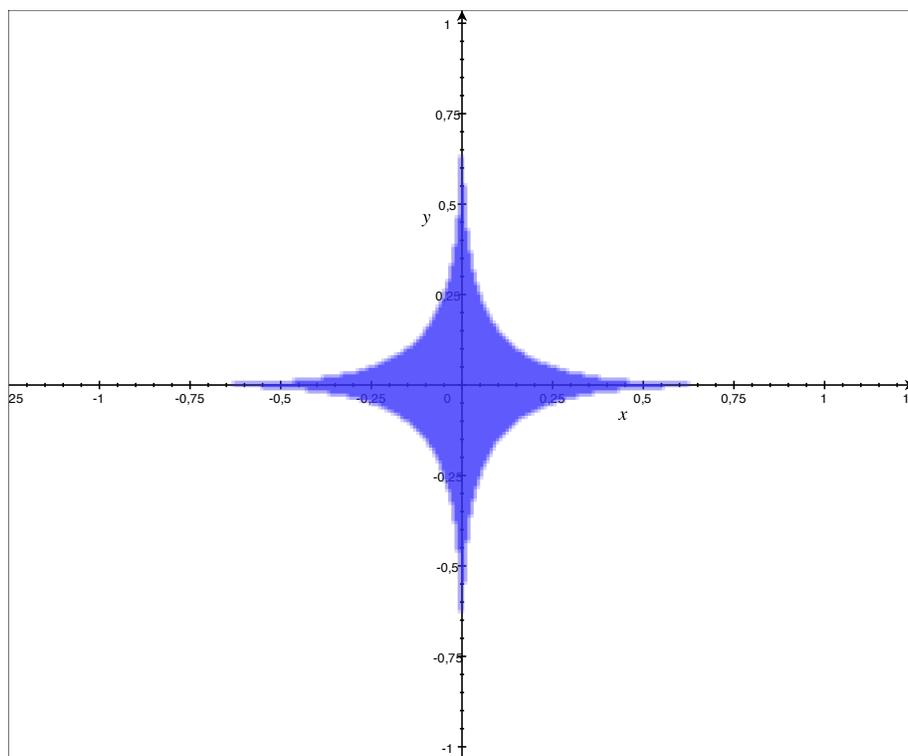


Figura 5.1: Sfera unitaria in \mathbb{R}^2 con $p = \frac{1}{3}$.

Capitolo 6

Cenno alle distribuzioni

6.1 Introduzione

Una funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con Ω aperto in \mathbb{R}^n si dirà *localmente sommabile in Ω* se è integrabile su ogni compatto $K \subseteq \Omega$. Le funzioni di questo tipo si dicono di classe *localmente $L^1(\Omega)$* . Si scrive: $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Definizione 6.1.1 Diremo che una successione di funzioni $u_k \in L^1_{loc}(\Omega)$ converge a $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ in L^1_{loc} se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_K |u_k - u| = 0, \quad \forall K \subseteq \Omega, \quad (6.1)$$

con K sottoinsieme compatto di Ω .

Esempio 6.1.1 Convergono alla funzione $\text{sign } x$ in L^1_{loc} le successioni: $\tanh(kx)$, $\frac{2}{\pi} \arctan(kx)$, $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{kx} e^{-t^2} dt$.

Fissata una funzione $u \in L^1_{loc}(A)$, se v è una funzione limitata e a supporto compatto,

$$v \mapsto \int u \cdot v dx$$

è un funzionale, cioè un'applicazione da $L^\infty_{loc}(A)$ a \mathbb{C} che è lineare e tale che se la successione (v_k) tende alla funzione v in $L^\infty_{loc}(A)$ ossia quando $\|v_k - v\|_{\infty, K} \rightarrow 0$ per ogni compatto $K \subseteq A$, si ha

$$\left| \int_K u \cdot v_k - u \cdot v \right| = \left| \int_K u(v_k - v) \right| \leq \|v_k - v\|_{\infty, K} \cdot \int_K |u| \rightarrow 0.$$

Cioè il funzionale $v \mapsto \int u \cdot v dx$ è lineare e continuo rispetto alle successioni (v_k) che tendono a v in $L^\infty_{loc}(A)$.

In generale, nelle applicazioni, servono funzionali più generali di quelli definiti come sopra da funzioni $u \in L^1_{loc}$; come controparte tali funzionali sono applicati a funzioni che sono più regolari delle funzioni di L^∞_{loc} . Le funzioni sulle quali opereranno i funzionali lineari considerati saranno le funzioni $v \in C^\infty_0(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$, cioè le funzioni di classe C^∞ a supporto compatto $K \subseteq \Omega$, a valori in \mathbb{C} che costituiscono uno spazio vettoriale su \mathbb{C} . Si dicono anche funzioni “test” o funzioni “di prova”.

In $\mathcal{D}(\Omega)$ daremo la seguente nozione di convergenza di una successione (v_k)

Definizione 6.1.2 *Sia (v_k) una successione di funzioni di $\mathcal{D}(\Omega)$. Diremo che la successione converge a una funzione $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ se*

- (i) *esiste un compatto $K \subseteq \Omega$ che contiene i supporti di tutte le funzioni v_k e v ;*
- (ii) *per ogni operatore differenziale D di ordine ≥ 0 si ha $\lim_{k \rightarrow +\infty} Dv_k = Dv$ uniformemente nell'aperto Ω .*

6.2 Distribuzioni

Definizione 6.2.1 *Diremo distribuzione sull'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ogni funzionale lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$, continuo nel senso che*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} Lv_k = Lv \quad \text{se } v_k \rightarrow v \text{ in } \mathcal{D}(\Omega). \quad (6.2)$$

Ovviamente, per la linearità, la continuità del funzionale sarà verificata se dal fatto che $v_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ segue che $Lv_k \rightarrow 0$.

Volendo distinguere i vari casi, si noterà $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ o $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C})$ se si ha $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o, rispettivamente, $v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con $v \in C^\infty_0$. Lo spazio delle distribuzioni sarà indicato con $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Si può dimostrare la seguente caratterizzazione

Proposizione 6.2.1 *Un funzionale lineare L definito su $\mathcal{D}(\Omega)$ è una distribuzione se e solo se verifica la seguente condizione: $\forall K \subseteq \Omega$, K compatto, esistono due costanti $M \geq 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tali che $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$ con supporto contenuto in K vale*

$$|Lv| \leq M \cdot \max_{|D| \leq m} \|Dv\|_\infty$$

dove D è un operatore di derivazione e $|D|$ è l'ordine dell'operatore.

Osserviamo che se $u \in L^1_{loc}$, $v \mapsto \int uv$ è un funzionale lineare, continuo, cioè una distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Qui l'integrale è l'integrale di Lebesgue esteso a $K \supseteq \text{supp}(v)$.

Notazione Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ denoteremo con uno dei simboli

$$\langle u, v \rangle \quad \circ \quad \int_{\Omega} u \cdot v \quad \circ \quad \int_{\Omega} uv \quad (6.3)$$

il valore del funzionale u assunto su $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si noti che se $u \notin L^1_{loc}$ la notazione come integrale non ha alcun significato, ma è solo simbolica; ricorda la situazione con u localmente integrabile.

Definizione 6.2.2 Due distribuzioni $u, w \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sono uguali se

$$\int uv = \int wv \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (6.4)$$

Definizione 6.2.3 Sia (u_k) una successione di distribuzioni in Ω e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremo che (u_k) converge a u nel senso delle distribuzioni (in $\mathcal{D}'(\Omega)$) se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int u_k v = \int uv \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (6.5)$$

Analogamente, la serie di distribuzioni $\sum u_k$ converge a u nel senso delle distribuzioni se converge a u nel senso delle distribuzioni la successione delle ridotte.

Vale il seguente

Teorema 6.2.1 [Teorema di completezza] Sia (u_k) una successione di distribuzioni in Ω e si supponga che per ogni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ esista finito

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int u_k v \quad . \quad (6.6)$$

Allora esiste una distribuzione u in Ω alla quale (u_k) converge nel senso delle distribuzioni. Lo stesso dicasi per la serie $\sum u_k$.

Lo stesso risultato vale non solo per le successioni, ma anche per distribuzioni dipendenti da un parametro continuo t , per $t \rightarrow t_0 \in \mathbb{R}$ o per t che tende a $+\infty$ o $-\infty$.

Abbiamo osservato più volte che se u è localmente integrabile allora $\int u \cdot$ è una distribuzione che si può indicare ancora con u . Ci chiediamo: è possibile che funzioni localmente integrabili diverse definiscano su $\mathcal{D}(\Omega)$ la stessa distribuzione? Fortunatamente ciò non accade, come testimonia il seguente

Lemma 6.2.1 [Fondamentale per le distribuzioni] Se $u_1, u_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ e per ogni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int u_1 \cdot v = \int u_2 \cdot v$$

allora $u_1 = u_2$ qo in Ω .

Dimostrazione: Omessa

□

6.3 Alcuni esempi fondamentali

Consideriamo, per cominciare, funzioni di una sola variabile

Esempio 6.3.1 [La distribuzione di Heaviside] *Sia*

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} . \quad (6.7)$$

Se

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} , \quad (6.8)$$

$H(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(x))$ è detta *funzione di Heaviside*. Ovviamente $H(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Allora, per ogni $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$Hv = \langle H, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)v(x) dx = \int_0^{+\infty} v(x) dx . \quad (6.9)$$

□

Ci sono distribuzioni che non sono individuate da una funzione localmente integrabile. Per esempio si consideri

Esempio 6.3.2 [La distribuzione delta di Dirac] *È la distribuzione u definita da*

$$\langle u, v \rangle = \langle \delta, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)v(x) dx = v(0) . \quad (6.10)$$

Mostriamo che questa distribuzione non è generata da alcuna funzione localmente integrabile.

Teorema 6.3.1 *Non esiste una funzione $\delta(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ che genera la distribuzione δ .*

Dimostrazione: Infatti, se per assurdo la distribuzione fosse generata da una funzione localmente integrabile $\delta(x)$, preso $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e una funzione arbitraria $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, si dovrebbe avere $\int_{\Omega} \delta(x)v(x) dx = 0$. Cioè sarebbe $\delta(x) = 0$ qo in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, per il Lemma 6.2.1, e quindi $\delta(x) = 0$ qo in \mathbb{R}^n , dal momento che l'insieme $\{0\}$ ha misura nulla. Dunque si avrebbe $\langle \delta, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)v(x) dx = 0$ per ogni v , anche per una v tale che $v(0) = 1$, per esempio. Dunque non potrebbe valere l'uguaglianza $\langle \delta, v \rangle = v(0)$.

Possiamo offrire una dimostrazione alternativa. Consideriamo la funzione

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|x\| > 1 \\ e \cdot e^{-1/(\|x\|-1)^2} & \text{se } \|x\| \leq 1 \end{cases} .$$

Si tratta di una funzione in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $v(0) = 1$. Consideriamo la successione $v_k(x) = v(kx)$; per ogni $k \leq 1$ si ha $\text{supp } v_k = \{x : \|x\| \leq \frac{1}{k}\}$. Se supponiamo che la distribuzione δ sia definita da una funzione integrabile $\delta(x)$, dovremmo avere

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)v_k(x) = v_k(0) = 1. \quad (6.11)$$

Osserviamo che $|\delta(x) \cdot v_k(x)| \leq |\delta(x)|$ che è funzione integrabile e che $v_k(x) \rightarrow 0$ qo. Infatti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x) = 1 \neq 0$$

solamente per $x = 0 \in \mathbb{R}^n$. Allora per il teorema di Lebesgue 4.2.2, dovremmo avere

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)v_k(x) = 0,$$

contro il precedente risultato 6.11. □

Tuttavia vale il seguente

Teorema 6.3.2 *Per ogni distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ esiste una successione (u_k) di funzioni in $\mathcal{D}(\Omega)$ che converge ad u nel senso delle distribuzioni.*

Dimostrazione: Omessa □

Proposizione 6.3.1 *Se $u_k \rightarrow u$ in L^1_{loc} , allora $u_k \rightarrow u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Dimostrazione: Infatti per ogni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha

$$\left| \int u_k v - \int u v \right| \leq \|u_k - u\|_{1,K} \cdot \|v\|_{\infty,K} \quad \text{se } K = \text{supp}(v).$$

Poiché per ipotesi $\|u_k - u\|_{1,K} \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$, allora $\int u_k v \rightarrow \int u v$. □

Esempio 6.3.3 *Facciamo vedere che esistono funzioni $u_\varepsilon \in L^1_{loc}$ che tendono alla δ di \mathbb{R}^n per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Sia $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e si consideri*

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\mathfrak{m}(B_\varepsilon)} \chi_{B_\varepsilon}(x),$$

dove B_ε è la palla di \mathbb{R}^n avente centro nell'origine e raggio ε . Ricordiamo che

$$\mathfrak{m}(B_\varepsilon) = \varepsilon^n \cdot \begin{cases} \frac{(2\pi)^{n/2}}{n!!} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{2^{(n+1)/2} \pi^{(n-1)/2}}{n!!} & \text{se } n \text{ è dispari} . \end{cases}$$

Si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon v = \frac{1}{\mathfrak{m}(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} v = v(x_\varepsilon), \quad x_\varepsilon \in B_\varepsilon.$$

Si è tenuto conto del teorema della media per gli integrali e del fatto che v è una funzione continua. Ora se $\varepsilon \rightarrow 0$, anche $x_\varepsilon \rightarrow 0$. Dunque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon v = v(0),$$

ossia $u_\varepsilon \rightarrow \delta$ nel senso delle distribuzioni. In questo caso u_ε è una funzione a supporto compatto, ma non è di classe $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; tuttavia si potrebbe facilmente “lisciarla” fino a diventare anche di classe C^∞ . Un esempio di classe C^∞ anche se non a supporto compatto è invece fornito dal seguente esempio.

Sia $u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Definiamo $u_k(x) = k \cdot u(kx)$. Vale allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} ku(kx)v(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} u(y)v\left(\frac{y}{k}\right) dy = \int_{\mathbb{R}} u(y)v(0) dy = v(0),$$

per il teorema di Lebesgue 4.2.2. Dunque ancora $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = \delta(x)$ nel senso delle distribuzioni. \square

Altro esempio importante è il seguente

Esempio 6.3.4 Sia $u(x) = \frac{1}{x}$ definita qo in \mathbb{R} . Ovviamente, $u(x) \notin L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Possiamo definire una distribuzione su \mathbb{R} considerando la parte principale dell'integrale $\mathbb{P}\frac{1}{x}$:

$$\mathbb{P} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} v(x) = \langle \mathbb{P}\frac{1}{x}, v \rangle.$$

La distribuzione si può definire come limite della famiglia di funzioni

$$\frac{1}{x} \chi_\varepsilon(x)$$

dove $\chi_\varepsilon(x)$ è la funzione caratteristica di $\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$. Si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \chi_\varepsilon(x) v(x) dx = \int_{\varepsilon < |x| \leq r} \frac{v(x) - v(0)}{x} dx,$$

uguaglianza che vale perché $1/x$ è dispari. Si noti che r è tale che $[-r, r] \supseteq \text{supp } v$. Poiché $v(x)$ è funzione di classe C^∞ esiste il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$. Dunque

$$\mathbb{P} \int_{\mathbb{R}} \frac{v(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| \leq r} \frac{v(x) - v(0)}{x} dx. \quad (6.12)$$

Anche in questo caso la distribuzione non è definita da una funzione localmente integrabile $w(x)$. Se lo fosse, sarebbe $w(x) = \frac{1}{x}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dunque qo in \mathbb{R} . Ma $\frac{1}{x}$ non è integrabile in alcun intervallo che contiene lo 0. \square

Osserviamo che una combinazione lineare di distribuzioni è un distribuzione. Se u è una distribuzione e $\psi \in C^\infty(\Omega)$, $w = u\psi$ è la distribuzione che ad ogni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ associa

$$\int wv = \int u(\psi v).$$

Infatti $\psi v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Osserviamo inoltre che se u è un funzione differenziabile in \mathbb{R}^n e $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, allora

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_k} = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} v + \int_{+\partial\Omega} u \cdot v \langle e_k, \nu \rangle ds \quad (6.13)$$

dove ν è la normale esterna alla superficie $+\partial\Omega$, la superficie, supposta regolare e positivamente orientata, che delimita Ω , mentre e_k è il versore dell'asse k -esimo. Se $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\text{supp } v \subseteq \Omega$ allora $\int_{+\partial\Omega} u \cdot v \langle e_k, \nu \rangle ds = 0$. Più in generale, se r è un versore, $u \in C^1(\Omega)$, e $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, si ha

$$\int_{\Omega} (D_r u) v = - \int_{\Omega} u \cdot (D_r v).$$

Queste osservazioni permettono di dare la seguente definizione

Definizione 6.3.1 *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, r un versore di \mathbb{R}^n . Esiste una distribuzione $w \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che, per ogni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$*

$$\int_{\Omega} wv = - \int_{\Omega} u(D_r v).$$

La distribuzione w si denota con $D_r u$ o con $\frac{\partial u}{\partial r}$ e si dice la derivata di u nella direzione di r .

Esempio 6.3.5 *Calcoliamo la derivata della distribuzione di Heaviside $H(x)$. In base alla definizione, abbiamo*

$$\langle H', v \rangle = \int_{\mathbb{R}} H'(x)v(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} H(x)v'(x) dx = - \int_0^{\infty} v'(x) dx = -v(r) + v(0) = v(0) = \langle \delta, v \rangle,$$

poiché si suppone che $\text{supp } v \subseteq [-r, r]$. Dunque, nel senso delle distribuzioni, si ha

$$H'(x) = \delta(x) \quad . \quad (6.14)$$

Esempio 6.3.6 *La derivata (nel senso delle distribuzioni) di $\log|x|$ è $P \frac{1}{x}$. Infatti*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\log|x|)' \cdot v &= - \int_{\mathbb{R}} \log|x|v'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq M} \log|x|v'(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \log|x| \cdot v(x)|_{\varepsilon}^M - \log|x| \cdot v(x)|_{-M}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq M} \frac{1}{x} v(x) dx \right) = \\ &= P \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} v(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log(\varepsilon) [v(\varepsilon) - v(-\varepsilon)] = P \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} v(x) dx \end{aligned}$$

Si è tenuto conto che $\text{supp } v \subseteq [-M, M]$ e che v è funzione infinitamente derivabile. □

Supponiamo che w e v siano due funzioni differenziabili definite su un aperto limitato e connesso di \mathbb{R}^n con w a valori in \mathbb{R}^n e v a valori in \mathbb{R} . Se ∇ indica il gradiente, allora vale la seguente formula d'integrazione per parti

$$\int_{\Omega} \langle w, \nabla \rangle v \, dx = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} w) v \, dx + \int_{+\partial\Omega} v \langle w, \nu \rangle \, ds. \quad (6.15)$$

Qui $\operatorname{div} w = \nabla \cdot w = \sum_{k=1}^n \frac{\partial w_k}{\partial x_k}$ è la *divergenza*, ν è la normale esterna alla superficie (bordo) di Ω che è orientata positivamente, ossia con la normale esterna considerata come positiva; infine ds indica l'elemento di superficie, mentre dx è l'elemento di volume. Sia poi $w = \nabla u$, con u funzione a valori reali, e si ricordi che $\nabla^2 = \Delta$, l'operatore di Laplace. Allora si trova

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx &= - \int_{\Omega} (\Delta u) v \, dx + \int_{+\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v \, ds = \\ &= - \int_{\Omega} u (\Delta v) \, dx + \int_{+\partial\Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} \, ds. \end{aligned}$$

Cioè

$$- \int_{\Omega} (\Delta u) v \, dx = \int_{\Omega} u (-\Delta v) \, dx - \int_{+\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v \, ds + \int_{+\partial\Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} \, ds.$$

Se v è nulla fuori di un compatto K , si ottiene

$$- \int_{\Omega} (\Delta u) v \, dx = \int_{\Omega} u (-\Delta v) \, dx. \quad (6.16)$$

Si vede facilmente che, nel senso delle distribuzioni, $\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{k=1}^n r_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$ e che $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_h} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}$ per ogni $h, k = 1, \dots, n$; cioè per le derivate di una distribuzione vale sempre il teorema di Schwarz.

Infine, se $u \in \mathcal{D}'$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty$, vale la formula di Leibniz

$$(u\psi)' = u'\psi + u\psi'. \quad (6.17)$$

6.3.1 Un esempio importante

Esempio 6.3.7 Sia $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ definita da $u(x) = \frac{1}{\|x\|}$, per $x \neq 0$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 x_k^2}$. Se $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u \cdot v &= \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \Delta v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| > \varepsilon} u \cdot \Delta v = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\|x\| > \varepsilon} \Delta u \cdot v + \int_{\|x\| = \varepsilon} u \langle \nabla v, \nu \rangle \, ds - \int_{\|x\| = \varepsilon} v \langle \nabla u, \nu \rangle \, ds \right\}, \end{aligned}$$

dove ν è la normale esterna rispetto $\|x\| > \varepsilon$, quindi $\nu(x) = -\frac{x}{\varepsilon}$, se $\|x\| = \varepsilon$. In $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ $u(x)$ è di classe C^∞ e quindi $\nabla u = -\frac{1}{\|x\|^2} \cdot \frac{x}{\|x\|}$ e conseguentemente $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dunque il primo integrale tende a 0 per $\varepsilon \rightarrow 0$. Il modulo del secondo contributo è maggiorato da

$$\|\nabla v\|_{\infty, \mathbb{R}^3} \cdot \|u\|_{\infty, \|x\|=\varepsilon} \cdot 4\pi\varepsilon^2.$$

Il primo fattore è limitato, il secondo vale $\frac{1}{\varepsilon}$ e quindi il tutto tende a 0 se $\varepsilon \rightarrow 0$. Infine si osservi che $\langle \nabla u, \nu \rangle = \frac{1}{\varepsilon^2}$ su $\|x\| = \varepsilon$, e quindi il terzo integrale dà

$$\int_{\|x\|=\varepsilon} v \langle \nabla u, \nu \rangle ds = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\|x\|=\varepsilon} v(x) ds = \frac{4\pi}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\|x\|=\varepsilon} v(x) ds = 4\pi v(x_\varepsilon).$$

Qui si è applicato il teorema della media per l'integrale. Se $\varepsilon \rightarrow 0$, questo contributo tende a $4\pi v(0)$. Dunque abbiamo stabilito

$$\Delta\left(-\frac{1}{4\pi\|x\|}\right) = \delta(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \quad (6.18)$$

Definizione 6.3.2 Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^n e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. un punto $x \in \Omega$ non sta in $\text{supp } u$ se esiste un aperto $\Omega' \subseteq \Omega$, intorno di x , tale che $u \upharpoonright \Omega' \equiv 0$. Una distribuzione è detta a supporto compatto se il suo supporto è un compatto $K \subseteq \Omega$. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribuzione a supporto compatto, il prolungamento banale di u , \tilde{u} , è definito da

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u} \cdot v = \int_{\Omega} u \cdot (v \upharpoonright \Omega), \quad (6.19)$$

per ogni $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

6.3.2 La convoluzione

Un'operazione molto importante sulle funzioni (e sulle distribuzioni) è quella di *convoluzione*.

Definizione 6.3.3 Date due funzioni u, v definite su \mathbb{R}^n e a valori in \mathbb{R} o in \mathbb{C} , si dice prodotto di convoluzione delle due funzioni la funzione

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) \cdot v(y) dy, \quad (6.20)$$

quando tale integrale esiste.

Si ha

Teorema 6.3.3 Siano $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione: La funzione che associa $(x, y) \mapsto |u(x - y)v(y)|$ è integrabile su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, per il Teorema di Tonelli 4.2.7. Infatti $x \mapsto |u(x - y)v(y)|$, fissato y , è integrabile su \mathbb{R}^n , poiché è il prodotto di $|v(y)|$, costante, per una funzione integrabile $|u(x - y)|$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x - y)v(y)| dx = |v(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - y)| dx = |v(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| dx = |v(y)| \cdot \|u\|_1.$$

Ma anche la funzione $y \mapsto |v(y)|\|u\|_1$ è integrabile. Dunque, per Fubini 4.2.6, è integrabile anche $y \mapsto u(x - y)v(y)$ per quasi ogni x e quindi $u * v$ è definito qo come funzione di x .

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x - y) \cdot v(y) dy = u * v(x)$$

è dunque definita per quasi ogni x . Si vede poi facilmente che

$$\|u * v\|_1 \leq \|u\|_1 \cdot \|v\|_1. \quad (6.21)$$

□

Si può dimostrare che se $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e almeno una delle due, per esempio $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $u * v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Lo stesso vale se una delle due ha supporto compatto. Si osservi che in ogni caso si ha

$$u * v(x) = v * u(x) \quad (6.22)$$

Per semplicità verifichiamolo per $x, y \in \mathbb{R}$ (cioè $n = 1$). Si ha $u * v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x - y)v(y) dy$. Con la sostituzione $z = x - y$ e dunque $y = x - z$ si trova $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x - y)v(y) dy = \int_{+\infty}^{-\infty} u(z)v(x - z) (-dz) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x - z)u(z) dz = v * u(x)$. Non è difficile generalizzare al caso \mathbb{R}^n .

Definizione 6.3.4 Se $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo

$$A + B = \{z \in \mathbb{R}^n : \exists x \in A, \exists y \in B \text{ e } z = x + y\}. \quad (6.23)$$

Teorema 6.3.4 Se $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e u, v sono a supporto compatto, allora

$$\text{supp}(u * v) = \overline{\text{supp}(u) + \text{supp}(v)}. \quad (6.24)$$

Dimostrazione: Omessa. □

Teorema 6.3.5 Siano $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e v a supporto compatto. Se una delle funzioni è continua, anche $u * v$ è continua. Se una delle funzioni è di classe C^1 , anche $u * v$ lo è e si ha

$$D_k(u * v) = (D_k u) * v \quad \text{oppure} \quad u * (D_k v). \quad (6.25)$$

Dimostrazione: Si supponga u continua e v a supporto compatto. Sia (x_k) una successione che tende a x . Scelti r, R tali che $\|x_k\| < r$ e $\text{supp } v \subseteq B_R = \{x : \|x\| < R\}$, si trova

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u * v(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\text{supp } v} u(x_k - y)v(y) dy = \int_{\text{supp } v} u(x - y)v(y) dy,$$

per il Teorema di Lebesgue 4.2.2. Infatti una maggiorazione dell'integrando è data da $M \cdot |v(x)|$ se $M = \sup |u|$ in $\overline{B_{r+R}}$.

Se poi $u \in \mathcal{C}^1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\text{supp } v} \frac{u(x + he_k - y) - u(x - y)}{h} \cdot v(y) dy = \int_{\text{supp } v} (D_k u(x - y))v(y) dy,$$

utilizzando ancora il Teorema di Lebesgue. Similmente si ragiona se $v \in \mathcal{C}^0$ o $v \in \mathcal{C}^1$. \square

Esempio 6.3.8 Si calcoli $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}(x)$.

Dimostrazione:

$$\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(x - y)\chi_{[0,1]}(y) dy = \int_0^1 \chi_{[0,1]}(x - y) dy$$

La funzione $\chi_{[0,1]}(x - y)$ vale 1 solo se $0 \leq x - y \leq 1$ mentre vale 0 fuori da tale intervallo. Tenuto conto che pure y è compreso tra 0 e 1, si vede che l'integrale dà un contributo non nullo solo se $0 \leq x \leq 2$. Dunque per i valori di x in $[0, 2]$, si ha

$$\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}(x) = \int_0^1 \chi_{[0,1]}(x - y) dy = - \int_x^{x-1} dt = \int_{x-1}^x dt = x - x + 1 = 1.$$

Qui si è posto $x - y = t$, e quindi gli estremi d'integrazione per t sono: se $y = 0$, $t = x$; se $y = 1$, $t = x - 1$. Inoltre $y'(t) = -1$. In definitiva si ottiene

$$\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}(x) = \chi_{[0,2]}(x). \quad (6.26)$$

Vogliamo ora cercare di definire la *convoluzione di distribuzioni*. Supponiamo date due distribuzioni u, w , definite per esempio da funzioni localmente integrabili, e vediamo quale significato possa avere $\langle u * w, v \rangle$ con $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$\langle u * w, v \rangle = \int (u * w)v = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x - y)w(y) dy \right) v(x) dx.$$

Posto $x - y = z$ e quindi $x = y + z$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x - y)w(y) dy \right) v(x) dx = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} u(z)w(y)v(y + z) dy dz = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (u \otimes w)v(y + z) dy dz.$$

Si osservi che se $v(x)$ ha supporto compatto, non è detto che anche $v(y + z)$ ce l'abbia. Per esempio, se $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $|x| \leq a$ è un intervallo compatto, ma $|y + z| \leq a$ non è un compatto di \mathbb{R}^2 . Se, più in generale, K è un compatto di \mathbb{R}^n , l'insieme delle coppie $(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tali che $y + z \in K$ non

è un compatto di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, a meno che non si imponga un'ulteriore condizione di vincolo. Se, per esempio, una delle due distribuzioni ha supporto compatto, per esempio $\text{supp } w \subseteq \{y : \|y\| \leq b\}$, $b > 0$, allora $y + z \in K$ e $\|y\| \leq b$ è un compatto di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Dunque, nel caso in cui w abbia supporto compatto

$$v \mapsto \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (u \otimes w)v(y+z) dy dz, \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

è una distribuzione, che è detta *convoluzione delle distribuzioni* u e w .

Un tipico esempio di distribuzione che ha supporto compatto è la Delta di Dirac.

Esempio 6.3.9 *Calcoliamo $u * \delta$ con $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \int (u * \delta)(x)v(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x-y)\delta(y) dy \right) v(x) dx = \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} u(z)\delta(y)v(y+z) dy dz = \int_{\mathbb{R}} u(z) \left(\int_{\mathbb{R}} \delta(y)v(z+y) dy \right) dz = \int_{\mathbb{R}} u(z)v(z) dz. \end{aligned}$$

Cioè

$$u * \delta = u, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (6.27)$$

□

Più in generale, è $(u * \delta)(x - x_0) = u(x - x_0)$. (Lo si calcoli per esercizio).

6.4 Distribuzioni ed equazioni alle derivate parziali

Per mostrare l'utilità delle distribuzioni nella risoluzione di problemi alle derivate parziali, faremo alcuni esempi.

Consideriamo un semplice operatore differenziale del tipo

$$D = a_1 D_1^2 + a_2 D_2^2 + \dots + a_n D_n^2 \quad (6.28)$$

dove gli a_k sono numeri reali e $D_k u = \frac{\partial u}{\partial x_k}$.

Definizione 6.4.1 *L'operatore differenziale 6.28 si dice di tipo ellittico se tutti i coefficienti a_k sono strettamente positivi. Più in generale, un operatore*

$$D = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i D_j \quad (6.29)$$

si dice ellittico se può ridursi alla forma 6.28 con tutti gli $a_k > 0$. (Si ricordi, per esempio, il criterio di Jacobi-Sylvester sulle forme quadratiche, studiato nel corso di Analisi Matematica II).

Si può dimostrare che se u e w sono distribuzioni e almeno una è a supporto compatto, si ha $D(u * w) = Du * w$.

Consideriamo ora il seguente problema ai valori iniziali

Problema È data l'equazione parabolica

$$u_t = Du \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \quad (6.30)$$

dove D è un operatore ellittico, con opportune condizioni iniziali

$$u(x, 0) = f(x). \quad (6.31)$$

Si cerca un soluzione $u(x, t)$ dell'equazione 6.30 con la condizione iniziale 6.31 nell'ambito delle distribuzioni di \mathbb{R}^n dipendenti dal parametro t , pensato come il tempo. \square

Definizione 6.4.2 Diremo che $G(x, t)$ è una soluzione fondamentale o funzione di Green di 6.30 se $G(x, t)$ soddisfa 6.30 e inoltre $G(x, 0) = \delta(x)$.

Il problema posto ha la seguente soluzione nell'ambito delle distribuzioni

Teorema 6.4.1 Il problema 6.30 + 6.31 ha come soluzione

$$u(x, t) = (G * f)(x, t). \quad (6.32)$$

Dimostrazione: Si noti che la convoluzione va fatta sulle variabili spaziali. La dimostrazione è allora una semplice verifica. Infatti

$$D(G * f) = (DG) * f \quad \text{e} \quad (G * f)_t = \frac{\partial(G * f)(x, t)}{\partial t} = G_t * f.$$

Dunque

$$Du - u_t = (DG - G_t) * f = 0,$$

poiché $(DG - G_t) = 0$ per ipotesi. Inoltre

$$G(x, 0) * f = \delta * f = f.$$

\square

In questo modo tutta la difficoltà è scaricata sulla capacità di trovare la soluzione fondamentale.

Analogamente si può dare la soluzione nel senso delle distribuzioni del problema ai valori iniziali per l'equazione iperbolica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Du \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \quad (6.33)$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{cases} \quad (6.34)$$

Qui D è un operatore ellittico e f e g sono opportune condizioni iniziali.

Definizione 6.4.3 Diremo che $G(x, t)$ è una soluzione fondamentale o di Green di 6.33 se $G(x, t)$ soddisfa 6.33 e inoltre $G(x, 0) = 0$ e $G_t(x, 0) = \delta(x)$.

Teorema 6.4.2 Il problema 6.33 + 6.34 ha una soluzione che si può esprimere conoscendo la soluzione fondamentale $G(x, t)$.

Dimostrazione: Esporremo ora in dettaglio come si può ottenere la soluzione nel senso delle distribuzioni a partire dalla conoscenza di $G(x, t)$. Consideriamo la distribuzione

$$u(x, t) = (G * f)(x, t).$$

È facile riconoscere che $u(x, t)$ soddisfa l'equazione differenziale e che inoltre $u(x, 0) = 0$ e che $u_t(x, 0) = f(x)$. Perciò, se poniamo $v(x, t) = u_t(x, t) = (G_t * f)(x, t)$, si trova che $v(x, t)$ soddisfa l'equazione 6.33 e inoltre $v(x, 0) = (G_t(x, 0)) * f = f(x)$ e $v_t(x, 0) = (G_{tt} \upharpoonright (t=0)) * f(x, 0)$.

Cerchiamo ora una soluzione $w(x, t)$ tale che $w(x, 0) = 0$ e $w_t(x, 0) = g(x) - v_t(x, 0)$. Una tale soluzione è evidentemente fornita da

$$w(x, t) = G * (g - G_{tt} \upharpoonright (t=0) * f)(x, t).$$

Allora

$$z(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (6.35)$$

è la soluzione cercata. Infatti, l'equazione differenziale $Dz = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ è verificata, grazie alla definizione della soluzione fondamentale $G(x, t)$. Inoltre si ha

$$z(x, 0) = v(x, 0) + w(x, 0) = f(x) + 0 = f(x), \quad (6.36)$$

$$z_t(x, 0) = v_t(x, 0) + w_t(x, 0) = (G_{tt} * f)(x, 0) + (G_t * g)(x, 0) - (G_{tt} * f)(x, 0) = g(x). \quad (6.37)$$

□

Applichiamo, per esempio questa tecnica all'equazione delle onde nella sua forma più semplice, con una sola coordinata spaziale.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6.38)$$

Osserviamo che $v(x, t) = H(x - ct)$ è una soluzione dell'equazione 6.38. Infatti

$$v'_x(x, t) = H'(x - ct) = \delta(x - ct) \quad \text{e} \quad v''_{xx} = \delta'(x - ct).$$

Se $\varphi(x)$ è una funzione di classe $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha $\langle H, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x - ct)\varphi(x) dx = \int_{ct}^{+\infty} \varphi(x) dx$ e dunque

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{ct}^{+\infty} \varphi(x) dx = -c\varphi(ct),$$

ossia $v_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} H(x - ct) = -c\delta(x - ct)$ e $v_{tt}(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} H(x - ct) = c^2\delta'(x - ct)$. In definitiva

$$H_{tt}(x - ct) - c^2 H_{xx}(x - ct) = c^2\delta'(x - ct) - c^2\delta'(x - ct) = 0, \quad (6.39)$$

e inoltre $v(x, 0) = H(x)$ e $v'_t(x, 0) = -c\delta(x)$. Analogamente si trova che $w(x, t) = H(x + ct)$ risolve l'equazione differenziale e inoltre $w(x, 0) = H(x)$ e $w_t(x, 0) = c\delta(x)$. Allora

$$G(x, t) = \frac{1}{2c}[H(x + ct) - H(x - ct)] \quad (6.40)$$

è una soluzione fondamentale. Infatti $G(x, t)$ è una soluzione dell'equazione delle onde 6.38 poiché è una combinazione lineare di soluzioni di un'equazione lineare; inoltre

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= \frac{1}{2c}[H(x) - H(x)] = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t}(x, 0) &= \frac{1}{2c}[c\delta(x) + c\delta(x)] = \delta(x) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{1}{2c}[c^2\delta'(x + ct) - c^2\delta'(x - ct)] \\ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Dunque, in base alla formula 6.35

$$\begin{aligned} z(x, t) &= (G_t * f)(x, t) + G * (g - G_{tt} \upharpoonright (t=0) * f)(x, t) = \\ &= \frac{1}{2c}[c\delta(x + ct) + c\delta(x - ct)] * f + \frac{1}{2c}[H(x + ct) - H(x - ct)] * g = \\ &= \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c}[\int_{\mathbb{R}} H(x + ct - \xi)g(\xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}} H(x - ct - \xi)g(\xi) d\xi] = \\ &= \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c}[\int_{-\infty}^{x+ct} g(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{x-ct} g(\xi) d\xi] \end{aligned}$$

e, finalmente, si ottiene

$$z(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \quad (6.41)$$

che è la nota formula di D'Alembert, interpretata ora nel senso delle distribuzioni. In particolare si può assegnare un significato a questa formula anche se f non è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $g \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Infine, sia data l'equazione ellittica

$$Du = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (6.42)$$

Una *soluzione fondamentale* di 6.42 è una distribuzione $G(x)$ tale che $DG = \delta(x)$. Allora $u(x) = (G * f)(x)$ è soluzione di 6.42. Infatti, come facilmente si verifica,

$$Du = D(G * f) = (DG) * f = \delta * f = f.$$

Abbiamo verificato (si veda 6.18) che

$$\Delta\left(-\frac{1}{4\pi\|x\|}\right) = \delta(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

Allora l'equazione di Poisson

$$\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

ha la soluzione

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta.$$

Capitolo 7

Un'introduzione alle trasformate di Fourier

7.1 Definizione e prime proprietà

Definizione 7.1.1 Sia f una funzione di $L^1(\mathbb{R}^n)$. Diremo trasformata di Fourier di $f(x)$ il seguente integrale (che certamente esiste sotto l'ipotesi fatta come qui sotto è spiegato)

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx = \mathcal{F}(f)(\xi). \quad (7.1)$$

Qui $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\langle x, \xi \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$.¹

Osservazione 7.1.1 Esistono maniere alternative di definire la trasformata di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Almeno le seguenti

$$\mathcal{F}_1(f)(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx,$$

che è usata specialmente nelle trattazioni teoriche e che rende particolarmente semplice la formula di inversione e l'uguaglianza che appare nel Teorema di Plancherel. Inoltre

$$\mathcal{F}_2(f)(\nu) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi\langle x, \nu \rangle} f(x) dx,$$

usata in molti testi di teoria dei segnali. Anche in questo caso la formula di inversione è particolarmente semplice.

Si osservi che la trasformata di Fourier di f è una funzione $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$. A giustificazione della definizione osserviamo che se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, poiché il fattore $e^{-i\langle x, \xi \rangle} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora $e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dalla definizione stessa segue la *linearità* della trasformazione.

¹Le note di questo capitolo sono state redatte utilizzando in parte appunti del Prof. Daniele Del Santo.

Diamo le seguenti prime proprietà conseguenze della definizione

Proposizione 7.1.1 [Continuità] *La funzione \hat{f} è continua.*

Dimostrazione: Supponiamo che una successione (ξ_n) converga a ξ . Dimostriamo che $\hat{f}(\xi_n) \rightarrow \hat{f}(\xi)$. A questo scopo sia

$$g_n(x) = e^{-i\langle x, \xi_n \rangle} f(x).$$

Allora $g_n(x) \rightarrow e^{-i\langle x, \xi \rangle} \cdot f(x)$ qo e inoltre $|g_n(x)| \leq |f(x)|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e naturalmente $|f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora per il Teorema di Lebesgue 4.2.2 si deduce che $e^{-i\langle x, \xi \rangle} \cdot f(x)$ è integrabile e che

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_n(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \cdot f(x) dx,$$

cioè che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi_n) = \hat{f}(\xi). \quad (7.2)$$

□

Proposizione 7.1.2 [Limitatezza] *La funzione \hat{f} è limitata.*

Dimostrazione: Infatti si ha, ricordando che $|e^{-i\langle x, \xi \rangle}| = 1$,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

In particolare, si ha che $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e che

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}. \quad (7.3)$$

□

Teorema 7.1.1 [Riemann-Lebesgue] *La funzione \hat{f} ha limite 0 per $\|\xi\| \rightarrow \infty$.*

Dimostrazione: Daremo ora una dimostrazione valida nel caso $f \in L^1(\mathbb{R})$; più avanti daremo una dimostrazione valida nel caso generale. Cominciamo a considerare la funzione caratteristica di un intervallo: $\chi_{[a,b]}(x)$. La sua trasformata di Fourier è

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x) e^{-ix\xi} dx = \int_a^b e^{-ix\xi} dx = \left[-\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi}.$$

Poiché $|e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}| \leq 2$, dunque è limitato, si vede facilmente che

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\chi_{[a,b]})(\xi) = 0.$$

Ma per la definizione di integrale di Lebesgue, sappiamo che una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è limite qo di una successione di funzioni a scala e che si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f - u_k| = 0$. Inoltre la trasformata di una funzione a scala, essendo combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di un intervallo, ha trasformata di Fourier che tende a 0 quando $\xi \rightarrow \infty$. Dunque dato $\varepsilon > 0$, esiste \bar{k} tale che se $k > \bar{k}$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - u_k(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

ed esiste $R > 0$ tale che se $|\xi| > R$ si ha $|\hat{u}_k|(\xi) < \frac{\varepsilon}{2}$. Perciò, se scegliamo un $k > \bar{k}$ e un $|\xi| > R$ avremo

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} (f(x) - u_k(x) + u_k(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} (f(x) - u_k(x)) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} (u_k(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - u_k(x)| dx + |\hat{u}_k(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque, in definitiva

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0. \quad (7.4)$$

La dimostrazione nel caso $f \in L^1(\mathbb{R})$ è così completa. Più avanti daremo la dimostrazione generale per $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. \square

In conclusione abbiamo dimostrato il seguente

Teorema 7.1.2 Sia $\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx$. Allora $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0.$$

Inoltre la trasformazione è una trasformazione lineare.

7.2 Altre proprietà della trasformata

Proposizione 7.2.1 [Traslazione] Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Sia $g(x) = \tau_a f(x) = f(x - a)$ la traslata del vettore a . Allora

$$\hat{g}(\xi) = e^{-i\langle a, \xi \rangle} \hat{f}(\xi). \quad (7.5)$$

Dimostrazione: È sufficiente un semplice calcolo. Infatti

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x - a) dx = (\text{se poniamo } x - a = y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y+a, \xi \rangle} f(y) dy = e^{-i\langle a, \xi \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y, \xi \rangle} f(y) dy = e^{-i\langle a, \xi \rangle} \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

\square

Proposizione 7.2.2 [Traslazione in frequenza] Sia $g(x) = e^{i\langle a, x \rangle} f(x) = e^{i\langle x, a \rangle} f(x)$. Allora

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - a). \quad (7.6)$$

Dimostrazione: Anche in questo caso è sufficiente un semplice calcolo

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} e^{i\langle x, a \rangle} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi - a \rangle} f(x) dx = \hat{f}(\xi - a).$$

□

Proposizione 7.2.3 [Riscaldamento] Sia $g(x) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora

$$\hat{g}(\xi) = |\alpha|^n \hat{f}(\alpha\xi). \quad (7.7)$$

Dimostrazione: Infatti

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \left(\text{se poniamo } \frac{x}{\alpha} = y\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \alpha y, \xi \rangle} f(y) |\alpha|^n dy = |\alpha|^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y, \alpha\xi \rangle} f(y) dy = |\alpha|^n \hat{f}(\alpha\xi). \end{aligned}$$

□

Più in generale, si può dimostrare che, se A è una matrice $n \times n$ invertibile e a coefficienti reali

Proposizione 7.2.4 [Riscaldamento generale] Sia $g(x) = f(A^{-1}x)$ con $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n)$ e $\det(A) \neq 0$. Allora, se A^t indica la trasposta di A , si ha

$$\hat{g}(\xi) = |\det(A)| \hat{f}(A^t \xi). \quad (7.8)$$

□

Proposizione 7.2.5 [Coniugio] Sia $g(x) = \overline{f(x)}$ dove $\overline{(a + ib)} = a - ib$ è l'operazione di coniugio nel campo complesso \mathbb{C} . Allora si ha

$$\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}. \quad (7.9)$$

Dimostrazione: Infatti

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \overline{f(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{-i\langle x, -\xi \rangle} f(x)} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, -\xi \rangle} f(x) dx} = \overline{\hat{f}(-\xi)}.$$

□

Proposizione 7.2.6 [Trasformata della derivata] Sia $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e supponiamo che $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora si ha

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi) = (i\xi_k)\hat{f}(\xi). \quad (7.10)$$

Dimostrazione: Ci limiteremo ad esporre la dimostrazione nel caso $n = 1$, per funzioni di una sola variabile spaziale. Allora si ha

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f'(x) dx = (\text{integrando per parti}) = \\ &= \left(\left[e^{-ix\xi} f(x) \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} + (i\xi) \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx \right) = (i\xi)\hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Si noti che $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ix\xi} f(x) = 0$ e analogamente per $x \rightarrow -\infty$. Infatti $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ e quindi, poiché f' è integrabile esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, ma, poiché pure $f(x)$ è integrabile, questo limite non può che essere 0. In definitiva si ottiene

$$\hat{f}'(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi).$$

□

Proposizione 7.2.7 [Trasformata del prodotto per una variabile] Sia $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e supponiamo che $x_k \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora si ha

$$\widehat{x_k \cdot f}(\xi) = i \frac{\partial \hat{f}(\xi)}{\partial \xi_k}. \quad (7.11)$$

Dimostrazione: Anche in questo caso proveremo la formula per funzioni di una sola variabile. Supponiamo dunque che $f(x)$ e $xf(x)$ siano funzioni in $L^1(\mathbb{R})$. Sia h_m una successione in \mathbb{R} tale che $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = 0$ e consideriamo

$$\frac{\hat{f}(\xi + h_m) - \hat{f}(\xi)}{h_m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^{-ix(\xi+h_m)} - e^{-ix\xi}}{h_m} \right] f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^{-ixh_m} - 1}{h_m} \right] e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

Ora si può osservare che, dato un arco $|\alpha| \leq 2\pi$, la lunghezza della corda $|e^{i\alpha} - 1| \leq |\alpha|$.² Se poi l'arco supera in modulo 2π , la disuguaglianza vale a maggiore ragione. Dunque si conclude che $\left| \left[\frac{e^{-ixh_m} - 1}{h_m} \right] \right| \leq \frac{|-ixh_m|}{|h_m|} = |x|$. Dunque

$$\left| \left[\frac{e^{-ixh_m} - 1}{h_m} \right] e^{-ix\xi} f(x) \right| \leq |x \cdot e^{-ix\xi} f(x)| = |x| \cdot |f(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ora $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-ixh_m} - 1}{h_m} \right] e^{-ix\xi} f(x) = -ixe^{-ix\xi} f(x)$ e per il Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata si ha

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^{-ixh_m} - 1}{h_m} \right] e^{-ix\xi} f(x) dx = -i \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ix\xi} f(x) dx = -i \widehat{xf(x)}(\xi).$$

²Se la considerazione geometrica non piace si ricordi che $|e^{i\alpha} - 1| = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha)} = 2|\sin(\frac{\alpha}{2})| \leq |\alpha|$.

Cioè

$$\widehat{xf(x)}(\xi) = i\hat{f}'(\xi).$$

□

Vediamo ora alcuni esempi interessanti

Esempio 7.2.1 Sia $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, $a > 0$. Il caso della funzione caratteristica di un intervallo è già stato trattato, comunque si trova facilmente

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \chi_{[-a,a]}(x) dx = \int_{-a}^a e^{-ix\xi} dx = \left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{x=-a}^{x=a} = 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}$$

se $\xi \neq 0$, mentre $\hat{f}(0) = 2a$. Dunque

$$\widehat{\chi_{[-a,a]}}(\xi) = \begin{cases} 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} & \xi \neq 0 \\ 2a & \xi = 0 \end{cases}. \quad (7.12)$$

□

Esempio 7.2.2 Sia $f(x) = (1 - \frac{|x|}{a}) \cdot \chi_{[-a,a]}(x)$. Allora

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-a}^0 e^{-ix\xi} \left(1 + \frac{x}{a}\right) dx + \int_0^a e^{-ix\xi} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \left[\frac{i}{\xi} e^{-ix\xi} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \right]_{x=-a}^0 - \frac{i}{\xi} \int_{-a}^0 \frac{e^{-ix\xi}}{a} dx + \\ &+ \left[\frac{i}{\xi} e^{-ix\xi} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right]_0^a + \frac{i}{\xi} \int_0^a \frac{e^{-ix\xi}}{a} dx = \frac{i}{\xi} - \frac{i}{\xi} \left[\frac{i}{\xi a} e^{-ix\xi} \right]_{x=-a}^0 - \frac{i}{\xi} + \frac{i}{\xi} \left[\frac{i}{\xi a} e^{-ix\xi} \right]_{x=0}^a = \\ &= \frac{1}{\xi^2 a} - \frac{1}{\xi^2 a} e^{ia\xi} - \frac{1}{\xi^2 a} e^{-ia\xi} + \frac{1}{\xi^2 a} = \frac{2 - 2 \cos(a\xi)}{\xi^2 a} = a \frac{1 - \cos(a\xi)}{\frac{\xi^2 a^2}{4}} = a \left(\frac{\sin(\frac{a\xi}{2})}{\frac{a\xi}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Dunque

$$\hat{f}(\xi) = a \left(\frac{\sin(\frac{a\xi}{2})}{\frac{a\xi}{2}} \right)^2. \quad (7.13)$$

□

Esempio 7.2.3 Sia $f(x) = e^{-x^2}$. Allora

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-x^2} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\xi^2}{4} - ix\xi - x^2} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\frac{\xi}{2})^2} dx.$$

Per calcolare questo integrale consideriamo la funzione $g(z) = e^{-z^2}$ e integriamola lungo un cammino Γ del piano complesso dato da un rettangolo di vertici $-R$, R , $R+i\frac{\xi}{2}$ e $-R+i\frac{\xi}{2}$, orientato in senso antiorario (positivo). Poiché $g(z)$ non ha singolarità all'interno di questo cammino, ovviamente

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = 0.$$

In dettaglio si ha

$$0 = \int_{\Gamma} g(z) dz = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \int_R^{R+i\frac{\xi}{2}} e^{-(R+iy)^2} i dy + \int_R^{-R} e^{-(x+i\frac{\xi}{2})^2} dx + \int_{-R+i\frac{\xi}{2}}^{-R} e^{-(R+iy)^2} i dy.$$

I due integrali

$$\int_R^{R+i\frac{\xi}{2}} e^{-(R+iy)^2} i dy \quad \text{e} \quad \int_{-R+i\frac{\xi}{2}}^{-R} e^{-(R+iy)^2} i dy$$

tendono a zero quando $R \rightarrow +\infty$, come si può facilmente riconoscere. Infatti entrambi sono il prodotto di e^{-R^2} per una quantità che si mantiene limitata. Prendendo il limite per $R \rightarrow +\infty$ e ricordando che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ si trova

$$\sqrt{\pi} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\frac{\xi}{2})^2} dx = 0 \quad \text{ossia} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\frac{\xi}{2})^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Finalmente, si ottiene

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4}}. \quad (7.14)$$

Più in generale, ricordando la proprietà di riscaldamento 7.2.4, si trova, se $a > 0$,

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{a}}) = \sqrt{a\pi} e^{-\frac{a\xi^2}{4}}.$$

In particolare, se $a = 2$, si trova

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}}) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \quad (7.15)$$

□

7.3 Convoluzione e approssimazione

Abbiamo già introdotto la nozione di convoluzione di due funzioni e mostrato, per esempio, che se f e g sono di classe L^1 , anche la convoluzione $f * g$ lo è (6.3.3). Analogamente se f è di classe L^2 o L^∞ e $g \in L^1$, allora $f * g$ sta nella classe di f . Abbiamo ora il seguente importante

Lemma 7.3.1 *Sia $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$ e si definisca $\rho_k = k^n \rho(kx)$. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\rho_k * f)(x) = f(x) \quad \text{nel senso di } L^1(\mathbb{R}^n). \quad (7.16)$$

Dimostrazione: Cominciamo a considerare il caso $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, cioè di una funzione continua e a supporto compatto. In questo caso si ha

$$\begin{aligned} (\rho_k * f - f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x-y)f(y) dy - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_k(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\rho_k(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) k^n \rho(ky) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(f\left(x - \frac{z}{k}\right) - f(x) \right) \rho(z) dz. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è fatta la sostituzione $z = ky$. Ora f è uniformemente continua (per il Teorema di Heine) e quindi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $|y| < \delta$ allora $|f(x+y) - f(x)| < \varepsilon$. Inoltre $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \rho(x) dx \leq \varepsilon \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$ e un R tale che $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \rho(x) dx \leq \varepsilon \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Qui $B(0, R) = \{x : \|x\| < R\}$, è la sfera aperta in \mathbb{R}^n con la distanza euclidea. Esiste poi \bar{k} tale che sia $\|\frac{z}{k}\| < \delta$ per $z \in B(0, R)$. Perciò $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - \frac{z}{k}) - f(x)| dx \leq 2m(\text{supp } f) \cdot \varepsilon$ per ogni $z \in B(0, R)$. Osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(f\left(x - \frac{z}{k}\right) - f(x) \right) dz = \int_{B(0,R)} \left(f\left(x - \frac{z}{k}\right) - f(x) \right) dz + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \left(f\left(x - \frac{z}{k}\right) - f(x) \right) dz,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\rho_k * f - f|(x) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(0,R)_z} \left| f\left(x - \frac{z}{k}\right) - f(x) \right| |\rho(z)| dz dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \int_{(\mathbb{R}^n \setminus B(0,R))_z} \left| f\left(x - \frac{z}{k}\right) - f(x) \right| |\rho(z)| dz dx' \leq \int_{B(0,R)} 2m(\text{supp } f) \varepsilon |\rho(z)| dz + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} 2\|f\|_{L^1} |\rho(z)| dz \leq 2m(\text{supp } f) \varepsilon \|\rho\|_{L^1} + 2\|f\|_{L^1} \varepsilon \|\rho\|_{L^1} = \\ &= 2\varepsilon (m(\text{supp } f) + \|f\|_{L^1}) \|\rho\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Cioè la tesi nel caso $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Ma C_0^0 è denso in L^1 . Cioè, se $f \in C_0^0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_0^0$ tale che $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste \bar{k} tale che per ogni $k > \bar{k}$ vale $\|\rho_k * g - g\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste \bar{k} tale che per ogni $k > \bar{k}$ si ha

$$\begin{aligned} \|\rho_k * f - f\|_{L^1} &\leq \|\rho_k * f - \rho_k * g + \rho_k * g - g + g - f\|_{L^1} \leq \\ &\leq \|\rho_k * f - \rho_k * g\|_{L^1} + \|\rho_k * g - g\|_{L^1} + \|g - f\|_{L^1} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

7.4 Trasformata di Fourier e convoluzione. Antitrasformata

Proposizione 7.4.1 *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g). \quad (7.17)$$

Dimostrazione: Infatti

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} (f * g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x-y)g(y) dy dx = \quad (\text{ponendo } x-y = z \text{ ossia } x = z+y, dx = dz) = \\
&= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-i\langle z, \xi \rangle} f(z)e^{-i\langle y, \xi \rangle} g(y) dy dz = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z, \xi \rangle} f(z) dz \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y, \xi \rangle} g(y) dy = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).
\end{aligned}$$

□

Definizione 7.4.1 Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si dice antitrasformata di Fourier di f la funzione

$$\check{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx. \quad (7.18)$$

Si osservi che $\check{\mathcal{F}}$ gode di tutte le proprietà di \mathcal{F} ; infatti $\check{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$.

Il nome dato alla trasformazione integrale $\check{\mathcal{F}}$ è giustificato dal seguente

Teorema 7.4.1 [Teorema di inversione] Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e si supponga che anche $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f \quad (\text{nel senso delle funzioni di } L^1(\mathbb{R}^n)). \quad (7.19)$$

Alla dimostrazione di questo teorema facciamo precedere il seguente

Lemma 7.4.1 Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e sia g una funzione pari e $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$(f * \hat{g})(x) = (2\pi)^n \check{\mathcal{F}}(\hat{f}g)(x). \quad (7.20)$$

Dimostrazione: Infatti

$$\begin{aligned}
(f * \hat{g})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\hat{g}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, y \rangle} g(\xi) d\xi dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, y \rangle} g(-\xi) d\xi dy
\end{aligned}$$

a causa della parità di g : $g(-\xi) = g(\xi)$. Facendo il seguente cambiamento di variabili $\zeta = -\xi$ e quindi $d\zeta = (-1)^n d\xi$ e $z = x-y$ e conseguentemente $dz = (-1)^n dy$, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, y \rangle} g(-\xi) d\xi dy = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-i\langle \xi, y \rangle} g(-\xi) d\xi dy = \\
&= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(z) e^{-i\langle \zeta, z-x \rangle} g(\zeta) d\zeta dz = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \zeta, x \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \zeta, z \rangle} f(z) dz \right) g(\zeta) d\zeta = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \zeta, x \rangle} \hat{f}(\zeta) g(\zeta) d\zeta = (2\pi)^n \check{\mathcal{F}}(\hat{f}g)(x).
\end{aligned}$$

□

Possiamo ora procedere alla dimostrazione del Teorema di inversione 7.4.1.

Dimostrazione: Ricordiamo che $\rho(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$ ha come trasformata $e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}$ (si veda l'esempio 7.2.2). Poniamo quindi $\rho_k(\xi) = \rho(\frac{\xi}{k})$, con $k = 1, e, \dots$. Si ha

$$\hat{\rho}_k(\xi) = k^n \hat{\rho}(k\xi) = (\sqrt{2\pi})^n k^n \rho(k\xi).$$

D'altra parte, per il Lemma sulla convoluzione 7.3.1, si ha che

$$f * \hat{\rho}_k \rightarrow (\sqrt{2\pi})^n f \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n).$$

Infatti in base al lemma citato si ha che se $\sigma_k(x) = k^n \rho(kx)$ (con $\rho(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$), allora $f * \sigma_k \rightarrow f$ nel senso di L^1 . Allora si ha

$$f * \hat{\rho}_k = (2\pi)^n \check{\mathcal{F}}(\hat{f}\rho_k)(x).$$

Ora

$$(2\pi)^n (\hat{f}\rho_k)(\xi) = (\sqrt{2\pi})^n \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2k^2}} \rightarrow (\sqrt{2\pi})^n \hat{f}(\xi) \quad \text{qo}$$

se $k \rightarrow +\infty$. Inoltre $|(2\pi)^n (\hat{f}\rho_k)(\xi)| \leq (\sqrt{2\pi})^n |\hat{f}(\xi)|$. Allora per il Teorema di Lebesgue 4.2.2 si ha che $(2\pi)^n (\hat{f}\rho_k)(\xi) \rightarrow (\sqrt{2\pi})^n \hat{f}(\xi)$ in norma L^1 .

Ma allora

$$(2\pi)^n \check{\mathcal{F}}(\hat{f}\rho_k)(x) \rightarrow \check{\mathcal{F}}((\sqrt{2\pi})^n \hat{f})(\xi)$$

in norma L^∞ . In definitiva si ha

$$(\sqrt{2\pi})^n f \quad (\text{in } L^1(\mathbb{R}^n)) \quad \leftarrow f * \hat{\rho}_k = (2\pi)^n \check{\mathcal{F}}(\hat{f}\rho_k)(x) \rightarrow (\sqrt{2\pi})^n \check{\mathcal{F}}(\hat{f})(\xi) \quad (\text{in } L^\infty).$$

Passando eventualmente ad una sottosuccessione si trova

$$\check{\mathcal{F}}(\hat{f})(x) = f(x) \quad \text{qo.} \tag{7.21}$$

□

Si noti che se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la formula di inversione fornisce il seguente risultato

$$\mathcal{F}^2(f)(x) = (2\pi)^n f(-x), \tag{7.22}$$

detta spesso *formula di dualità o di reciprocità*.

7.5 Lo spazio di Schwartz

Definizione 7.5.1 *Indichiamo con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni di classe C^∞ rapidamente decrescenti all'infinito. Cioè*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f : (f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}), f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \exists C_{\alpha, \beta} \text{ tale che } |x^\alpha \partial^\beta f| \leq C_{\alpha, \beta}\}. \tag{7.23}$$

Qui α e β sono multiindici. Cioè $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, con $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$ e si intende che $x^\alpha g = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} g$, $\partial^\beta g = \frac{\partial^{|\beta|} g}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$, con $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funzione assegnata. Osserviamo che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ e, inoltre si può osservare che se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è anche $f \in L^\infty$. Infatti, preso preso $|\alpha| = |\beta| = 0$, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è anche $f \in L^\infty$, poiché, per la definizione 7.23, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{R}^n$. Ma è anche $\|x\|^{n+1} f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e quindi, per un'opportuna costante $M' > 0$ si ha che $|f(x)| \leq \frac{M'}{\|x\|^{n+1}}$. In definitiva $|f(x)| \leq g(x)$ dove

$$g(x) = \begin{cases} K & \|x\| \leq 1 \\ \frac{K}{\|x\|^{n+1}} & \|x\| > 1 \end{cases},$$

dove $K = \max\{M, M'\}$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ e quindi $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Lo stesso ragionamento si può fare per ogni derivata e per ogni prodotto di un arbitrario polinomio per ogni ordine di derivata della funzione.

Abbiamo allora il seguente

Teorema 7.5.1 *La trasformazione \mathcal{F} applica $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n)$. Inoltre \mathcal{F} è una biiezione fra i due spazi. (Si può dimostrare di più: \mathcal{F} è un isomorfismo fra i due spazi se a \mathcal{S} si dà la struttura di spazio di Fréchet usando le seminorme $C_{\alpha,\beta}$.)*

Dimostrazione: Non dimostreremo l'affermazione in parentesi perché richiederebbe una digressione di Analisi Funzionali sugli spazi di Fréchet e la nozione di seminorma. Proviamo invece le prime due affermazioni

(1) Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$ e mostriamo che allora $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n)$. Innanzi tutto $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}^\infty$. Infatti $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, come già abbiamo osservato. Allora, utilizzando la proprietà 7.2.7 si ha che $\mathcal{F}(f)$ è derivabile con continuità per ogni α .

Facciamo vedere poi che $\xi^\beta \partial_\xi^\alpha (\mathcal{F}(f))$ è limitato per ogni α e β . Ciò discende dal fatto che $\partial_\xi^\alpha (\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}((ix)^\alpha f(x))(\xi)$ e quindi che $\xi^\beta \partial_\xi^\alpha (\mathcal{F}(f)) = (-i)^{|\beta|} \mathcal{F}(\partial_x^\beta (ix)^\alpha f(x))(\xi)$. Cioè $\xi^\beta \partial_\xi^\alpha (\mathcal{F}(f))$ è la trasformata di Fourier di $(-i)^{|\beta|} (\partial_x^\beta (ix)^\alpha f(x))$ che è una funzione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$ e perciò di $L^1(\mathbb{R}^n)$ e conseguentemente ha trasformata in L^∞ .

(2) La biiettività viene dal teorema di inversione.

Siano $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$ e supponiamo che $\mathcal{F}(f_1) = \mathcal{F}(f_2)$. Ora $\mathcal{F}(f_1) = \mathcal{F}(f_2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n)$ e quindi si ha

$$f_1 = \check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f_1)) = \check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f_2)) = f_2.$$

Cioè la trasformazione \mathcal{F} è iniettiva.

Se poi $g(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n)$, allora $g = \mathcal{F}(\check{\mathcal{F}}(g))$, con $\check{\mathcal{F}}(g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$. Ciò dimostra la suriettività di \mathcal{F} . \square

Osservazione 7.5.1 *Si può osservare che una dimostrazione alternativa della formula di inversione può essere basata sul studio della trasformazione $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$ e sulla dimostrazione diretta che la formula di inversione vale per le funzioni $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$. Si dimostra inoltre che $\mathcal{F}^4 = (2\pi)^{2n} \text{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)}$ (vedi 7.22).*

7.6 Il teorema di Plancherel e la trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$

L'obiettivo è quello di estendere la definizione di \mathcal{F} dalle funzioni in $L^1(\mathbb{R}^n)$ alle funzioni di L^2 . A tale scopo premettiamo il seguente

Lemma 7.6.1 [Lemma di Plancherel] *Siano $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$. Allora*

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2} = (2\pi)^n \langle f, g \rangle_{L^2}. \quad (7.24)$$

Dimostrazione: Ricordiamo che qui $L^2(\mathbb{R}^n)$ è da intendere come spazio delle funzioni a quadrato sommabile definite in \mathbb{R}^n e a valori in \mathbb{C} . Dunque $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx$. Si ha dunque, se poniamo $h(\xi) = \hat{g}(\xi)$ e ricordiamo che $g(x) = \check{\mathcal{F}}(h) = \check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(g))$

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\check{\mathcal{F}}(h)(x)} dx = \int_{\mathbb{R}_x^n} f(x) \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \overline{h(\xi)} d\xi \right) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}_x^n} f(x) \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \overline{h(\xi)} d\xi \right) dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} \overline{h(\xi)} \left(\int_{\mathbb{R}_x^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} \overline{h(\xi)} \mathcal{F}(f)(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} \mathcal{F}(f)(\xi) \overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Questi passaggi sono giustificati dal fatto che, poiché $(x, \xi) \mapsto f(x) \overline{h(\xi)} \in L^1(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$, per Fubini si può scambiare l'ordine di integrazione. \square

Abbiamo ora il seguente

Teorema 7.6.1 [Teorema di Plancherel] *Esiste ed è unica l'applicazione $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}_x^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_\xi^n)$ che estende la trasformata di Fourier definita in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Si ha inoltre, per le funzioni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}^2. \quad (7.25)$$

Dimostrazione: Grazie al risultato del Lemma 7.6.1 otteniamo per $f = g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f, f \rangle_{L^2} = \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}^2.$$

Sappiamo per quanto affermato dal Teorema 5.2.2 che $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ma $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$. Dunque a maggior ragione $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e sia (g_k) una successione di funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ che converge in norma L^2 a f . Questa successione è dunque, in L^2 , una successione di Cauchy in quanto è convergente. Per il risultato 7.25 (le norme di g e di $\mathcal{F}(g)$ differiscono per una costante) anche la successione $(\mathcal{F}(g_k))$ è una successione di Cauchy in L^2 e quindi converge ad una funzione $h \in L^2(\mathbb{R}_\xi^n)$. Definiamo

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = h(\xi) = \lim_{L^2} \mathcal{F}(g_k)(\xi). \quad (7.26)$$

Poiché la definizione è data con convergenza in norma L^2 è chiaro che l'uguaglianza vale qo. Inoltre la definizione non dipende dalla particolare successione, come facilmente si può riconoscere. Inoltre la trasformazione \mathcal{F} così definita è l'unica che estende la trasformata di Fourier definita in \mathcal{S} .

Infine è facile riconoscere che se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ allora la trasformata di Fourier nel senso di L^2 coincide con la trasformata di Fourier nel senso di L^1 .

Infatti, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, si può provare che esiste una successione (g_k) in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ che converge a f sia in L^1 che in L^2 . Allora $\mathcal{F}(g_k) \rightarrow \mathcal{F}_{L^2}(f)$ in L^2 . D'altra parte

$$\|\mathcal{F}(g_k) - \mathcal{F}_{L^1}(f)\|_{L^\infty} \leq \|g_k - f\|_{L^1}$$

e quindi $\mathcal{F}(g_k) \rightarrow \mathcal{F}_{L^1}(f)$ in L^∞ . Ne segue che

$$\mathcal{F}_{L^2}(f) = \mathcal{F}_{L^1}(f) \quad \text{qo.}$$

Infine, nel caso particolare $n = 1$, cioè se $f \in L^2(\mathbb{R})$ vale

$$\mathcal{F}_{L^2}(f) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-m}^m e^{-ix\xi} f(x) dx,$$

dove il limite si intende valere nella norma di $L^2(\mathbb{R}_\xi)$.

Infatti $h_m = \int_{-m}^m e^{-ix\xi} f(x) dx$ è ben definita poiché $f_m(x) = f(x) \cdot \chi_{[-m,m]}(x) \in L^1([-m,m])$ e inoltre è una funzione di $L^2(\mathbb{R}_\xi)$ poiché f e quindi $f_m \in L^2(\mathbb{R}_x)$ e, per il Lemma (7.6.1), vale $\|h_m\|_{L^2}^2 = (2\pi)\|f_m\|_{L^2}^2$. La successione (f_m) tende a f in $L^2(\mathbb{R}_x)$ e quindi, poiché $\|h_m - h_k\|_{L^2}^2 = (2\pi)\|f_m - f_k\|_{L^2}^2$, la successione (h_m) è una successione di Cauchy e perciò convergente in $L^2(\mathbb{R}_\xi)$. Infine prendendo il limite per $m \rightarrow \infty$ di $\|h_m\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}\|f_m\|_{L^2}$ si ha

$$\|h\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2}.$$

Se infine $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ allora (f_m) converge a f anche in norma L^1 e quindi h_m converge a h uniformemente. Ma allora h deve coincidere con \hat{f} . \square

7.7 Una applicazione all'equazione del calore

Si vuole trovare la soluzione del seguente problema ai valori iniziali per l'equazione del calore

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (7.27)$$

dove $u_0(x)$ è una funzione di classe $L^2(\mathbb{R})$. Procederemo per ora in modo formale, supponendo che tutte le operazioni coinvolte siano giustificate.

Se indichiamo con \mathcal{F}_x la trasformata di Fourier rispetto alla x , si ottiene

$$\mathcal{F}_x(\partial_x^2 u(x, t)) = -\xi^2 \mathcal{F}_x(u(x, t))(\xi) = -\xi^2 v(\xi, t).$$

Qui $v(\xi, t) = \mathcal{F}_x(u(x, t))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x, t) dx$.

Analogamente

$$\mathcal{F}_x(\partial_t u(x, t))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx = \frac{\partial v}{\partial t},$$

avendo supposto che l'operatore trasformata di Fourier commuti con la derivata parziale rispetto a t .

Dunque, dall'equazione alle derivate parziali del calore 7.27 si ottiene la seguente equazione differenziale ordinaria per la trasformata di $u(x, t)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \xi^2 v(\xi, t) = 0, \quad (7.28)$$

con la condizione iniziale $v(\xi, 0) = \mathcal{F}_x(u(x, 0))(\xi) = \mathcal{F}_x(u_0(x))(\xi)$. È facile trovare la soluzione di quest'ultima equazione: $v(\xi, t) = v(\xi, 0)e^{-\xi^2 t}$.

La soluzione $u(x, t)$ si trova prendendo l'antitrasformata di $v(\xi, t)$.

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{F}}(v(\xi, t))(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} v(\xi, 0) e^{-\xi^2 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} u_0(y) dy \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(y-x)\xi} e^{-\xi^2 t} d\xi \right) u_0(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}} u_0(y) dy. \end{aligned}$$

Infatti $\int_{\mathbb{R}} e^{-i(y-x)\xi} e^{-\xi^2 t} d\xi$ è la trasformata di Fourier di $e^{-\xi^2 t}$ calcolata in $y-x$, ossia $\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}$.

Dunque la soluzione di 7.27 è

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}} u_0(y) dy. \quad (7.29)$$

7.8 Distribuzioni temperate e loro trasformate

Abbiamo già introdotto lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Introduciamo in questo spazio la nozione di convergenza di una successione di funzioni.

Definizione 7.8.1 Siano (v_k) una successione e v una funzione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Diremo che v_k converge a v nel senso di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se per ogni coppia di multiindici α, β la successione $k \mapsto x^\alpha \partial^\beta (v_k - v)$ tende uniformemente a 0 su \mathbb{R}^n . Cioè se

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^\alpha \partial^\beta (v_k - v)\|_{L^\infty} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta (v_k - v)| \right) = 0. \quad (7.30)$$

Si noti che se una successione di funzioni in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ converge nel senso di \mathcal{D} , a maggiore ragione converge nel senso di \mathcal{S} . Dunque non solo $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è sottospazio di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ma la convergenza nel senso di \mathcal{D} implica la convergenza nel senso di \mathcal{S} . Tuttavia, è facile dare un esempio di successione convergente in \mathcal{S} ma non in \mathcal{D} . Infatti, se

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

allora $v_k(x) = \frac{\phi(\frac{x}{k})}{2^k}$ non converge a 0 in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ poiché i supporti delle funzioni della successione non sono tutti contenuti nello stesso compatto; si ha infatti $\text{supp } v_k = [-k, k]$. Tuttavia converge a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Infatti

$$x^m D^n v_k(x) = \frac{x^m}{2^k k^n} \phi^{(n)}\left(\frac{x}{k}\right)$$

e quindi

$$\|x^m D^n v_k(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{x \in [-k, k]} \left| \frac{x^m}{2^k k^n} \phi^{(n)}\left(\frac{x}{k}\right) \right| = \frac{k^{m-n}}{2^k} \|\phi^{(n)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow 0$$

per $k \rightarrow \infty$.

Definizione 7.8.2 Si dice distribuzione temperata su \mathbb{R}^n ogni funzionale lineare $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ che sia anche continuo nel senso di \mathcal{S} , ossia

$$(v_k \rightarrow v) \text{ (in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \Rightarrow (\langle u, v_k \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle).$$

L'insieme delle distribuzioni temperate si indica con $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ogni distribuzione temperata è una distribuzione, ma non vale il viceversa. La distribuzione $\delta(x)$ di Dirac è una distribuzione temperata. Infatti se $v_k \rightarrow_{\mathcal{S}} v$, in particolare, $v_k \rightarrow_{\text{unif}} v$. Inoltre δ ha supporto compatto e quindi $\langle \delta, v_k \rangle = v_k(0) \rightarrow v(0) = \langle \delta, v \rangle$.

Ci si può chiedere quando una funzione $u \in L^1_{\text{loc}}$ è una distribuzione temperata. Ciò accade se la funzione non cresce troppo rapidamente all'infinito. Per esempio

Esempio 7.8.1 La funzione e^x non è una distribuzione temperata su \mathbb{R} .

Dimostrazione: Sia $\phi(x)$ una funzione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ che vale identicamente 1 sull'intervallo $[0, 1]$ e sia $v_k(x) = \frac{\phi(\frac{x}{k})}{2^k} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Allora

$$\langle \text{exp}, v_k \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^x v_k(x) dx > \frac{1}{2^k} \int_0^k e^x dx = \frac{1}{2^k} (e^k - 1) \rightarrow +\infty$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Dunque, benché $v_k \rightarrow_S 0$, $\langle \exp, v_k \rangle \not\rightarrow 0$. \square

Invece, una classe di funzioni che dà luogo a distribuzioni temperate è la classe detta delle *funzioni a crescita lenta*. Sono funzioni del tipo $f(x) = p(x) \cdot h(x)$ dove $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Infatti, se $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, anche $p(x)v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e dunque

$$\langle f, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)p(x)v(x) dx = \langle h, p \cdot v \rangle$$

è ben definito.

Si può facilmente verificare con calcoli analoghi a quelli fatti per il Lemma 7.6.1 che vale

Lemma 7.8.1 *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) dx. \quad (7.31)$$

Dimostrazione: Infatti

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} f(y) dy \right) g(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} g(x) dx \right) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\hat{g}(y) dy. \end{aligned}$$

Lo scambio nell'ordine di integrazione è giustificato dal fatto che $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e che quindi $\hat{f}, \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. \square

Se $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, anche $\hat{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\langle \hat{f}, v \rangle = \langle f, \hat{v} \rangle$. Questa osservazione ci induce a dare la seguente

Definizione 7.8.3 *Sia $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, cioè sia una distribuzione temperata. Definiamo la trasformata di Fourier di f grazie alla seguente identità*

$$\langle \hat{f}, v \rangle := \langle f, \hat{v} \rangle \quad \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (7.32)$$

Diamo ora alcuni esempi

Esempio 7.8.2 *Si calcoli la trasformata di Fourier di $\delta(x)$.*

Svolgimento: Si ha

$$\langle \hat{\delta}, v \rangle = \langle \delta, \hat{v} \rangle = \hat{v}(0) = \int_{\mathbb{R}} v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot v(x) dx.$$

Dunque

$$\hat{\delta} = 1. \quad (7.33)$$

□

Analogamente, dopo avere osservato che la distribuzione 1 è una distribuzione temperata (infatti, per ogni $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ è definito il valore $\langle 1, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} v(x) dx$) si consideri il seguente

Esempio 7.8.3 *Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione costante 1.*

Svolgimento: Si ha

$$\langle \hat{1}, v \rangle = \langle 1, \hat{v} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{v}(x) dx = \hat{v}(0) = (2\pi)v(0).$$

L'ultimo passaggio si giustifica ricordando la formula di dualità 7.22 e che, ovviamente $-0 = 0$.
Dunque

$$\hat{1} = 2\pi\delta(x) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7.34)$$

□

Esercizio 7.8.1 *Si verifichi che il prodotto della funzione x per la distribuzione $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ è la costante 1 in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione: Infatti

$$\langle x \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x}, v \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x|} x \cdot \frac{1}{x} v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot v(x) dx = \langle 1, v \rangle.$$

□

Si consideri allora il seguente

Esempio 7.8.4 *Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione $\mathcal{P} \frac{1}{x}$.*

Svolgimento: Poiché $x\mathcal{P} \frac{1}{x} = 1$ la sua trasformata di Fourier è $2\pi\delta(\xi)$. D'altra parte $\mathcal{F}(x\mathcal{P} \frac{1}{x}) = i(\mathcal{F}(\mathcal{P} \frac{1}{x}))'(\xi)$. Dunque

$$\left(\mathcal{F}(\mathcal{P} \frac{1}{x}) \right)'(\xi) = \frac{2\pi}{i} \delta(\xi). \quad (7.35)$$

Abbiamo già calcolato che se $H(x)$ è la distribuzione di Heaviside su \mathbb{R} , allora $H'(x) = \delta(x)$. Poiché $\text{sign}(x) = H(x) - H(-x)$, allora come facilmente si vede $(\text{sign}(x))' = 2\delta(x)$. Dimostriamo inoltre

che se una distribuzione su \mathbb{R} ha derivata nulla, allora essa è una costante. Poiché consideriamo le distribuzioni e non le funzioni derivabili, la dimostrazione di questo fatto è un po' più laboriosa. Sia dunque u una distribuzione (anche temperata) tale che $u' = 0$, ossia tale che per ogni $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sia $\langle u', v \rangle = 0$. Ma $0 = \langle u', v \rangle = -\langle u, v' \rangle$. Ora v' è ancora una funzione test, cioè sta in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ma ha integrale nullo. Se poi $w(x)$ è un'arbitraria funzione test con integrale nullo, allora $v(x) = \int_{-\infty}^x w(t) dt$ è una funzione test che è la derivata di una funzione test con integrale nullo. Sia ora v_0 una funzione test che ha integrale 1, e si ponga $k = \langle u, v_0 \rangle$. Sia $v(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ arbitraria, allora $w(x) = v(x) - cv_0(x)$ ha integrale nullo se e solo se $c = \int_{\mathbb{R}} v(x) dx$. Poiché w ha integrale nullo, si ha $\langle u, w \rangle = 0 = \langle u, v \rangle - c\langle u, v_0 \rangle = \langle u, v \rangle - k \int_{\mathbb{R}} v(x) dx$. Cioè

$$\langle u, v \rangle = k \int_{\mathbb{R}} v(x) dx = \langle u, v_0 \rangle \cdot \int_{\mathbb{R}} v(x) dx = \text{costante}.$$

Raccogliendo le osservazioni fatte sopra, riconosciamo che la più generale distribuzione che ha come derivata $2\delta(x)$ è la distribuzione $\text{sign}(\xi) + c$. Nel caso della distribuzione $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ si sa che essa è dispari, dunque $c = 0$. Poiché $\left(\mathcal{F}\left(\mathcal{P} \frac{1}{x}\right)\right)'(\xi) = \frac{2\pi}{i}\delta(\xi)$, possiamo allora concludere che

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{P} \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{i} \text{sign}(x). \quad (7.36)$$

□

Ricordiamo infine che tutte le proprietà dimostrate per le distribuzioni, valgono anche per le distribuzioni temperate.

7.9 Interpolazione trigonometrica

Consideriamo polinomi trigonometrici del tipo

$$T_n(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + \dots + c_{n-1} e^{i(n-1)x}.$$

Si tratta di funzioni periodiche definite su \mathbb{R} a valori in \mathbb{C} che hanno periodo 2π .

Teorema 7.9.1 *Esiste uno ed un solo polinomio trigonometrico $T_n(x)$ che nei punti equidistanti $x_k = \frac{2\pi k}{n}$ assume valori assegnati y_k , con $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.*

Dimostrazione: Posto $\omega = \omega_1 = e^{ix_1}$ e, in generale, $\omega_k = e^{ix_k} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, il sistema di n equazioni in n incognite

$$y_k = T_n(x_k) = c_0 + c_1 \omega_k + c_2 \omega_k^2 + \dots + c_{n-1} \omega_k^{(n-1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (7.37)$$

ha una ed una sola soluzione. Infatti il determinante del sistema lineare è quello di Vandermonde

$$V(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{(n-1)}) = \begin{vmatrix} 1 & \omega_0 & \dots & \omega_0^{(n-1)} \\ 1 & \omega_1 & \dots & \omega_1^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{(n-1)} & \dots & \omega_{(n-1)}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (7.38)$$

Il determinante è non nullo perché si può dimostrare che

$$V(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{(n-1)}) = \prod_{0 \leq k < m \leq (n-1)} (\omega_m - \omega_k), \quad (7.39)$$

e $\omega_m \neq \omega_k$ se $m \neq k$.

Si osservi che, per la periodicità di e^{ix} , $\omega_{(n-k)} = e^{i\frac{2\pi(n-k)}{n}} = e^{-i\frac{2\pi k}{n}} = \omega_{-k}$. Allora se $n = 2m + 1$, le uguaglianze 7.37 si possono scrivere equivalentemente come segue

$$y_k = \sum_{h=-m}^m c_h \omega_k^h = \sum_{h=0}^{(n-1)} c_h \omega_k^h,$$

se si definisce per periodicità $c_{n-k} = c_{-k}$ e $y_{n-k} = y_{-k}$. Usando questa convenzione, potremo scrivere il polinomio trigonometrico nella forma

$$T_n(x) = \sum_{j=-m}^m c_j e^{ijx}, \quad n = 2m + 1.$$

Si ricordi che ω_k è una radice n -esima dell'unità in \mathbb{C} , cioè una soluzione dell'equazione

$$\omega^n = 1.$$

È pure ovvio che $\omega_k^h = \omega_h^k$, che $\overline{\omega_k^h} = \omega_k^{-h}$ e che $\omega_h \cdot \omega_{-k} = \omega_{h-k}$ è ancora una radice dell'unità. Ora $\omega^n - 1 = (\omega - 1) \cdot \sum_{h=0}^{(n-1)} \omega^h$ e se ω_k è una radice dell'unità $\neq 1$ sarà

$$\sum_{h=0}^{(n-1)} \omega_k^h = 0 \quad (k \neq 0) \quad \text{ossia} \quad \sum_{h=-m}^m \omega_k^h = 0 \quad (k \neq 0) \quad n = 2m + 1. \quad (7.40)$$

In \mathbb{C}^n introduciamo il prodotto scalare $\langle u, v \rangle = \sum_{h=0}^{(n-1)} u_h \overline{v_h}$ se $u = (u_0, u_1, \dots, u_{(n-1)})$ e $v = (v_0, v_1, \dots, v_{(n-1)})$.

Consideriamo ora i vettori $w_k = (1, \omega_k, \omega_k^2, \dots, \omega_k^{(n-1)})$; si ha

$$\langle w_k, w_r \rangle = \sum_{h=0}^{(n-1)} \omega_k^h \cdot \overline{\omega_r^h} = \sum_{h=0}^{(n-1)} \omega_k^h \cdot \omega_{-r}^h = \sum_{h=0}^{(n-1)} \omega_h^{k-r} \sum_{h=0}^{(n-1)} \omega_k^h = \delta_{kr} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq r \\ n & \text{se } k = r \end{cases}. \quad (7.41)$$

Infatti se $k \neq r$ vale l'equazione 7.40, mentre se $k = r$, poiché $\omega_0 = 1$, si ha $\sum_{h=0}^{(n-1)} 1 = n$.

Ora, la k -esima equazione del sistema 7.37 si scrive

$$y_k = \sum_{h=0}^{(n-1)} c_h \omega_k^h.$$

Moltiplicando ogni equazione per $\overline{\omega_k^s}$ e sommando su k da 0 a $(n-1)$ si trova

$$\sum_{k=0}^{(n-1)} y_k \overline{\omega_k^s} = \sum_{k=0}^{(n-1)} \sum_{h=0}^{(n-1)} c_h \omega_k^h \omega_k^{-s} = \sum_{h=0}^{(n-1)} c_h \sum_{k=0}^{(n-1)} \omega_{h-s}^k = \sum_{h=0}^{(n-1)} c_h n \cdot \delta_{h,s} = n \cdot c_s.$$

Dunque

$$c_s = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{(n-1)} y_k \omega_k^{-s} = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-m}^m y_k \omega_k^{-s}. \quad (7.42)$$

L'equazione 7.42 viene detta talvolta la *trasformata discreta di Fourier* mentre il problema inverso, quello di valutare

$$y_k = \sum_{h=0}^{(n-1)} c_h e^{ihx_k} \quad k = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (7.43)$$

si dice la *sintesi di Fourier discreta*. Tale operazione corrisponde alla antitrasformata di Fourier.

7.10 Le “Fast Fourier Transforms” (FFT)

Il calcolo di 7.42 e di 7.43 richiede n moltiplicazioni ed $(n-1)$ addizioni (se si suppone di conoscere tutte le potenze di ω_k^h con $k, h = 0, 1, \dots, (n-1)$). Ciò richiede n^2 operazioni (considerando come operazione la coppia di una moltiplicazione ed una addizione). Tale compito è, in generale, molto oneroso, anche per i calcolatori più veloci, se n è molto grande. Daremo di seguito un cenno di un metodo detto appunto FFT (cioè delle trasformate di Fourier rapide) dovuto in linea di principio a Cooley e Tukey (1965).³

Teorema 7.10.1 *Esiste un algoritmo (detto FFT) per mezzo del quale le trasformate e antitrasformate di Fourier discrete si possono calcolare per mezzo di $2n \log_2(n)$ operazioni.*

Dimostrazione: Consideriamo $n = 2^t$. Poiché dobbiamo valutare somme del tipo

$$c_s = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{(n-1)} y_k e^{-i \frac{2\pi ks}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{(n-1)} y_k \omega^{sk} \quad \text{con } \omega = e^{-i \frac{2\pi}{n}},$$

scriveremo s e k in base 2:

³J.W. Cooley and J.W. Tukey: “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series”, *Math. Comp.*, 19 (1965), 297 – 301. M.T. Heideman, D.H. Johnson e C.S. Burrus nel loro affascinante articolo (“Gauss and the history of the fast Fourier transform”, *IEEE ASSP Magazine*, October (1984), 14 –21) mettono in evidenza che già Gauss aveva una forma generale di FFT fin dal 1805; i suoi risultati furono pubblicati postumi nel 1866. I primi risultati pubblicati si debbono a Francesco Carlini (1828), un astronomo dell’osservatorio di Brera a Milano, nella sua ricerca sulle variazioni barometriche orarie.

$$s = s_0 + s_1 \cdot 2 + s_2 \cdot 2^2 + \dots + s_{t-1} \cdot 2^{t-1}, s_h \in \{0, 1\} \text{ e}$$

$$k = k_{t-1} + k_{t-2} \cdot 2 + k_{t-3} \cdot 2^2 + \dots + k_0 \cdot 2^{t-1}, k_h \in \{0, 1\}.$$

Allora si ottiene la seguente nuova espressione per c_s

$$c_s = \frac{1}{2^t} \left\{ \sum_{k_{t-1}=0}^1 \left[\dots \left(\sum_{k_1=0}^1 \left(\sum_{k_0=0}^1 y_k \omega^{k_0 s \cdot 2^{t-1}} \right) \omega^{k_1 s \cdot 2^{t-2}} \right) \dots \right] \omega^{k_{t-1} s} \right\}.$$

Ma

$$\omega^{s k_0 2^{t-1}} = \omega^{(s_0 + s_1 \cdot 2 + s_2 \cdot 2^2 + \dots + s_{t-1} \cdot 2^{t-1}, s_h) k_0 2^{t-1}} = \omega^{s_0 k_0 2^{t-1}}$$

$$\omega^{s k_1 2^{t-2}} = \omega^{(s_0 + s_1 \cdot 2 + s_2 \cdot 2^2 + \dots + s_{t-1} \cdot 2^{t-1}, s_h) k_1 2^{t-2}} = \omega^{s_0 k_1 2^{t-2} + s_1 k_1 2^{t-1}}$$

⋮

$$\omega^{s k_{t-1}} = \omega^{(s_0 + s_1 \cdot 2 + s_2 \cdot 2^2 + \dots + s_{t-1} \cdot 2^{t-1}, s_h) k_{t-1}} = \omega^{s_0 k_{t-1} + s_1 k_{t-1} 2 + \dots + s_{t-1} k_{t-1} 2^{t-1}}$$

Dunque si ha

$$c_s = \frac{1}{2^t} \left\{ \sum_{k_{t-1}=0}^1 \left[\dots \left(\sum_{k_1=0}^1 \left(\sum_{k_0=0}^1 y_k \omega^{k_0 s_0 2^{t-1}} \right) \omega^{k_1 (s_0 + s_1 2) 2^{t-2}} \right) \dots \right] \omega^{k_{t-1} (s_0 + s_1 \cdot 2 + s_2 \cdot 2^2 + \dots + s_{t-1} 2^{t-1})} \right\} \quad (7.44)$$

La valutazione di c_s richiederebbe ancora n^2 operazioni, ma la rappresentazione 7.44 ci consente di organizzare il calcolo in modo da ridurre il numero complessivo di operazioni a $2nt = 2n \log_2 n$.

Precisamente, si ponga

$$S_1(s_0, k_1, \dots, k_{t-1}) = \sum_{k_0=0}^1 y_k(k_0, k_1, \dots, k_{t-1}) \cdot \omega^{s_0 k_0 2^{t-1}}, s_0 \in \{0, 1\}, k_r \in \{0, 1\}, r = 1, \dots, t-1$$

$$S_2(s_0, s_1, \dots, k_{t-1}) = \sum_{k_1=0}^1 S_1(s_0, k_1, \dots, k_{t-1}) \cdot \omega^{(s_0 + s_1 2) k_1 2^{t-2}}, s_p \in \{0, 1\}, p = 0, 1; k_r \in \{0, 1\}, r = 2, \dots, t-1$$

⋮

$$S_t(s_0, s_1, \dots, s_{t-1}) = \sum_{k_{t-1}=0}^1 S_{t-1}(s_0, k_1, \dots, s_{t-2}, k_{t-1}) \cdot \omega^{(s_0 + s_1 2 + \dots + s_{t-1} 2^{t-1}) k_{t-1}}, s_p \in \{0, 1\}, p = 0, 1, \dots, t-1.$$

Supponendo di disporre già calcolate tutte le potenze di ω^q , $q = 0, 1, \dots, n-1$, il calcolo di ciascuna delle S_m , $m = 1, \dots, t$, richiede $2n$ operazioni e questo si deve ripetere per t volte. In totale servono $2nt = 2n \log_2 n$ operazioni. \square

Capitolo 8

La trasformata di Laplace.

8.1 Il dominio del tempo e il dominio della frequenza.

Una tecnica ben nota per risolvere un'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine n del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

consiste nel considerare l'equazione caratteristica associata

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

e trovare tutti i suoi zeri complessi. Ad ogni radice dell'equazione si fa poi corrispondere una soluzione dell'equazione differenziale di partenza e questo permette di ottenere una base per lo spazio delle soluzioni. Dunque un problema differenziale viene tradotto in un problema squisitamente algebrico e la soluzione ottenuta per via algebrica viene successivamente riconvertita nella soluzione del problema originario. ¹

Il passaggio dal problema differenziale a quello algebrico è una trasformazione, cioè un operatore che trasforma equazioni differenziali in equazioni algebriche, incognite funzionali in incognite numeriche, operazioni di derivazione e integrazione in operazioni algebriche.

Prendendo a prestito la terminologia usata nello studio delle reti elettriche diremo di trovarci nel dominio del tempo (dominio t) quando abbiamo a che fare con il problema originale; le nostre funzioni avranno in genere variabile indipendente t e si indicheranno con lettere minuscole del tipo $f(t)$. Diremo invece di trovarci nel dominio della frequenza (dominio s) quando abbiamo a che fare con il problema trasformato; le nostre funzioni avranno in genere variabile indipendente s e si indicheranno con lettere maiuscole del tipo $F(s)$. L'operatore di trasformazione permette di passare dal dominio t al dominio s .

¹Le note di questo capitolo sono state redatte dal Prof. Franco Obersnel, utilizzando in parte appunti dell'autore.

Una volta in possesso della soluzione del problema trasformato sarà poi necessario ritornare alla soluzione originaria mediante l'operazione inversa a quella di trasformazione: l'antitrasformazione. Questa sarà un nuovo operatore che permette di passare dal dominio della frequenza al dominio del tempo.

8.2 Funzioni trasformabili e il dominio della trasformata.

Per evitare complicazioni dovute all'esistenza di funzioni patologiche (quali ad esempio la funzione di Dirichlet: $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ altrimenti), tutte le funzioni che prenderemo in considerazione si supporranno localmente integrabili su \mathbb{R} . Gli integrali considerati si intendono secondo Riemann.

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione tale che $f(t) = 0$ per ogni $t < 0$. Sia $s \in \mathbb{C}$. Diremo *integrale di Laplace* l'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t) dt. \quad (8.1)$$

Sia $A \subset \mathbb{C}$ l'insieme dei numeri s per i quali l'integrale $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ converge. Si può allora definire una funzione $F: A \rightarrow \mathbb{C}$ ponendo $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$; tale funzione F si dice la *trasformata di Laplace* della funzione f .

La relazione $f \mapsto F$ definisce un operatore \mathcal{L} definito sull'insieme delle funzioni che ammettono trasformata e a valori in un insieme di funzioni definite su sottoinsiemi di \mathbb{C} . Si usa scrivere $\mathcal{L}\{f\} = F$.

È semplice verificare che \mathcal{L} è lineare, cioè che $\mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\}$.

Esempio 8.2.1 Consideriamo la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ e^{t^2} & \text{se } t \geq 0 \end{cases} .$$

L'integrale di Laplace di f diverge per ogni s , dunque non esiste la trasformata di tale funzione.

Esempio 8.2.2 Consideriamo ora la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ e^{\alpha t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases} .$$

Si ha $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{s-\alpha}$ se $\Re(s) > \alpha$ mentre non è definita se $\Re(s) \leq \alpha$.

Esempio 8.2.3 Consideriamo infine la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ e^{-t^2} & \text{se } t \geq 0 \end{cases} .$$

Si ha $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-t^2} dt$, convergente per ogni s .

Dagli esempi visti si osserva che non tutte le funzioni ammettono la trasformata di Laplace e che in generale la trasformata, se esiste, può non essere definita su tutto \mathbb{C} . Diremo che una funzione f è *trasformabile* se ammette la trasformata in almeno un punto $s \in \mathbb{C}$.

Esempi importanti di funzioni trasformabili sono le funzioni di ordine esponenziale, cioè funzioni f tali che esiste una costante $\beta \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $|f(t)|e^{-\beta t}$ sia limitata in \mathbb{R} . Infatti, sia f di ordine esponenziale e sia $|f(t)|e^{-\beta t} \leq M$; si ha

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^\infty e^{-(\Re(s)-\beta)t} \cdot e^{-\beta t} |f(t)| dt \leq M \int_0^\infty e^{-(\Re(s)-\beta)t} dt$$

e l'ultimo integrale converge per $\Re(s) > \beta$. Dunque la funzione $e^{-st} f(t)$ non solo è integrabile su $[0, +\infty)$ ma è ivi addirittura assolutamente integrabile.

Si noti però che esistono anche funzioni trasformabili che non sono di ordine esponenziale. Un esempio è la funzione $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Questa funzione non è di ordine esponenziale perché è illimitata in 0, la funzione è però trasformabile perché l'ordine di infinito nell'origine è $\frac{1}{2}$ (si veda l'esempio 8.5.4).

Avvertiamo il lettore che alcuni autori considerano di ordine esponenziale le funzioni che verificano una disuguaglianza del tipo $|f(t)|e^{-\beta t} \leq M$ non necessariamente per tutti i $t \in \mathbb{R}^+$, ma soltanto per ogni $t > t_0$ dove t_0 è un numero reale fissato. Secondo questa definizione la funzione $\frac{1}{\sqrt{t}}$ risulta essere di ordine esponenziale, ma risulta esserlo anche la funzione $\frac{1}{t}$ che non è trasformabile.

Il teorema seguente mostra che se una funzione è trasformabile, il dominio della trasformata è un semipiano di \mathbb{C} .

Teorema 8.2.1 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = 0$ per ogni $t < 0$; supponiamo definita $F(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t) dt$ per qualche $s_0 \in \mathbb{C}$. Allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > \Re(s_0)$ la funzione $F(s)$ è definita.

Dimostrazione. Poniamo $s = s_0 + q$ con $\Re(q) > 0$.

Sia $\phi(t) := \int_0^t e^{-s_0 u} f(u) du$. Si ha allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = F(s_0). \quad (8.2)$$

Integrando per parti si ottiene la catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} f(t) dt &= \int_0^T e^{-qt} [e^{-s_0 t} f(t)] dt = \left[e^{-qt} \int_0^t e^{-s_0 u} f(u) du \right]_0^T + \\ &\quad - \int_0^T (-q) e^{-qt} \phi(t) dt = e^{-qT} \phi(T) + q \int_0^T e^{-qt} \phi(t) dt \end{aligned}$$

e prendendo il limite per $T \rightarrow +\infty$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-qT} \phi(T) + \lim_{T \rightarrow +\infty} q \int_0^T e^{-qt} \phi(t) dt.$$

Il primo addendo del secondo membro è 0 per la 8.2, il secondo addendo converge perché la $\phi(t)$ è limitata e quindi $|e^{-qt} \phi(t)| \leq M e^{-\Re(q)t}$ dove M è una limitazione per $\phi(t)$. Si ottiene in definitiva $F(s) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} \phi(t) dt$. \square

Poniamo $A = \{s \in \mathbb{C} : F(s) \text{ è definita} \}$.

Sia $\lambda_0 = \inf\{\Re(s) : s \in A\}$. Per ogni $s \in \mathbb{C}$ si ha che, se $\Re(s) < \lambda_0$ allora $s \notin A$; se $\Re(s) > \lambda_0$ allora $s \in A$. Nulla si può dire in generale per gli $s \in \mathbb{C}$ tali che $\Re(s) = \lambda_0$.

Diremo *ascissa di convergenza* il numero reale λ_0 .

Diremo *semipiano di convergenza* l'insieme $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \lambda_0\}$.

Diremo infine *retta di convergenza* la retta $\Re(s) = \lambda_0$.

Nell'esempio 8.2.1 è $\lambda_0 = +\infty$, il semipiano di convergenza è l'insieme vuoto e la retta di convergenza non è definita.

Nell'esempio 8.2.2 è $\lambda_0 = \alpha$, il semipiano di convergenza è il semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \alpha\}$ e la retta di convergenza è la retta di equazione $\Re(s) = \alpha$.

Nell'esempio 8.2.3 è $\lambda_0 = -\infty$, il semipiano di convergenza è tutto il piano \mathbb{C} e la retta di convergenza non è definita.

8.3 Una nota sulla convergenza assoluta.

Alcuni autori richiedono che nell'integrale 8.1 vi sia non solo la convergenza ma anche la convergenza assoluta. Nella definizione data l'integrale considerato è l'integrale di Riemann, perciò possono esistere funzioni $g(t)$ integrabili su $[0, +\infty)$ non assolutamente integrabili. Un esempio è la funzione $g(t) = \frac{1}{t} \sin t$. Se nella definizione di trasformata si utilizza l'integrale di Lebesgue la questione

invece non si pone, poiché in questo caso una funzione $g(t)$ risulta integrabile su $[0, +\infty)$ se e solo se è assolutamente integrabile.

Per questo motivo alcuni autori accettano come trasformabili soltanto funzioni f tali che $|f|$ sia trasformabile. Nella definizione data in questo testo invece distinguiamo tra convergenza e assoluta convergenza. In particolare si può definire l'ascissa di convergenza assoluta λ_0^{ass} come $\lambda_0^{\text{ass}} = \inf\{\Re(s) : F(s) \text{ è definita e assolutamente convergente}\}$.

Si ha sempre $\lambda_0 \leq \lambda_0^{\text{ass}}$, può però accadere $\lambda_0 < \lambda_0^{\text{ass}}$.

Esempio 8.3.1 Si consideri la funzione $f(t) = e^{kt} \sin e^{kt}$ con $k > 0$. Si ha in questo caso $\lambda_0^{\text{ass}} = k$ mentre $\lambda_0 = 0$.

Studiamo la convergenza assoluta di

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{kt} \sin e^{kt} dt;$$

poiché

$$|e^{(k-s)t} \sin e^{kt}| \leq e^{(k-s)t}$$

c'è convergenza assoluta per $\Re(s) > k$. D'altra parte se $s = k$ si ottiene

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st} e^{kt} \sin e^{kt}| dt = \int_0^{+\infty} |\sin e^{kt}| dt$$

e non c'è convergenza. Questo mostra che $\lambda_0^{\text{ass}} = k$.

Studiamo ora la convergenza semplice.

L'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{kt} \sin e^{kt} dt$$

diventa, mediante la sostituzione $u = e^{kt}$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{u^{-\frac{s}{k}}}{k} \sin u du = \frac{1}{k} \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{\frac{s}{k}}} du$$

e l'ultimo integrale converge se $\Re(\frac{s}{k}) > 0$ ossia per $\Re(s) > 0$. Dunque $\lambda_0 = 0$.

Può addirittura capitare $\lambda_0 = 0$ mentre $\lambda_0^{\text{ass}} = +\infty$.

Esempio 8.3.2 Si consideri la funzione $f(t) = 2te^{t^2} \cos e^{t^2}$. Si ha $\lambda_0 = 0$ mentre $\lambda_0^{\text{ass}} = +\infty$.

Tale funzione non è assolutamente trasformabile. Infatti, fissato qualsiasi $s \in \mathbb{R}$, per ogni $t > s$, si ha

$$e^{-st} 2te^{t^2} |\cos e^{t^2}| \geq |\cos e^{t^2}|$$

e la funzione $|\cos e^{t^2}|$ non è integrabile su $[0, +\infty)$.

D'altra parte mediante integrazione per parti si può verificare facilmente che la trasformata $\mathcal{L}f$ è definita per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 0$. Infatti

$$\int_0^\tau e^{-st} e^{t^2} 2t \cos e^{t^2} dt = \left[e^{-st} \sin(e^{t^2}) \right]_0^\tau + s \int_0^\tau e^{-st} \sin(e^{t^2}) dt.$$

L'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(e^{t^2}) dt$ converge per ogni s tale che $\Re(s) > 0$ perché la funzione $\sin(e^{t^2})$ è limitata e quindi la trasformata $\mathcal{L}f$ è definita per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(s) > 0$. Si osservi che tutte le funzioni di ordine esponenziale sono assolutamente trasformabili.

8.4 Proprietà delle trasformate.

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sia $f : [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione localmente integrabile rispetto alla variabile $t \in [0, +\infty)$. Si dice che l'integrale $\int_0^{+\infty} f(t, s) dt$ converge uniformemente rispetto ad s se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\tau_0 > 0$ tale che per ogni $\tau > \tau_0$ e per ogni $s \in \Omega$ si ha $\left| \int_\tau^{+\infty} f(t, s) dt \right| < \varepsilon$.

Siano $z_0 \in \mathbb{C}$ e $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$; diremo *dominio angolare* un insieme del tipo $D(z_0, \vartheta) = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq \Re(z_0), |\arg(z - z_0)| < \vartheta\}$.

Vale il seguente teorema, di cui non diamo la dimostrazione.

Teorema 8.4.1 *Sia f una funzione trasformabile e sia λ_0 la sua ascissa di convergenza. Allora l'integrale di Laplace $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ converge uniformemente in ogni dominio angolare $D(s_0, \vartheta)$ con $\Re(s_0) > \lambda_0$ e $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$.*

Dimostriamo invece il seguente

Teorema 8.4.2 *Sia f una funzione di ordine esponenziale, con $M \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $|f(t)| \leq Me^{\beta t}$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$. Allora per ogni $\eta > 0$ l'integrale di Laplace $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ converge uniformemente nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq \beta + \eta\}$.*

Dimostrazione. Sia $|f(t)| \leq Me^{\beta t}$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$. Sia $\beta_0 = \beta + \eta$. Sia $s \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(s) \geq \beta_0$. Allora

$$\left| \int_{\tau_0}^\tau e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_{\tau_0}^\tau e^{-\beta_0 t} |f(t)| dt \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq M \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-(\beta_0-\beta)t} dt = \frac{M}{-\eta} [e^{-\eta t}]_{\tau_0}^{\tau} = \\ &= \frac{M}{\eta} e^{-\eta\tau_0} - \frac{M}{\eta} e^{-\eta\tau}. \end{aligned}$$

Prendendo il limite per $\tau \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$\left| \int_{\tau_0}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \frac{M}{\eta} e^{-\eta\tau_0}.$$

Fissato $\epsilon > 0$ si può prendere τ_0 , indipendente da s , tale che $\frac{M}{\eta} e^{-\eta\tau_0} < \epsilon$. \square

Come conseguenza del teorema 8.4.1 proviamo il seguente importante

Teorema 8.4.3 *Sia f una funzione trasformabile e sia λ_0 la sua ascissa di convergenza. Sia $\bar{A} = A \cup \Gamma$ (dove Γ è la frontiera di A) una regione compatta contenuta in un dominio angolare, come nel precedente Teorema 8.4.1, oppure sia f di ordine esponenziale e \bar{A} sia contenuto nel semipiano di convergenza della f . Allora la funzione trasformata $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ è analitica in tale regione.*

Dimostrazione. Una regione come quella delle ipotesi è contenuta in un opportuno dominio angolare oppure in un semipiano del tipo $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq \lambda_0 + \eta\}$. Sappiamo quindi che l'integrale di Laplace converge uniformemente nella regione.

Osserviamo che per la funzione $\Psi_T(s) := \int_0^T e^{-st} f(t) dt$ valgono le condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \Psi_T}{\partial x} = -i \frac{\partial \Psi_T}{\partial y}$$

dove $s = x + iy$. Infatti

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^T e^{(-x-iy)t} f(t) dt = - \int_0^T t e^{-st} f(t) dt$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^T e^{(-x-iy)t} f(t) dt = -i \int_0^T t e^{-st} f(t) dt.$$

Inoltre la funzione ha parti reale e immaginaria differenziabili, perciò si conclude che Ψ_T è analitica. Grazie alla convergenza uniforme in A si ottiene che pure il limite $\lim_{T \rightarrow +\infty} \Psi_T$ è una funzione analitica. \square

La funzione trasformata è pertanto derivabile infinite volte. Calcoliamo ora esplicitamente le derivate. Grazie alla convergenza uniforme si può portare il segno di derivazione all'interno dell'integrale. Si può quindi scrivere

$$\frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = - \int_0^{+\infty} t e^{-st} f(t) dt.$$

Cioè si ottiene $F'(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$.

Grazie alla convergenza uniforme dell'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}t^k f(t)dt$ in modo analogo si ottiene la formula per la derivata di ordine k della F :

$$\frac{d^k}{ds^k} F(s) = (-1)^k \mathcal{L}\{t^k f(t)\}. \quad (8.3)$$

Si è dunque visto che ogni funzione trasformata è analitica e ogni sua derivata è anch'essa una trasformata. In particolare si osservi che un'operazione differenziale nel dominio della frequenza corrisponde ad un'operazione algebrica nel dominio del tempo. Questa è una situazione tipica nelle trasformate.

Osserviamo di seguito un'ulteriore proprietà delle trasformate.

Teorema 8.4.4 *Sia F la trasformata di una funzione f . Allora*

$$\lim_{\Re(s) \rightarrow +\infty} F(s) = 0.$$

Dimostrazione. Fissiamo arbitrariamente un numero $\epsilon > 0$. La funzione $|e^{-st}f(t)|$ è integrabile su ogni intervallo limitato anche se potrebbe essere non integrabile su $[0, +\infty)$. Si noti che anche la funzione $|f(t)|$ è integrabile su ogni intervallo limitato. In particolare è possibile trovare un numero T_1 sufficientemente piccolo affinché

$$\int_0^{T_1} |f(t)| dt < \epsilon. \quad (8.4)$$

Per la definizione di integrale generalizzato si ha inoltre

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt = F(s) \in \mathbb{C}$$

se $\Re(s) > \lambda_0$. Grazie al teorema 8.4.2 sappiamo inoltre che, se f è di tipo esponenziale, la convergenza è uniforme rispetto a s . Quindi è possibile trovare un numero T_2 (indipendente da s) abbastanza grande affinché

$$\left| \int_{T_2}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right| < \epsilon. \quad (8.5)$$

Fissati T_1 e T_2 possiamo trovare un numero α sufficientemente grande affinché

$$e^{-\alpha T_1} \int_{T_1}^{T_2} |f(t)| dt < \epsilon. \quad (8.6)$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \left| \int_0^{T_1} e^{-st} f(t) dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t) dt + \int_{T_2}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^{T_1} e^{-st} f(t) dt \right| + \left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t) dt \right| + \left| \int_{T_2}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Il terzo addendo è maggiorato da ϵ per la 8.5. Lo stesso accade per il primo e il secondo addendo grazie alle 8.4 e 8.6 essendo

$$\left| \int_0^{T_1} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^{T_1} |f(t)| dt < \epsilon$$

e

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t) dt \right| \leq e^{-\alpha T_1} \int_{T_1}^{T_2} |f(t)| dt < \epsilon$$

per s sufficientemente grande.

Si conclude che $|F(s)| < 3\epsilon$ definitivamente e il teorema è dimostrato.

Diamo una dimostrazione alternativa applicabile nel caso in cui la funzione f sia assolutamente trasformabile. Sia $\lambda > \lambda_0$. La funzione $g(t) := e^{-\lambda t} |f(t)|$ è integrabile e per $\Re(s) > \lambda$ si ha $|e^{-\Re(s)t} f(t)| \leq g(t)$. La funzione $e^{-\Re(s)t} f(t)$ è dominata da g uniformemente rispetto ad s e quindi, per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si può portare il limite all'interno del segno integrale. Si ottiene pertanto

$$\lim_{\Re(s) \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{\Re(s) \rightarrow +\infty} e^{-st} f(t) dt = 0.$$

□

Si noti in particolare che un polinomio non nullo non è mai una trasformata.

8.5 Smorzamento, ritardo, cambiamento di scala.

In quanto segue supponiamo che f sia una funzione trasformabile con trasformata F e con ascissa di convergenza λ_0^f .

Sia $\gamma \in \mathbb{C}$. Si consideri la funzione “smorzata” $g_1(t) := e^{\gamma t} f(t)$. Si ha allora

$$\mathcal{L}\{e^{\gamma t} f(t)\}(s) = F(s - \gamma) \tag{8.7}$$

e l'ascissa di convergenza $\lambda_0^{g_1}$ della funzione g_1 è $\lambda_0^{g_1} = \lambda_0^f + \Re(\gamma)$.

Infatti si ha $\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\gamma t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\gamma)t} f(t) dt = F(s-\gamma)$.

Inoltre la F è definita in $s-\gamma$ se $\Re(s-\gamma) > \lambda_0^f$ e non è ivi definita se $\Re(s-\gamma) < \lambda_0^f$. Pertanto $\lambda_0^{g_1} = \lambda_0^f + \Re(\gamma)$.

Sia ora $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Consideriamo la funzione traslata $g_2(t) := f(t-a)$. Si ricorda che noi supponiamo sempre che la f sia nulla per $t < 0$, dunque $g_2(t) = 0$ se $t < a$. Si ha allora

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s) \quad (8.8)$$

e l'ascissa di convergenza della g_2 è uguale all'ascissa di convergenza della f .

Infatti si ha $\int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)} f(u) du = e^{-as} F(s)$.

Sia infine $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$. Consideriamo la funzione ottenuta dal cambiamento di scala $g_3(t) := f(\omega t)$. Si ha allora

$$\mathcal{L}\{f(\omega t)\}(s) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right) \quad (8.9)$$

e l'ascissa di convergenza $\lambda_0^{g_3}$ della funzione g è $\lambda_0^{g_3} = \omega \lambda_0^f$.

Infatti mediante la sostituzione $u = \omega t$ si ottiene $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(\omega t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{\omega} u} \frac{1}{\omega} f(u) du = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right)$.

L'ascissa di convergenza si determina osservando che $\frac{s}{\omega} > \lambda_0^f$ se e solo se $s > \omega \lambda_0^f$.

Esempio 8.5.1 Sia $u(t)$ la funzione di Heaviside:

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$

Si ha $\mathcal{L}\{u\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$ per $s > 0$ e $\lambda_0 = 0$.

Esempio 8.5.2 Sia $f(t) = t^k u(t)$, $k \in \mathbb{N}$.

Usando la 8.3 e tenendo presente l'esempio 8.5.1 si ottiene

$$\mathcal{L}\{t^k u(t)\}(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

Esempio 8.5.3 Sia $f(t) = e^{\gamma t} u(t)$.

Usando la 8.7 e tenendo presente l'esempio 8.5.1 si ottiene

$$\mathcal{L}\{e^{\gamma t}u(t)\}(s) = \frac{1}{s - \gamma}.$$

$$\lambda = \Re(\gamma).$$

In particolare, prendendo $\gamma = i\omega$ e $\gamma = -i\omega$, e potendo scrivere $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ si ottiene

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)u(t)\}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

In modo analogo si ottiene

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)u(t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Esempio 8.5.4 Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\Re(\alpha) > -1$. Sia $f(t) = t^\alpha u(t)$.

La trasformata di f è $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}t^\alpha dt$. Ricordando la definizione della funzione $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}du$ e supponendo $s \in \mathbb{R}$ si può sostituire $u = st$ e si ottiene

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \frac{1}{s} du = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}.$$

Ora F e $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ sono due funzioni analitiche che coincidono sull'asse reale positivo, perciò devono coincidere su tutto il semipiano $\Re(s) > 0$. Si ottiene pertanto

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}$$

per ogni s tale che $\Re(s) > 0$ e per ogni α tale che $\Re(\alpha) > -1$. In particolare per $\alpha \in \mathbb{N}$ si riottiene la formula dell'esempio 8.5.2.

Esempio 8.5.5 *Trasformata di una funzione periodica.*

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione nulla per $t < 0$ e periodica di periodo $T > 0$ sul semiasse positivo. Poniamo

$$f^*(t) := \begin{cases} f(t) & \text{se } t \leq T \\ 0 & \text{se } t > T \end{cases}.$$

Supponiamo nota la trasformata $F^* := \mathcal{L}\{f^*\}$, vogliamo determinare la trasformata di f .

Si ha $f^*(t) = f(t) - f(t)u(t-T) = f(t) - f(t-T)$ e quindi, grazie alla formula del ritardo 8.8 si ottiene $F^*(s) = F(s) - e^{-Ts}F(s) = (1 - e^{-Ts})F(s)$ e pertanto

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}F^*.$$

Esempio 8.5.6 *Trasformata di una serie.*

Sia assegnata una serie convergente di funzioni $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(t)$. Si può concludere che la serie di f è la serie delle trasformate, cioè $F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n F_n(s)$? In generale la risposta è negativa. Infatti la trasformata del limite di una successione di funzioni può non essere il limite della successione delle trasformate. Ad esempio possiamo considerare la successione

$$g_k(t) = k \left(u(t) - u\left(t - \frac{1}{k}\right) \right).$$

Si ha chiaramente $\lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(t) = 0$ per ogni $t > 0$ mentre $G_k(s) = \mathcal{L}g_k(t)(s) = \frac{k}{s} \left(1 - e^{-\frac{s}{k}} \right)$, e quindi $\lim_{k \rightarrow +\infty} G_k(s) = 1$.

Un secondo esempio è dato dalla serie

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

La serie delle trasformate è

$$\frac{1}{s} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{s^{2n}},$$

che non converge.

In alcuni casi particolari, però, la trasformata di una serie è la serie delle trasformate. Ad esempio si può dimostrare che se

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

è una serie convergente per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed esistono due costanti reali positive K e α e un naturale n_0 tali che per ogni $n \geq n_0$ $|a_n| \leq K \frac{\alpha^n}{n!}$, allora per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > \alpha$ si ha

$$\mathcal{L}f(t)(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathcal{L}t^n(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}}.$$

8.6 Trasformazione della derivata.

Lemma 8.6.1 *Sia f una funzione trasformabile con ascissa di convergenza λ_0 . Sia $\mu_0 := \max\{\lambda_0, 0\}$. Allora si ha*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} \int_0^T f(t) dt = 0$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > \mu_0$.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $\lambda_0 < 0$. Allora $\mu_0 = 0$ e l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ converge per $s = 0$, cioè $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ è convergente e quindi è evidente che $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} \int_0^T f(t) dt = 0$.

Supponiamo ora $\lambda_0 \geq 0$. Allora $\mu_0 = \lambda_0$. Sia $s \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(s) > \mu_0$. Esiste un numero reale positivo α_0 tale che $\mu_0 < \alpha_0 < \Re(s)$. La funzione F è definita in α_0 .

Poniamo

$$\phi(t) = \int_0^t e^{-\alpha_0 u} f(u) du.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) dt &= \int_0^T e^{\alpha_0 t} e^{-\alpha_0 t} f(t) dt = \\ &= [e^{\alpha_0 t} \phi(t)]_0^T - \alpha_0 \int_0^T e^{\alpha_0 t} \phi(t) dt = e^{\alpha_0 T} \phi(T) - \alpha_0 \int_0^T e^{\alpha_0 t} \phi(t) dt. \end{aligned}$$

La funzione $\phi(t)$ è limitata perché $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = F(\alpha_0)$. Sia M una sua maggiorazione. Si può allora scrivere

$$\left| \int_0^T f(t) dt \right| \leq e^{\alpha_0 T} M + \alpha_0 M \left[\frac{e^{\alpha_0 t}}{\alpha_0} \right]_0^T = 2M e^{\alpha_0 T} - M \leq 2M e^{\alpha_0 T}$$

ed essendo $\Re(s) > \alpha_0$ si ottiene

$$\left| e^{-sT} \int_0^T f(t) dt \right| \leq 2M e^{(\alpha_0 - \Re(s))T}$$

e poiché $\alpha_0 - \Re(s) < 0$ il secondo membro tende a 0 per $T \rightarrow +\infty$. □

Teorema 8.6.1 *Sia f una funzione tale che $f(t) = 0$ per ogni $t < 0$. Supponiamo che $f'(t)$ esista per ogni $t > 0$ e che la funzione $f'(t)$ sia trasformabile con ascissa di convergenza λ_0 (la funzione f potrebbe non essere derivabile in $t = 0$). Allora anche la funzione f è trasformabile e si ottiene*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0^+)$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(s) > \max\{\lambda_0, 0\}$, dove $f(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$.

Dimostrazione. Si osservi che $f(0^+)$ esiste finito. Questo è conseguenza della trasformabilità della funzione f' . Infatti, l'esistenza dell'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt$ implica l'esistenza dell'integrale $\int_0^1 e^{-st} f'(t) dt$, che a sua volta implica l'esistenza dell'integrale

$$\int_0^1 f'(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 f'(t) dt = f(1) - f(0^+).$$

Sia λ_0 l'ascissa di convergenza della funzione $f'(t)$ e si ponga $\mu_0 := \max\{\lambda_0, 0\}$ come nel lemma precedente. Si ha, grazie al lemma, per $\Re(s) > \mu_0$

$$0 = \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} \int_0^T f'(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} [f(T) - f(0^+)],$$

da cui

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} f(T) = 0 \quad (8.10)$$

Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} f'(t) dt &= [e^{-st} f(t)]_0^T + s \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \\ &= e^{-sT} f(T) - f(0^+) + s \int_0^T e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Prendendo il limite per $T \rightarrow +\infty$ si ottiene grazie anche alla 8.10

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = -f(0^+) + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

da cui la tesi $\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF - f(0^+)$. □

Esempio 8.6.1 Si consideri la funzione $f(t) = 1 - e^{-t}$.

Si ha $f'(t) = e^{-t}$. La funzione f' è trasformabile e la sua ascissa di convergenza è -1 . Il teorema dimostrato ci assicura che anche la funzione f è trasformabile e vale $\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0^+)$. Ciò è vero se $\Re(s) > 0$. Per $-1 < \Re(s) < 0$ però la formula non vale. Infatti in tali punti la funzione $\mathcal{L}f$ non è definita in quanto l'ascissa di convergenza della funzione f è 0 .

Corollario 8.6.1 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n \mathcal{L}\{f\} - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+).$$

La formula si verifica facilmente per induzione su n .

Esempio 8.6.2 Si calcoli la trasformata della funzione $\sin \omega t$ supponendo nota la trasformata $\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$.

Poiché

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \cos \omega t\right\}(s) = s\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) - 1 = \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} - 1 = -\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}$$

ed essendo $\sin \omega t = -\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \cos \omega t$ si ottiene

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = -\frac{1}{\omega} \left(-\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Esempio 8.6.3 Si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si ha

$$f'(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osserviamo che $f = f'$ quasi ovunque e quindi dobbiamo avere $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{f'\}$. Per la formula della trasformata della derivata ci aspettiamo di avere $\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0^+) = sF - 1 \neq F$.

Il problema in questo esempio è che la funzione f non è derivabile su $(0, +\infty)$ perché c'è una discontinuità in $t = 1$; il teorema non vale.

Se una funzione f presenta un salto in un punto t_0 si può provare che vale la formula

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0^+) - [f(t_0^+) - f(t_0^-)]e^{-st_0}$$

dove la quantità tra parentesi quadre è il salto della funzione nel punto t_0 .

Questa formula si può generalizzare per derivate di ordine superiore, ad esempio

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''\}(s) &= s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0^+) - f'(0^+) - \\ &- s[f(t_0^+) - f(t_0^-)]e^{-st_0} - [f'(t_0^+) - f'(t_0^-)]e^{-st_0}. \end{aligned}$$

Riprendendo l'esempio della nostra funzione si ha

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\frac{1 - e^{1-s}}{s-1} - 1 - [0 - e]e^{-s} = \frac{1 - e^{1-s}}{s-1} = F(s)$$

come previsto.

8.7 Prodotto di convoluzione.

Siano date due funzioni $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$. Diremo prodotto di convoluzione di f e g la funzione $f * g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, supposta esistente, così definita:

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy.$$

Si vede facilmente che il prodotto di convoluzione $*$ gode delle proprietà associativa, commutativa e distributiva rispetto alla somma.

Proviamo ad esempio la proprietà commutativa. Mediante la sostituzione $u = x - y$ si ottiene

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)f(x - u)du = g * f(x).$$

Noi siamo interessati a funzioni f e g definite su \mathbb{R} e tali che $f(t) = 0$ e $g(t) = 0$ se $t < 0$. In questo caso si può scrivere

$$\int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

essendo $g(t - \tau) = 0$ se $t < \tau$.

La trasformata di Laplace si comporta molto bene riguardo all'operazione di convoluzione. Vale a proposito il seguente

Teorema 8.7.1 *Siano f e g funzioni assolutamente trasformabili. Allora è assolutamente trasformabile anche il loro prodotto di convoluzione $f * g$ e si ha*

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}.$$

Dimostrazione. Nelle uguaglianze che seguono facciamo uso dei teoremi di Fubini-Tonelli. Tale uso è giustificato grazie all'assoluta e uniforme convergenza degli integrali.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f * g\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right) dt = \iint_D e^{-st} f(\tau)g(t - \tau) d\tau dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\tau}^{+\infty} e^{-st} f(\tau)g(t - \tau) dt \right) d\tau = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} f(\tau)g(u) du \right) d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} e^{-su} g(u) du = \mathcal{L}\{f\}(s) \mathcal{L}\{g\}(s) \end{aligned}$$

dove con D si è indicato il dominio di integrazione:

$$D = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 : \tau \leq t\}.$$

L'assoluta trasformabilità della $f * g$ si vede in modo analogo. □

L'ascissa di convergenza del prodotto $f * g$ è certamente minore o uguale alla maggiore tra le ascisse di convergenza di f e g . Può capitare però che sia strettamente minore di queste.

Esempio 8.7.1 *Siano $f(t) = e^t u(t)$ e $g(t) = (1 - t)u(t)$.*

Si ha $\lambda_0^f = 1$ e $\lambda_0^g = 0$. D'altra parte $f * g(t) = \int_0^t e^\tau(1-t+\tau)d\tau = t$. Dunque $\lambda_0^{f*g} = 0 < \max\{\lambda_0^f, \lambda_0^g\}$. Si noti che $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s-1}$ e $\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{s-1}{s^2}$; pertanto $\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \frac{1}{s-1} \frac{s-1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$ è definita per $s > 0$.

Utilizzeremo la convoluzione per scoprire come si trasforma una primitiva di una funzione.

Teorema 8.7.2 *Sia f una funzione trasformabile con trasformata F . Sia $\phi(t) := \int_0^t f(\tau)d\tau$. Allora*

$$\mathcal{L}\{\phi\}(s) = \frac{1}{s}F(s).$$

Dimostrazione. È sufficiente osservare che $\phi(t) = f * u(t)$ e applicare il teorema 2.7.1. □

8.8 L'antitrasformata.

Affrontiamo ora il problema del passaggio dal dominio della frequenza al dominio del tempo. Poiché non è completamente chiaro quale sia il dominio dell'operatore \mathcal{L} nè quale sia la sua immagine, non sembra facile la ricerca di un operatore inverso di \mathcal{L} in senso stretto.

È inoltre evidente che l'operatore \mathcal{L} non è iniettivo perché essendo un operatore integrale non può distinguere tra funzioni che differiscono soltanto su un insieme di misura nulla.

Spesso viene usato il simbolo \mathcal{L}^{-1} come se fosse un operatore, senza precisare dominio e codominio. La situazione ricorda l'uso del simbolo di integrale indefinito \int come operatore inverso dell'operatore di derivazione. Una scrittura del tipo $\mathcal{L}^{-1}\{F\} = f$ si deve quindi intendere come “ f è una delle funzioni trasformabili tali che $\mathcal{L}f = F$ ”.

Un enunciato del tipo “ $\mathcal{L}^{-1}\{G + H\} = \mathcal{L}^{-1}\{G\} + \mathcal{L}^{-1}\{H\}$ ” è da intendere nel modo seguente: se $\mathcal{L}f = F$ e $F = G + H$, allora esistono g e h trasformabili tali che $\mathcal{L}g = G$, $\mathcal{L}h = H$ e $g + h = f$.

La dimostrazione dei teoremi seguenti si può dare utilizzando le trasformate di Fourier. Il problema della ricerca dell'antitrasformata di Fourier è di più facile risoluzione che quello della ricerca dell'antitrasformata di Laplace.

Teorema 8.8.1 *Siano f e g due funzioni trasformabili tali che $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g$. Allora $f(t) = g(t)$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$.*

In particolare due funzioni continue hanno la stessa trasformata di Laplace se e soltanto se sono uguali (dunque l'operatore \mathcal{L} ristretto alle funzioni continue è iniettivo).

Esiste anche una formula che ci permette di risalire alla funzione f , nota la sua trasformata F .

Teorema 8.8.2 (*Formula di Bromwich-Mellin o di Riemann-Fourier*). Sia f una funzione trasformabile con trasformata F e ascissa di convergenza λ_0 . Detto α un qualsiasi numero reale tale che $\alpha > \lambda_0$ vale

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha - i\beta}^{\alpha + i\beta} e^{st} F(s) ds$$

nei punti di continuità della f .

Nei punti di discontinuità bisogna tenere conto del salto e la formula diventa

$$\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha - i\beta}^{\alpha + i\beta} e^{st} F(s) ds.$$

Per utilizzare la formula di Riemann-Fourier è necessario integrare una funzione nel campo complesso lungo la retta verticale di equazione $x = \alpha$ nel piano di Gauss. Tale retta prende il nome di *retta di Bromwich*. Si noti che la formula non dipende dal valore di α purchè sia $\alpha > \lambda_0$.

Esempio 8.8.1 Utilizziamo la formula di Riemann-Fourier per ricavare l'antitrasformata della funzione $F(s) = \frac{1}{s}$.

Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_{\alpha - i\beta}^{\alpha + i\beta} \frac{e^{st}}{s} ds.$$

Supponiamo dapprima $t < 0$.

La funzione $\frac{e^{st}}{s}$ (nella variabile s) è olomorfa in una regione discosta dall'origine. Per il teorema di Cauchy l'integrale della funzione $\frac{e^{st}}{s}$ lungo una curva chiusa che non contiene l'origine è nullo.

Consideriamo il circuito rappresentato in figura.

Sia β fissato. Sia R il raggio di un cerchio di centro l'origine e passante per i punti $\alpha - i\beta$ e $\alpha + i\beta$. Sia Γ l'arco di cerchio $Re^{i\varphi}$ di estremi i punti $\alpha - i\beta$ e $\alpha + i\beta$.

L'integrale calcolato lungo la retta di Bromwich sarà dunque uguale all'opposto dell'integrale lungo la curva Γ .

Se mostriamo che l'integrale della funzione $\frac{e^{st}}{s}$ calcolato sulla curva Γ è nullo, abbiamo provato che $\int_{\alpha - i\beta}^{\alpha + i\beta} \frac{e^{st}}{s} ds = 0$.

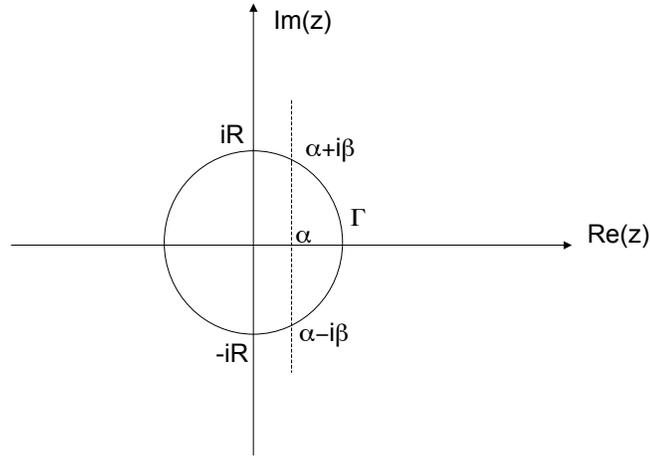


Figura 8.1: Retta di Bromwich.

Proveremo che è nullo il contributo dato dai due archi di cerchio $Re^{i\varphi}$ che congiungono i punti $\alpha - i\beta$ e $-iR$, e i punti $\alpha + i\beta$ e iR rispettivamente.

Sarà quindi sufficiente dimostrare che è nullo l'integrale calcolato su tutto il semicerchio $Re^{i\varphi}$ con $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Cominciamo con l'osservare che la lunghezza $l(R)$ dell'arco che congiunge i punti $\alpha + i\beta$ e iR (uguale alla lunghezza dell'arco che congiunge i punti $\alpha - i\beta$ e $-iR$) è limitata. Infatti, se indichiamo con ϑ l'angolo compreso tra l'asse immaginario e la retta che congiunge l'origine con il punto $\alpha + i\beta$ si osserva che $R = \frac{\alpha}{\sin \vartheta}$ e la lunghezza dell'arco è $l(R) = R\vartheta = \frac{\alpha\vartheta}{\sin \vartheta}$. Per $R \rightarrow +\infty$, cioè per $\vartheta \rightarrow 0$, questa lunghezza tende ad α ed è perciò limitata.

Se s è un punto dell'arco considerato si ha $0 \leq \Re(s) \leq \alpha$ ed essendo $t < 0$ si ottiene $t\Re(s) \leq 0$, e quindi $e^{t\Re(s)} \leq 1$. Pertanto $|\frac{e^{st}}{s}| \leq \frac{1}{R}$ per ogni s appartenente all'arco che stiamo studiando e il modulo dell'integrale

$$\int_{\text{arco}(\alpha+i\beta, Ri)} \frac{e^{st}}{s} ds$$

si può maggiorare con $\frac{l(R)}{R}$, che tende a zero per $R \rightarrow +\infty$.

Calcoliamo ora l'integrale sul semicerchio completo $Re^{i\varphi}$ con $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Tale integrale è

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{Rt(\cos \varphi + i \sin \varphi)}}{Re^{i\varphi}} Rie^{i\varphi} d\varphi$$

e il suo modulo è maggiorato da

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi.$$

Sostituiamo la variabile $\varphi = \xi - \frac{\pi}{2}$. Si ottiene

$$\int_0^\pi e^{Rt \sin \xi} d\xi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt \sin \xi} d\xi \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2Rt\xi}{\pi}} d\xi = \frac{\pi}{Rt} (e^{Rt} - 1).$$

Per $R \rightarrow +\infty$ l'integrale tende quindi a zero.

(Si è usata la simmetria della funzione seno rispetto a $\frac{\pi}{2}$ e la disuguaglianza $\frac{2}{\pi}\xi \leq \sin \xi$ valida per ogni $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ che è giustificata dalla concavità della funzione seno nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$).

Supponiamo ora $t > 0$. Per il teorema dei residui si ha che l'integrale della funzione $\frac{e^{st}}{s}$ su un circuito contenente l'origine è pari a $2\pi i$ moltiplicato per il residuo nell'origine, che è uguale a 1. Consideriamo il circuito seguente (si faccia riferimento alla figura precedente). Come nel caso precedente sceglieremo R in modo che il cerchio di raggio R e di centro l'origine passi per i punti $\alpha - i\beta$ e $\alpha + i\beta$. Questa volta però considereremo l'arco del cerchio che si trova alla sinistra della retta di Bromwich. Indicando come in precedenza con ϑ l'angolo compreso tra l'asse immaginario e la retta che congiunge l'origine con il punto $\alpha + i\beta$, considereremo l'arco di cerchio $Re^{i\varphi}$, con $\frac{\pi}{2} - \vartheta \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi + \vartheta$.

Anche in questo caso si vede facilmente che è nullo il contributo dato dai due archi di cerchio $Re^{i\varphi}$ che congiungono i punti $\alpha - i\beta$ a $-iR$ e $\alpha + i\beta$ a iR rispettivamente.

Infatti come prima si osserva che la lunghezza $l(R)$ dei due archi è limitata, ed essendo $\Re(s) \leq \alpha$ e $t > 0$, il modulo dell'integrale

$$\int_{\text{arco}(\alpha+i\beta, Ri)} \frac{e^{st}}{s} ds$$

si maggiora con $l(R) \frac{e^{\alpha t}}{R}$, che tende a zero per $R \rightarrow +\infty$.

Calcoliamo infine l'integrale lungo il semicerchio contenuto nel semipiano $\Re(s) \leq 0$.

Il modulo dell'integrale

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{e^{Rt(\cos \varphi + i \sin \varphi)}}{Re^{i\varphi}} Rie^{i\varphi} d\varphi$$

si maggiora con

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi = \int_0^\pi e^{-Rt \sin \xi} d\xi$$

dove si è fatta la sostituzione $\xi = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

In modo simile a quanto fatto per il caso $t < 0$ si osserva che quest'ultimo integrale tende a 0 per $R \rightarrow +\infty$.

Concludiamo dunque che l'unico contributo non nullo all'integrale sul circuito chiuso è quello dato da $\int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} \frac{e^{st}}{s} ds$ che pertanto risulta essere uguale a $2\pi i$. Dividendo per $2\pi i$ come richiesto dalla formula si ottiene in definitiva

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} \frac{e^{st}}{s} ds = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}.$$

Dunque $f(t) = u(t)$ come previsto. Si noti che per $t = 0$ la formula fornisce

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i d\vartheta = \frac{1}{2}$$

che è uguale a $\frac{1}{2}[u(0^+) + u(0^-)]$.

Come si è visto dall'esempio precedente il calcolo diretto dell'antitrasformata mediante l'uso della formula di Bromwich-Mellin Riemann-Fourier non è facile. Fortunatamente in molti casi è possibile trovare l'antitrasformata di una funzione assegnata utilizzando opportuni artifici e tenendo presente le formule delle trasformate di uso più frequente.

8.9 Calcolo dell'antitrasformata mediante artifici. Funzioni razionali.

Esempio 8.9.1 Si trovi una funzione f tale che $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s+9}e^{-5s}$.

Ricordando la formula del ritardo 8.8 e l'esempio 8.5.3 si ottiene

$$u(t) \mapsto \frac{1}{s}; \quad e^{-9t}u(t) \mapsto \frac{1}{s+9}; \quad e^{-9(t-5)}u(t-5) \mapsto e^{-5s} \frac{1}{s+9}.$$

Si ponga attenzione al fatto che la funzione trovata è nulla per $t < 5$. La funzione $g(t) = e^{-9(t-5)}u(t)$ non è un'antitrasformata della funzione assegnata, infatti $\mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}e^{45}e^{-9t}(s) = e^{45} \frac{1}{s+9}$.

Esempio 8.9.2 Si trovi una funzione f tale che $\mathcal{L}f(s) = \frac{2}{s^2+9}$.

Ricordando la formula per la trasformata del seno $\sin \omega t \mapsto \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ e scrivendo $F(s) = \frac{2}{3} \frac{3}{s^2+3^2}$ si ottiene $f(t) = \frac{2}{3}(\sin 3t)u(t)$.

Esempio 8.9.3 Si trovi una funzione f tale che $\mathcal{L}f(s) = \frac{3s+1}{s^2+4}$.

Scriviamo $F(s) = 3\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2}$ da cui $f(t) = (3\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)u(t)$.

È possibile calcolare l'antitrasformata di una qualsiasi funzione razionale del tipo $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, dove il grado del numeratore N è strettamente inferiore al grado del denominatore D , utilizzando la decomposizione in frazioni semplici. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gli zeri di D e siano k_1, k_2, \dots, k_n le rispettive molteplicità. Esistono allora dei coefficienti $A_1^1, A_1^2, \dots, A_1^{k_1}, A_2^1, A_2^2, \dots, A_n^1, \dots, A_n^{k_n}$ tali che $F(s) = \frac{A_1^1}{(s-\alpha_1)} + \frac{A_1^2}{(s-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_1^{k_1}}{(s-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_2^1}{(s-\alpha_2)} + \dots + \frac{A_n^1}{(s-\alpha_n)} + \dots + \frac{A_n^{k_n}}{(s-\alpha_n)^{k_n}}$. Il calcolo dell'antitrasformata della funzione F si riduce quindi al calcolo dell'antitrasformata dei singoli addendi.

Ricordando l'esempio 8.5.2 si ha che $\mathcal{L}t^k u(t) = \frac{k!}{s^{k+1}}$ perciò l'antitrasformata di $\frac{1}{(s-\alpha)^n}$ è

$$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\alpha t} u(t).$$

In definitiva l'antitrasformata della funzione F si potrà scrivere come

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_i^j}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\alpha_i t}.$$

Esempio 8.9.4 Si trovi una funzione f tale che $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s(s+6)^2}$.

Decomponiamo la funzione F in frazioni semplici. Avremo

$$\frac{1}{s(s+6)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+6} + \frac{C}{(s+6)^2}. \quad (8.11)$$

Per calcolare i coefficienti si può procedere in diversi modi. Ad esempio si può risolvere l'equazione

$$A(s+6)^2 + Bs(s+6) + Cs = 1$$

che si riduce al sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 12A + 6B + C = 0 \\ 36A = 1 \end{cases} ;$$

da cui si ricava $A = \frac{1}{36}, B = -\frac{1}{36}, C = -\frac{1}{6}$.

Un altro metodo è quello di moltiplicare la 8.11 per s da cui si ottiene

$$sF(s) = A + B\frac{s}{s+6} + C\frac{s}{(s+6)^2}.$$

Si avrà allora

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

cioè $A = \frac{1}{36}$. In modo analogo si può calcolare C . Si moltiplichi la 8.11 per $(s+6)^2$; si ottiene

$$(s+6)^2 F(s) = A \frac{(s+6)^2}{s} + B(s+6) + C.$$

Si avrà allora

$$C = \lim_{s \rightarrow -6} (s+6)^2 F(s)$$

e quindi $C = -\frac{1}{6}$. Per ottenere B dobbiamo calcolare la derivata della funzione $(s+6)^2 F(s)$. Si avrà allora

$$\frac{d}{ds} (s+6)^2 F(s) = (s+6)[\dots] + B$$

e quindi

$$B = \lim_{s \rightarrow -6} \frac{d}{ds} (s+6)^2 F(s),$$

nel nostro caso $B = -\frac{1}{36}$.

In generale sia α_i una radice di molteplicità k_i . Per determinare i coefficienti $A_i^{k_i}, A_i^{k_i-1}, \dots, A_i^{k_i-j}, \dots, A_i^{k_i-(k_i-1)} = A_i^1$ rispettivamente relativi alle frazioni $\frac{1}{(s-\alpha_i)^{k_i}}, \frac{1}{(s-\alpha_i)^{k_i-1}}, \dots, \frac{1}{(s-\alpha_i)^{k_i-j}}, \dots, \frac{1}{(s-\alpha_i)}$ si possono usare le formule

$$\begin{aligned} A_i^{k_i} &= \lim_{s \rightarrow \alpha_i} (s - \alpha_i)^{k_i} F(s); \\ A_i^{k_i-1} &= \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d}{ds} [(s - \alpha_i)^{k_i} F(s)]; \\ &\dots; \\ A_i^{k_i-j} &= \frac{1}{j!} \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d^j}{ds^j} [(s - \alpha_i)^{k_i} F(s)]; \\ &\dots; \\ A_i^1 &= \frac{1}{(k_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}} [(s - \alpha_i)^{k_i} F(s)]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Non sempre però l'uso di tali formule è agevole e talvolta è più conveniente ricorrere a metodi diretti.

Se il polinomio al denominatore ha zeri non reali e la funzione F è reale i coefficienti relativi alle coppie di zeri coniugati sono anch'essi tra loro coniugati. Questa osservazione permette spesso di diminuire i tempi di calcolo.

Esempio 8.9.5 Si trovi un'antitrasformata della funzione $F(s) = \frac{s-1}{(s^2+1)^2}$.

Si può scrivere

$$F(s) = \frac{A}{s-i} + \frac{B}{(s-i)^2} + \frac{C}{s+i} + \frac{D}{(s+i)^2}.$$

Usiamo ad esempio la formula 8.12 :

$$\frac{d}{ds} \left[(s-i)^2 \frac{s-1}{(s^2+1)^2} \right] = \frac{1}{(s+i)^2} - 2 \frac{s-1}{(s+i)^3}.$$

Calcolando il $\lim_{s \rightarrow i}$ si ottiene $A = \frac{i}{4}$.

$$\text{Calcoliamo ora } B = \lim_{s \rightarrow i} \frac{s-1}{(s+i)^2} = \frac{1-i}{4}.$$

Non è necessario calcolare C e D , infatti grazie all'osservazione fatta sappiamo che $C = \bar{A} = -\frac{i}{4}$ e $D = \bar{B} = \frac{1+i}{4}$.

Avremo allora

$$f(t) = \left(\frac{i}{4} e^{it} + \frac{1-i}{4} t e^{it} - \frac{i}{4} e^{-it} + \frac{1+i}{4} t e^{-it} \right) u(t) = \left(-\frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} t \sin t + \frac{1}{2} t \cos t \right) u(t).$$

Il caso più semplice è quello in cui ogni zero ha molteplicità 1. In questo caso i coefficienti A_i^1 sono esattamente i residui della funzione $F = \frac{N}{D}$ nel punto. Ricordando la formula per il calcolo dei residui di una funzione razionale in un polo semplice α_i , $R(F; \alpha_i) = \frac{N(\alpha_i)}{D'(\alpha_i)}$, si ottiene la seguente formula, nota come *formula di Heaviside* :

Teorema 8.9.1 (*Formula di Heaviside*) Sia $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ una funzione razionale dove il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore, e supponiamo che D abbia soltanto zeri semplici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Allora un'antitrasformata della F è

$$f(t) = \left(\sum_{i=1}^k \frac{N(\alpha_i)}{D'(\alpha_i)} e^{\alpha_i t} \right) u(t).$$

Vale una versione della formula di Heaviside anche nel caso in cui gli zeri abbiano molteplicità maggiore di uno, ma la sua applicazione non è molto agevole. In questo caso la formula diventa

$$f(t) = \left(\sum_{i=1}^k R(F(s)e^{st}; \alpha_i) \right) u(t).$$

Esempio 8.9.6 Si trovi un'antitrasformata della funzione

$$F(s) = \frac{1}{s^4 - s^3 + 4s^2 - 4s}.$$

Gli zeri del denominatore sono tutti semplici: $0, 1, 2i, -2i$. La derivata del denominatore è $4s^3 - 3s^2 + 8s - 4$. Utilizzando la formula di Heaviside si ottiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5} e^t + \frac{1+2i}{40} e^{2it} + \frac{1-2i}{40} e^{-2it} \right) u(t) = \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{20} \cos 2t - \frac{1}{10} \sin 2t \right) u(t). \end{aligned}$$

8.10 Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie.

Sia dato un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n a coefficienti costanti, con punto iniziale in 0. Tale problema si può scrivere come

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)}(t) + c_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + c_0y(t) = f(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{array} \right. .$$

Applichiamo l'operatore di Laplace all'equazione

$$y^{(n)}(t) + c_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + c_0y(t) = f(t).$$

Otteniamo, grazie al corollario 2.6.1 e usando le condizioni iniziali,

$$\begin{aligned} & s^n Y(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \dots - y_{n-1} + \\ & + c_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y_0 - \dots - y_{n-2}] + \dots + c_0Y(s) = F(s). \end{aligned}$$

Poniamo

$$R_2(s) = \frac{1}{s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0}$$

e

$$\begin{aligned} R_1(s) = R_2(s)[y_0(s^{n-1} + c_{n-1}s^{n-2} + c_{n-2}s^{n-3} + \dots + c_1) + \\ + y_1(s^{n-2} + c_{n-1}s^{n-3} + \dots + c_2) + \dots + y_{n-2}(s + c_{n-1}) + y_{n-1}]. \end{aligned}$$

Si ottiene allora

$$Y(s) = R_1(s) + F(s)R_2(s).$$

Per ottenere la soluzione del problema possiamo antitrasformare. Poiché R_1 e R_2 sono funzioni razionali in cui il denominatore ha sempre grado maggiore del numeratore, possiamo calcolare le antitrasformate r_1 e r_2 . Ricordando inoltre il teorema 8.7.1 sulla trasformata del prodotto di convoluzione si potrà scrivere

$$y(t) = r_1(t) + r_2 * f(t).$$

Supponiamo ora che l'equazione sia omogenea, cioè che $f(t) = 0$. In questo caso la soluzione si riduce a $y(t) = r_1(t)$. Tale soluzione si dice la *risposta libera* del problema.

Se invece l'equazione è completa ma le condizioni iniziali sono tutte nulle, cioè se $y_0 = y_1 = \dots = y_{n-1} = 0$ la soluzione si riduce a $y(t) = r_2 * f(t)$. Tale soluzione si dice la *risposta forzata* del problema.

La soluzione del problema generale risulta dunque essere somma della risposta libera e della risposta forzata.

Esempio 8.10.1

$$\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = e^t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases} .$$

Trasformando si ottiene

$$s^2X - 0 - 1 + 3(sX - 0) + 2X = \frac{1}{s-1}$$

e quindi $X = \frac{s}{(s^2 + 3s + 2)(s-1)}$. Decomponendo in frazioni semplici si ottiene

$$X = \frac{1}{6} \frac{1}{s-1} - \frac{2}{3} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+1}$$

e antitrasformando si ha

$$x = \frac{1}{6}e^t - \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Naturalmente un problema di questo tipo può essere risolto in modo molto semplice considerando l'equazione caratteristica associata all'equazione, trovando le soluzioni dell'equazione omogenea e infine una soluzione particolare dell'equazione completa. Se però il termine noto $f(x)$ non è una funzione continua, tali tecniche non sono utilizzabili.

Esempio 8.10.2 Sia

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \text{ oppure } t > 2 \\ 1 & \text{se } t \in [0, 1) \\ -1 & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases} ;$$

si risolve il problema

$$\begin{cases} x'' + x = f \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} .$$

La funzione f si può scrivere utilizzando la funzione di Heaviside come $f(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$. Calcoliamo $R_2(s) = \frac{1}{1+s^2}$. La sua antitrasformata è $r_2(t) = \sin t$. Poiché le condizioni iniziali sono nulle la soluzione del problema è la risposta forzata $x(t) = r_2 * f(t) = \sin t * f(t)$. Otteniamo allora

$$x(t) = \int_0^t f(t-\tau) \sin \tau d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^t \sin \tau d\tau \right) u(t) - 2 \left(\int_0^{t-1} \sin \tau d\tau \right) u(t-1) + \left(\int_0^{t-2} \sin \tau d\tau \right) u(t-2) = \\
&= (1 - \cos t)u(t) - 2(1 - \cos(t-1))u(t-1) + (1 - \cos(t-2))u(t-2).
\end{aligned}$$

In modo simile si possono risolvere anche sistemi lineari del tipo $x' = Ax + f$, dove x è un vettore (colonna) di \mathbb{R}^n , A è una matrice $n \times n$ e f è una funzione vettoriale in n componenti. Un tale problema può sempre essere ricondotto ad un problema in un'unica equazione di ordine n , ma può anche essere risolto direttamente.

Esempio 8.10.3

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 4x - 2y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Trasformando direttamente il sistema, si ottiene

$$\begin{cases} sX - 1 = 2Y \\ sY = 4X - 2Y \end{cases}$$

e, risolvendo il sistema algebrico,

$$\begin{cases} X = \frac{s+2}{s^2+2s-8} \\ Y = \frac{4}{s^2+2s-8} \end{cases}$$

da cui $x(t) = (\frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-4t})u(t)$ e $y(t) = (\frac{2}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-4t})u(t)$.

Concludiamo con un esempio di applicazione della trasformata di Laplace ad un'equazione integrale.

Esempio 8.10.4 *Si risolva l'equazione*

$$y(t) = \cos t + \int_0^t (t - \tau)y(\tau)d\tau$$

per $t > 0$.

L'equazione proposta si può scrivere come

$$y(t) = \cos t + t * y(t).$$

Trasformando si ha

$$Y(s) = \frac{s}{1+s^2} + \frac{1}{s^2}Y(s)$$

da cui

$$Y(s) = \frac{s^3}{(s^2 - 1)(s^2 + 1)}$$

e quindi

$$Y(s) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i} \right)$$

e in definitiva

$$y(t) = \frac{1}{4} (e^t t + e^{-t} + e^{it} + e^{-it}) u(t) = \frac{1}{2} (\cosh t + \cos t) u(t).$$

8.11 Applicazioni ai circuiti elettrici

Consideriamo un circuito elettrico nel quale sono inseriti, in serie, una resistenza R , una capacità C , un'induttanza L , una forza elettromotrice V e un interruttore. Indichiamo con $i(t)$ la corrente che percorre il circuito e con $q(t)$ la carica del condensatore all'istante t . Consideriamo come istante iniziale $t_0 = 0$ l'istante in cui viene chiuso l'interruttore e indichiamo con q_0 la carica iniziale del condensatore. Avremo allora

$$q(t) = q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau.$$

L'equazione di equilibrio è

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q(t) = v(t) \quad t > 0$$

che si può anche scrivere

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + \frac{q_0}{C} = v(t) \quad t > 0. \quad (8.13)$$

Supponiamo di voler calcolare la corrente $i(t)$. Se la tensione $v(t)$ è una funzione differenziabile l'equazione 8.13 può essere differenziata a membro a membro e si ottiene un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine

$$Lx'' + Rx' + \frac{1}{C}x = v'.$$

Spesso accade però che la funzione v non sia neppure continua; in questo caso si può applicare direttamente l'operatore di Laplace all'equazione integrodifferenziale 8.13. Poiché $i(0^+) = 0$ e ricordando il teorema 8.7.2 si ottiene

$$sLI(s) + RI(s) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{1}{sC}q_0 = V(s),$$

da cui

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL + R + \frac{1}{sC}} - \frac{q_0}{sC(sL + R + \frac{1}{sC})}.$$

La quantità $T(s) = \frac{1}{sL + R + \frac{1}{sC}}$ dipende soltanto dalle caratteristiche del circuito RLC e si chiama *ammettenza di trasferimento*. Potremo allora scrivere

$$I(s) = T(s)V(s) - \frac{q_0}{sC}T(s). \quad (8.14)$$

Supponiamo ora di conoscere la corrente e di voler calcolare la tensione. Dalla 8.14 si ottiene

$$V(s) = \frac{1}{T(s)}I(s) + \frac{q_0}{sC}.$$

La funzione reciproca dell'ammettenza di trasferimento $\frac{1}{T(s)} = sL + R + \frac{1}{sC}$ si chiama *impedenza di trasferimento*.

Esempio 8.11.1 *Determinare la corrente che percorre un circuito RLC nel quale $R = 2\Omega$, $C = \frac{1}{17}F$, $L = 1H$, $q_0 = 0$, $v(t) = e^{-2t}$.*

Calcoliamo l'ammettenza di trasferimento:

$$T(s) = \frac{1}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s^2 + 2s + 17}.$$

Si ha $I(s) = T(s)V(s)$ e poiché $V(s) = \frac{1}{s+2}$ si ottiene, decomponendo in frazioni semplici,

$$I(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1-4i} + \frac{C}{s+1+4i}.$$

Calcolando i coefficienti si ottiene

$$\begin{aligned} I(s) &= -\frac{2}{17} \frac{1}{s+2} + \frac{15}{136} i \frac{1}{s+1-4i} + \\ &+ \frac{15}{136} i \frac{1}{s+1+4i} + \frac{1}{17} \frac{1}{s+1-4i} + \frac{1}{17} \frac{1}{s+1+4i} \end{aligned}$$

e antitrasformando

$$i(t) = \left(-\frac{2}{17}e^{-2t} + \frac{15}{68}e^{-t} \sin 4t + \frac{2}{17}e^{-t} \cos 4t\right)u(t).$$

Un altro metodo per ottenere lo stesso risultato è quello di utilizzare il teorema sul prodotto di convoluzione. Si ha infatti

$$i = \mathcal{L}^{-1}\{T\} * v.$$

Per calcolare velocemente l'antitrasformata di T si può scrivere

$$T(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 17} = \frac{s}{(s+1)^2 + 16} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 16} - \frac{1}{4} \frac{4}{(s+1)^2 + 16}$$

e pertanto

$$\mathcal{L}^{-1}\{T\}(t) = e^{-t} \cos 4t - \frac{1}{4} e^{-t} \sin 4t.$$

Otteniamo infine

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t (e^{-\tau} \cos 4\tau - \frac{1}{4} e^{-\tau} \sin 4\tau) e^{-2(t-\tau)} d\tau = \\ &= (-\frac{2}{17} e^{-2t} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{34}) e^{-t} \sin 4t + \frac{2}{17} e^{-t} \cos 4t) u(t). \end{aligned}$$

8.12 Applicazioni alle equazioni alle derivate parziali.

La trasformata di Laplace è uno strumento molto utile anche nello studio delle equazioni alle derivate parziali. Considereremo funzioni in due variabili del tipo $f(x, t)$, definite su opportuni sottoinsiemi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ del tipo $\Omega = A \times \mathbb{R}$. Le funzioni si supporranno sempre nulle per ogni valore di x se $t < 0$. In questo modo sarà possibile considerare la trasformazione rispetto alla variabile t , considerando x come un parametro. Si avrà dunque $\mathcal{L}\{f(x, t)\}(x, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(x, t) dt = F(x, s)$. Per quanto riguarda le derivate si avrà

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}(s) = sF(x, s) - f(x, 0^+),$$

mentre

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(x, t) dt = \frac{\partial}{\partial x} F(x, s).$$

Naturalmente si è implicitamente supposto che sia lecito il passaggio del segno di derivata fuori dal segno integrale.

Vediamo un semplice esempio.

Esempio 8.12.1 *Si consideri il problema alle derivate parziali:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}; \\ u(x, 0^+) = x; \\ u(0, t) = t. \end{cases} \quad (8.15)$$

Si vuole cioè trovare una funzione $u(x, t)$ definita su un opportuno dominio di \mathbb{R}^2 , che soddisfa l'equazione $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}$, soddisfa la condizione iniziale $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = x$ per ogni x , e soddisfa la condizione al contorno $u(0, t) = t$ per ogni t . Applicando l'operatore di Laplace all'equazione si ottiene l'equazione trasformata:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, s) = sU(x, s) - u(x, 0^+).$$

Questa è un'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine nella variabile x , nella quale s appare come parametro; la condizione iniziale impone $u(x, 0^+) = x$, dunque si ottiene l'equazione

$$\frac{dU}{dx}(x) = sU(x) - x,$$

che ha per soluzione la famiglia di funzioni

$$U(x) = ce^{sx} + \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

Il parametro c è costante rispetto a x , ma può ben dipendere da s . Le funzioni che otteniamo sono dunque del tipo

$$U(x, s) = c(s)e^{sx} + \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

La condizione $u(0, t) = t$, trasformata, diventa $U(0, s) = \frac{1}{s^2}$, da cui si ottiene $U(x, s) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}$ e antitrasformando $u(x, t) = x + t$.

Vediamo ora un esempio di applicazione delle trasformate di Laplace all'equazione della corda vibrante.

Esempio 8.12.2 *Si consideri il problema alle derivate parziali:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} & x > 0, t > 0; \\ y(x, 0^+) = 0; \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0^+) = 0; \\ y(0, t) = f(t) & (f(0) = 0); \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x, t) = 0. \end{cases} \quad (8.16)$$

L'equazione rappresenta il moto lungo l'asse y $y(x, t)$ di un punto di una corda di posizione x al tempo t , corda inizialmente ferma lungo l'asse x nella quale viene mosso l'estremo sinistro secondo l'andamento $f(t)$. Il parametro reale positivo a rappresenta la radice quadrata del rapporto tra la tensione della corda e la densità lineare della massa $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

L'equazione trasformata, imponendo le condizioni iniziali, si riduce ad un'equazione ordinaria lineare del secondo ordine:

$$s^2 Y = a^2 \frac{d^2 Y}{dx^2}.$$

La soluzione generale di tale equazione è

$$Y(x, s) = c_1 e^{-\frac{s}{a}x} + c_2(s) e^{\frac{s}{a}x}.$$

Imponendo le condizioni al contorno si ottiene la soluzione

$$Y(x, s) = F(s) e^{\frac{x}{a}s}.$$

Antitrasformando, tenendo presente la formula della funzione traslata 8.8, si ottiene

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right) u\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

La soluzione ci dice che la corda resta ferma nel tempo x per un tempo pari a $\frac{x}{a}$, dopodiché esibisce nel punto lo stesso moto che viene impresso nell'estremo sinistro della corda.

Il seguente esempio considera l'equazione del calore su un filo infinito.

Esempio 8.12.3 *Si consideri il problema alle derivate parziali:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{per } 0 < x < +\infty \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = \varphi(t) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0. \end{cases} \quad (8.17)$$

L'equazione rappresenta il flusso di calore in un filo infinito. La funzione $u(x, t)$ rappresenta la temperatura nel punto x al tempo t . La temperatura iniziale è nulla su tutto il filo. La temperatura nell'estremo sinistro viene modificata nel tempo secondo la legge $\varphi(t)$.

Trasformando parzialmente secondo la variabile t si ottiene

$$\begin{cases} sU(x, s) - \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2} = 0 \\ U(0, s) = \Phi(s) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, s) = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni dell'equazione ordinaria lineare

$$sy(x) - y''(x) = 0$$

sono del tipo

$$y(x) = ae^{\sqrt{s}x} + be^{-\sqrt{s}x};$$

cioè $U(x, s) = ae^{\sqrt{s}x} + be^{-\sqrt{s}x}$. Applicando la condizione iniziale $U(0, s) = \Phi(s)$ si ottiene $a + b = \Phi(s)$. D'altra parte, essendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, s) = 0$ necessariamente è $a = 0$ e quindi $b = \Phi(s)$ e $U(x, s) = \Phi(s)e^{-\sqrt{s}x}$. La nostra soluzione sarà perciò

$$u(x, t) = \varphi * \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}x}\}(t).$$

Non ci resta che calcolare l'antitrasformata della funzione $F(s) = e^{-\sqrt{s}x}$. Ricordando la formula di Riemann-Fourier si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{st} e^{-\sqrt{s}x} ds.$$

Supporremo $t > 0$ (nel caso opposto il calcolo è semplice).

Si noti che la funzione $e^{-\sqrt{s}x}$ è polidroma avendo un punto di diramazione in 0. Effettuiamo perciò un "taglio nel semiasse reale negativo. Avremo allora $\sqrt{s} = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\vartheta}{2}}$ se $s = \rho e^{i\vartheta}$. Consideriamo un circuito che comprende il segmento $[k - iR, k + iR]$, l'archetto di raccordo S_1 , l'arco di cerchio nel secondo quadrante $C_{R1} = \{Re^{i\vartheta} : \frac{\pi}{2} \leq \vartheta < \pi\}$, il segmento lungo il taglio nel secondo quadrante $\Gamma_1 = [-R, -\epsilon]$, il circoletto di raggio ϵ $C_\epsilon = \{\epsilon e^{i\vartheta} : \pi > \vartheta > -\pi\}$, il segmento lungo il taglio nel terzo quadrante $[-\epsilon, -R]$, l'arco di cerchio nel terzo quadrante $C_{R2} = \{Re^{i\vartheta} : -\pi < \vartheta \leq -\frac{\pi}{2}\}$, l'archetto di raccordo S_2 .

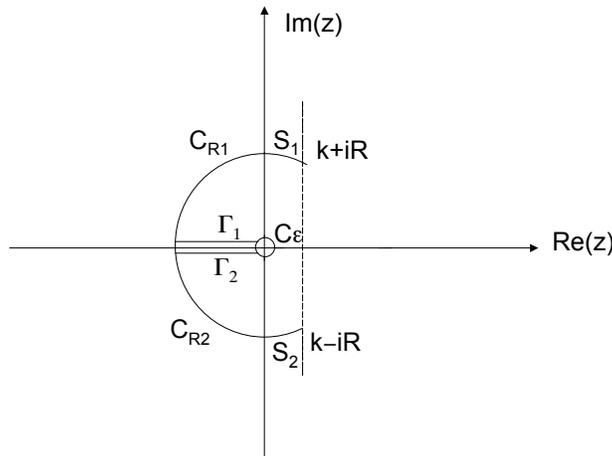


Figura 8.2: Calcolo dell'inversa.

Lungo gli archetti S_1 e S_2 il contributo è infinitesimo per $R \rightarrow +\infty$. Infatti, se $s \in S_1$ o $s \in S_2$ si ha $\Re(s) \leq \alpha$ e $\Re(\sqrt{s}) \geq \rho\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pertanto il modulo di $e^{st-x\sqrt{s}}$ si maggiora con $e^{\alpha t - \frac{x\rho}{\sqrt{2}}}$, una quantità infinitesima per $\rho \rightarrow +\infty$. L'integrale calcolato nel circoletto C_ϵ è invece infinitesimo per $\epsilon \rightarrow 0^+$ essendo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\vartheta} t} e^{-\sqrt{\epsilon} e^{i\frac{\vartheta}{2}} x} \epsilon i e^{i\vartheta} d\vartheta = 0.$$

Lungo gli archi C_{R_1} e C_{R_2} il contributo è pure infinitesimo per $R \rightarrow +\infty$. Vediamo ad esempio il caso $t > 0$ sull'arco C_{R_1} . Il modulo della funzione integranda sul cerchio C_{R_1} si può scrivere nella forma $e^{\rho t \cos \vartheta - \sqrt{\rho x} \cos \frac{\vartheta}{2}}$; e $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$. Ora, se $\frac{3}{4}\pi \leq \vartheta \leq \pi$ si ha $\cos \vartheta \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\cos(\frac{\vartheta}{2}) \geq 0$, perciò $e^{\rho t \cos \vartheta - \sqrt{\rho x} \cos \frac{\vartheta}{2}} \leq e^{-\rho t \frac{1}{\sqrt{2}}}$. Se invece $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{3}{4}\pi$ si ha $\cos \vartheta \leq 0$ ma $\cos(\frac{\vartheta}{2}) \geq \cos(\frac{3\pi}{8}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dunque si conclude che uniformemente rispetto a ϑ si ha $e^{\rho t \cos \vartheta - \sqrt{\rho x} \cos \frac{\vartheta}{2}} \leq \max\{e^{-\sqrt{\rho} \frac{x}{\sqrt{2}}}, e^{-\frac{\rho t}{\sqrt{2}}}\}$. Perciò il modulo è infinitesimo per $\rho \rightarrow +\infty$. In modo simile si ragiona nell'altro caso.

Valutiamo i contributi lungo i segmenti Γ_1 e Γ_2 .

Lungo il segmento Γ_1 l'argomento di s è π , dunque $s = -p$, $\sqrt{s} = \sqrt{p}i$ avendo posto $p := |s|$. Si ottiene allora

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-i\sqrt{p}x} dp.$$

Lungo il segmento Γ_2 l'argomento di s è $-\pi$, dunque $s = -p$, $\sqrt{s} = -\sqrt{p}i$. Si ottiene allora

$$-\int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{i\sqrt{p}x} dp.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{st} e^{-\sqrt{s}x} ds &= -\frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-i\sqrt{p}x} dp - \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{i\sqrt{p}x} dp \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{1}{2i} (e^{i\sqrt{p}x} - e^{-i\sqrt{p}x}) dp = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin(\sqrt{p}x) dp = \end{aligned}$$

e mediante la sostituzione $p = u^2$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} u e^{-u^2 t} \sin(ux) du.$$

Per calcolare l'ultimo integrale si può procedere nel modo seguente:

$$\begin{aligned} I(x, t) &= \int_0^{+\infty} u e^{-u^2 t} \sin(ux) du = \left[-\frac{1}{2t} e^{-u^2 t} \sin(ux) \right]_0^{+\infty} + \\ &+ \frac{x}{2t} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t} \cos(ux) du = \frac{x}{2t} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t} \cos(ux) du. \end{aligned}$$

Derivando rispetto a x la funzione $\frac{2t}{x} I(x, t)$ si ottiene

$$\frac{d}{dx} \left(I(x, t) \frac{2t}{x} \right) = - \int_0^{+\infty} u e^{-u^2 t} \sin(ux) du = -I(x, t);$$

cioè

$$\frac{dI}{dx} \frac{2t}{x} - I \frac{2t}{x^2} = -I$$

da cui

$$\frac{1}{I} \frac{dI}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2t}$$

e integrando

$$I(x, t) = A(t) x e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Per determinare $A(t)$ osserviamo che

$$\frac{dI}{dx} = A(t) e^{-\frac{x^2}{4t}} + A(t) x \left(-\frac{x}{2t}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

e quindi $\frac{dI}{dx}(0, t) = A(t)$. D'altra parte

$$\frac{dI}{dx} = \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2 t} \cos(ux) du$$

e per $x = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx}(0, t) &= \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2 t} du = \\ &= \left[-\frac{u}{2t} e^{-u^2 t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2t} e^{-u^2 t} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4t\sqrt{t}} \end{aligned}$$

cioè $A(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4t\sqrt{t}}$ e

$$I(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4t\sqrt{t}} x e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Si ottiene allora

$$f(t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

e la soluzione del problema è

$$u(x, t) = \varphi * \frac{x}{2\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

8.13 Il comportamento asintotico della trasformata.

In molti casi è difficile o addirittura impossibile calcolare esplicitamente la trasformata o l'anti-trasformata di una funzione assegnata. Risulta quindi molto utile poter studiare alcune proprietà della funzione trasformata F utilizzando la conoscenza della funzione f o, viceversa, poter studiare alcune proprietà della funzione f utilizzando proprietà note della funzione trasformata F , senza ricorrere al calcolo esplicito delle funzioni che interessano. Un teorema che ci dà informazioni sulla funzione trasformata F , assumendo note le proprietà della funzione f si dice *teorema abeliano*.

Un teorema che ci dà informazioni sulla funzione f , assumendo note le proprietà della funzione trasformata F si dice *teorema tauberiano*.

Un primo esempio di teorema abeliano può essere considerato il teorema 8.4.4.

Un altro teorema abeliano è il seguente:

Teorema 8.13.1 *Sia f una funzione trasformabile e supponiamo che esista $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$; allora esiste anche il $\lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s)$ (supponiamo per comodità $s \in \mathbb{R}$) e vale*

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

Se esiste $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ allora esiste anche il $\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$ e vale (con $s \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t).$$

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema nell'ipotesi aggiuntiva in cui la funzione f sia derivabile su $]0, +\infty[$ e la funzione f' sia assolutamente trasformabile. Supponiamo che esista $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ e proviamo che esiste pure $\lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s)$.

Si ha per il Teorema 8.6.1 $\mathcal{L}f' = sF(s) - f(0^+)$, da cui

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{L}f'(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s) - f(0^+).$$

Usando la definizione di trasformata si ottiene anche

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{L}f'(s) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \lim_{s \rightarrow 0^+} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0^+); \end{aligned}$$

da cui la tesi, purché si possa giustificare il passaggio del limite sotto il segno integrale. Per fare ciò ricorreremo al teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Sia λ_0 l'ascissa di assoluta convergenza della f' . Sia $\lambda > \lambda_0$ e si ponga $g(t) = e^{-\lambda t} |f'(t)|$. Poiché la funzione f' è assolutamente trasformabile la funzione $g(t)$ è integrabile su $[\lambda, +\infty]$ e domina la funzione $e^{-st} f'(t)$ (cioè $|e^{-st} f'(t)| \leq g(t)$ se $s \geq \lambda$). Per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue si può portare il segno di limite all'interno del segno integrale.

Supponiamo ora che esista $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$. Sempre nell'ipotesi semplificata si avrà

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}f'(t)(s) + f(0^+) = f(0^+);$$

tenendo conto del Teorema 8.4.4 applicato alla funzione f' . □

Il teorema 8.13.1 ci permette tra l'altro di calcolare $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ utilizzando le trasformate se è noto che tali limiti esistono. Questo può essere molto importante se ad esempio la funzione f è la soluzione di un'equazione differenziale. Si noti però che la conoscenza a priori dell'esistenza del limite è essenziale. Ad esempio si consideri la funzione $f(t) = \sin t$. La trasformata di f è $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ e quindi $\lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s) = 0$, mentre non esiste $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Esempio 8.13.1 Sia $F(s) = \frac{\tanh s}{s(s^2+1)}$. Si trovino $f(0)$ e $f'(0)$, supposti esistenti.

Poiché supponiamo esistenti $f(0^+)$ e $f'(0^+)$ si può applicare il Teorema 8.13.1. Si ha allora

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\tanh s}{(s^2+1)} = 0.$$

Inoltre $\mathcal{L}f' = sF - f(0) = \frac{\tanh s}{(s^2+1)}$, pertanto

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}f' = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s \tanh s}{(s^2+1)} = 0.$$

Dunque $f(0) = f'(0) = 0$.

8.14 Esercizi

Esercizio 8.14.1 Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = t^{-\frac{1}{2}}.$$

(Sol. $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$.)

Esercizio 8.14.2 Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = n \quad \text{se } n-1 < t \leq n \text{ per } n \in \mathbb{N}.$$

(Sol. $F(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1-e^{-s}}$.)

Esercizio 8.14.3 Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = (-1)^{[t]}$$

dove $[t] = \min\{n \in \mathbb{N} : t \geq n\}$ è la parte intera di t (onda quadra).

Esercizio 8.14.4 Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$ rappresentata in figura (onda triangolare):

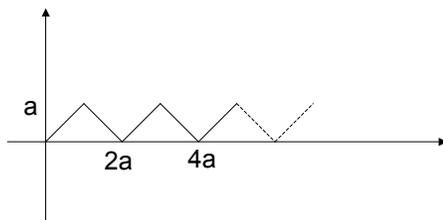


Figura 8.3: Onda triangolare.

(Sol. $F(s) = \frac{1}{s^2} \tanh \frac{s}{2}$).

Esercizio 8.14.5 Si calcoli l'antitrasformata della funzione

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + a^3} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

(Sol. $f(t) = \frac{1}{3a^2} \left(e^{-at} - e^{\frac{a}{2}t} \cos\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}t\right) + \sqrt{3}e^{\frac{a}{2}t} \sin\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}t\right) \right) u(t)$.)

Esercizio 8.14.6 Si calcoli l'antitrasformata della funzione

$$F(s) = \frac{e^{-as}}{s^2} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

(Sol. $f(t) = (t - a)u(t - a)$.)

Esercizio 8.14.7 Si calcoli l'antitrasformata della funzione

$$F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s^2 + 2s + 2)^2}.$$

(Sol. $f(t) = e^{-t} \left(t \left(-\frac{3}{2} \cos t - \sin t \right) + \frac{5}{2} \sin t \right) u(t)$.)

Esercizio 8.14.8 Si calcoli l'antitrasformata della funzione

$$F(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right).$$

(Sol. $f(t) = \frac{\sin t}{t} u(t)$.)

Esercizio 8.14.9 Si calcoli l'antitrasformata della funzione

$$F(s) = \ln \frac{s^2 + 1}{(s + 2)(s - 3)}.$$

(Sol. $f(t) = \frac{1}{t}(e^{3t} + e^{-2t} - 2 \cos t)u(t)$.)

Esercizio 8.14.10 Si calcoli l'antitrasformata della funzione

$$F(s) = \frac{1}{(s - 1)\sqrt{s}}.$$

(Sol. $f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du$.)

Esercizio 8.14.11 Si calcolino le antitrasformate delle funzioni

$$F(s) = \frac{s(1 + e^{-3s})}{s^2 + \pi^2} \quad e$$

$$G(s) = \frac{s(1 + e^{-3s})}{(1 - e^{-3s})(s^2 + \pi^2)}.$$

(Sol. $g(t)|_{[k, k+3)} = \cos \pi t$ per $k \in \mathbb{N}$.)

Esercizio 8.14.12 Risolvere con la trasformata di Laplace il problema

$$\begin{cases} x'' + 4x' + 13x = te^{-t}; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 2. \end{cases}$$

(Sol. $x(t) = \frac{1}{50}((5t - 1)e^{-t} + e^{-2t}(\cos 3t + 32 \sin 3t))u(t)$.)

Esercizio 8.14.13 Risolvere con la trasformata di Laplace il problema

$$\begin{cases} x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0; \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0; \\ x'''(0) = 1. \end{cases}$$

(Sol. $x(t) = \frac{1}{16}(\sin 2t - 2t \cos 2t)u(t)$.)

Esercizio 8.14.14 Risolvere con la trasformata di Laplace il problema

$$\begin{cases} x''' + 2x'' + x' = f(t); \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \end{cases}$$

dove $f(t)$ è una funzione assegnata. (Sol. $x(t) = \int_0^t [1 - (1 + t - u)e^{-(t-u)}]f(u)du$.)

Esercizio 8.14.15 Risolvere con la trasformata di Laplace il problema

$$\begin{cases} x'' + tx' + x = 0; \\ x(0) = 1; \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

(Sol. $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} u(t)$.)

Esercizio 8.14.16 Risolvere con la trasformata di Laplace il problema

$$\begin{cases} x' = -4x - y + e^{-t}; \\ y' = x - 2y; \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}.$$

(Sol. $x(t) = (-\frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{2}te^{-3t} + \frac{1}{4}e^{-t})u(t)$; $y(t) = (-\frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{2}te^{-3t} + \frac{1}{4}e^{-t})u(t)$.)

Negli esercizi che seguono si chiede di risolvere un circuito di equazione

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q(t) = e(t); \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

con $q(0) = 0$.

Esercizio 8.14.17 $L = 1, R = 0, C = 10^{-4}$;

$$e(t) = \begin{cases} 100 & \text{se } 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{se } t \geq 2\pi \end{cases}.$$

(Sol. $i(t) = (1 - u(t - 2\pi))(\sin 100t)u(t)$.)

Esercizio 8.14.18 $L = 1, R = 100, C = 4 \cdot 10^{-4}$;

$$e(t) = \begin{cases} 50t & \text{se } 0 \leq t < 1; \\ 0 & \text{se } t > 1 \end{cases}.$$

(Sol. $i(t) = \frac{1}{50}[(1 - e^{-50t})^2 - u(t - 1)(1 + 98e^{-50(t-1)} - 99e^{-100(t-1)})]u(t)$.)

Esercizio 8.14.19 Una massa di peso unitario è attaccata ad una molla leggera che viene tesa di 1 metro da una forza di 4 kg. La massa è inizialmente a riposo nella sua posizione di equilibrio. All'istante $t = 0$ una forza esterna $f(t) = \cos(2t)$ viene applicata alla massa, ma al tempo $t = 2\pi$ la forza viene spenta istantaneamente. Si trovi la funzione posizione $x(t)$ della massa. (Il problema si traduce nell'equazione $x'' + 4x = f(t)$; $x(0) = x'(0) = 0$.)

(Sol. $x(t) = \frac{1}{4}t(\sin 2t)u(t)$ se $t < 2\pi$ e $x(t) = \frac{\pi}{2} \sin 2t$ se $t \geq 2\pi$.)

Capitolo 9

Alcuni esercizi del tipo dato agli esami

9.1 Uso dei residui

Esercizio 9.1.1 Usando il metodo dei residui, si calcoli

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x) dx}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

SOLUZIONE

Troviamo le radici del polinomio $x^4 + 5x^2 + 4$: se $x^2 = t$, si ha $t^2 + 5t + 4 = 0$ per $t = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = -4, -1$. Perciò vale $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 4)(x^2 + 1)$. Le radici del polinomio considerato sono perciò: $\pm 2i, \pm i$. Le radici che stanno nel semipiano superiore sono dunque $2i$ e i . Consideriamo ora la funzione $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z^2+1)} = \frac{e^{iz}}{z^4+5z^2+4}$. Si consideri il cammino $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$ dove $C_R = \{z = Re^{i\vartheta} : 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$, cioè il segmento che va da $-R$ a $+R$ seguito dalla semicirconferenza che sta nel semipiano superiore di raggio R . Se $R > 2$ il cammino racchiude i due poli semplici in $z = i$ e $z = 2i$. Inoltre, in base al lemma di Jordan, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$. Dunque, per il teorema dei residui

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \{Res(f, i) + Res(f, 2i)\}.$$

Ora in un polo semplice z_0 , si ha $Res(f, z_0) = \frac{e^{iz_0}}{4z_0^3 + 10z_0}$. Perciò $Res(f, i) = \frac{e^{-1}}{i(-4+10)}$ e $Res(f, 2i) = \frac{e^{-2}}{2i(-16+10)}$. Abbiamo dunque

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \left\{ \frac{e^{-1}}{i6} + \frac{e^{-2}}{-12i} \right\} = 2\pi \left\{ \frac{e^{-1}}{6} - \frac{e^{-2}}{12} \right\}.$$

Prendendo il limite per $R \rightarrow \infty$, si ha $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^4+5x^2+4} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos x + i \sin x) dx}{x^4+5x^2+4} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^4+5x^2+4}$. Infatti si è tenuto conto che, per ragioni di simmetria, l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^4+5x^2+4} = 0$

e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^4+5x^2+4} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^4+5x^2+4}$. Infatti $\sin x$ è funzione dispari, $\cos x$ e $x^4 + 5x^2 + 4$ sono funzioni pari. Il risultato è quello sopra riportato. **NB. NON** si può considerare la funzione $f(z) = \frac{\cos z}{z^4+5z^2+4}$ infatti $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. Mentre $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^4+5z^2+4} = 0$ per il lemma di Jordan, ciò **NON** è vero per $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{-iz}}{z^4+5z^2+4}$. \square

Esercizio 9.1.2 Utilizzando il metodo dei residui si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(mx)}{(x^2+1)^2} dx \quad m > 0 \quad .$$

Esercizio 9.1.3 Si calcoli usando il metodo dei residui l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4+16} dx .$$

Esercizio 9.1.4 Usando il metodo dei residui, si calcoli

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-1/3}}{1+x} dx .$$

Esercizio 9.1.5 Usando il metodo dei residui, si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{1+x^4} dx .$$

Esercizio 9.1.6 Usando il metodo dei residui, si calcoli

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\operatorname{sen}(\vartheta)+2} .$$

Esercizio 9.1.7 Usando il metodo dei residui, si calcoli

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \operatorname{sen}(x)}{1+x^4} dx .$$

Esercizio 9.1.8 Facendo uso del metodo dei residui, si calcolino gli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2-2x+2} dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2-2x+2} dx .$$

Esercizio 9.1.9 Si sviluppi in fratti semplici la funzione

$$f(x) = \frac{3x^3+x^2-1}{(x+1)^2(x-2)} .$$

Esercizio 9.1.10 Si sviluppi in fratti semplici la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)}.$$

Esercizio 9.1.11 Usando il metodo dei residui, si calcoli

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

9.2 serie di Fourier

Esercizio 9.2.1 È data la funzione $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$, per $-\pi \leq x \leq \pi$. (i) Se ne determini lo sviluppo in serie di Fourier.

(ii) Si dica se la convergenza è puntuale o uniforme.

(iii) Utilizzando l'identità di Parseval, si calcoli il valore della serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Esercizio 9.2.2 È data la funzione $f(x) = |x|(\pi - |x|)$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.

(i) Se ne determini lo sviluppo in serie di Fourier.

(ii) Si dica, giustificando l'affermazione, se la convergenza è puntuale o uniforme.

(iii) Si valuti la serie in $x = \frac{\pi}{2}$ e se ne deduca la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Esercizio 9.2.3 Si sviluppi in serie di Fourier la funzione $f(x) = 0$ per $0 \leq x < \pi$ e $f(x) = -x$ per $-\pi < x \leq 0$.

Esercizio 9.2.4 Si sviluppi in serie di Fourier la funzione $f(x) = |x|$ definita su $[-\pi, \pi]$.

Esercizio 9.2.5 È data la funzione $f(x) = 1$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$ se $0 \leq x < \pi$.

(i) Se ne determini lo sviluppo in serie di Fourier.

(ii) Si dica se la convergenza è puntuale o uniforme.

(iii) Considerato il valore di $f(0)$, si calcoli la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Esercizio 9.2.6 È data la funzione $f(x) = x$ per $-\pi < x \leq 0$ e $f(x) = 0$ per $0 \leq x < \pi$.

(i) Se ne determini lo sviluppo in serie di Fourier.

(ii) Si dica se la convergenza è puntuale o uniforme.

(iii) Si valuti $f(0)$ e, di conseguenza, si calcoli il valore della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

9.3 Trasformate di Fourier

Esercizio 9.3.1 Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = x^2 e^{-2x} u(x)$, (dove $u(x)$ è la funzione gradino). Si valutino di conseguenza le trasformate di $f'(x)$ e di $f(\frac{x}{3})$.

Esercizio 9.3.2 Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$. Si valutino di conseguenza le trasformate di $f''(x)$ e di $e^{-iax} f(x)$.

Esercizio 9.3.3 Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$. Si valutino di conseguenza le trasformate di $f(2x)$ e di $e^{i\pi x} f(x)$.

Esercizio 9.3.4 Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$. Si valutino di conseguenza le trasformate di $f'(x)$ e di $f(x-a)$.

Esercizio 9.3.5 Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$. Si valutino di conseguenza le trasformate di $f'(x)$ e di $f(3x)$.

Esercizio 9.3.6 Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = \text{sign}(x) \cdot e^{-\pi|x|}$. Si valutino di conseguenza le trasformate di $e^{ix} f(x)$ e di $f(x+1)$. ($\text{sign}(x)$ è la funzione segno: vale 1 se $x > 0$ e -1 se $x < 0$).

Esercizio 9.3.7 Si calcoli la trasformata di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \left(\frac{1}{2} - |x| \right).$$

Usando il precedente risultato si calcolino poi le trasformate di $[\cos(x) f(x)]$ e di $f(\frac{x}{2})$.

9.4 Trasformate di Laplace e equazioni lineari ordinarie

Esercizio 9.4.1 È data l'equazione differenziale lineare $y'' + 4y' + 4y = f(t)$. Si determini

(i) la risposta impulsiva $h(t)$, cioè relativa a $f(t) = \delta(t)$ (dove $\delta(t)$ è la delta di Dirac),

(ii) la risposta forzata con condizioni iniziali nulle relativa a $f(t) = \sin(2t)u(t)$ (dove $u(t)$ è la funzione gradino di Heaviside).

Esercizio 9.4.2 È data l'equazione differenziale lineare $y'' + 2y' + 4y = f(t)$. Si determini

(i) la risposta impulsiva $h(t)$, cioè relativa a $f(t) = \delta(t)$,

(ii) la risposta forzata con condizioni iniziali nulle relativa a $f(t) = \cos(3t)u(t)$.

Esercizio 9.4.3 È data l'equazione differenziale lineare $y'' + 5y' + 6y = f(t)$. Si determini

(i) la risposta impulsiva $h(t)$, cioè relativa a $f(t) = \delta(t)$,

(ii) la risposta forzata con condizioni iniziali nulle relativa a $f(t) = \cos(2t)u(t)$.

Esercizio 9.4.4 È data l'equazione differenziale lineare $2y'' + 5y' + 2y = f(t)$. Si determini

(i) la risposta impulsiva $h(t)$, cioè relativa a $f(t) = \delta(t)$,

(ii) la risposta forzata con condizioni iniziali nulle relativa a $f(t) = \sin(t)u(t)$.

Esercizio 9.4.5 È data l'equazione differenziale lineare $y'' + 9y = f(t)$. Si determini (i) la risposta impulsiva $h(t)$, cioè relativa a $f(t) = \delta(t)$ e (ii) la risposta forzata con condizioni iniziali nulle relativa a $f(t) = \cos(t)u(t)$.

Esercizio 9.4.6 È data l'equazione differenziale

$$y'' + y' - 2y = f(t).$$

Usando la trasformata di Laplace, la si risolva nei casi $f(t) = \delta(t)$ e $f(t) = e^{-t}u(t)$, con condizioni iniziali nulle.

Esercizio 9.4.7 È data l'equazione differenziale lineare $y'' + 4y = f(t)$. Si determini

(i) la risposta impulsiva $h(t)$, cioè relativa a $f(t) = \delta(t)$,

(ii) la risposta forzata con condizioni iniziali nulle relativa a $f(t) = \cos(2t)u(t)$.

Bibliografia

Quella che segue è una breve lista dei libri consultati per preparare le presenti note.

Bibliografia

- [1] L. Amerio, *Elementi di Analisi superiore*, Tamburini, Milano (1960).
- [2] G. Bagnera, *Lezioni sopra la teoria delle funzioni analitiche*, Sanpaolesi, Roma (1927).
- [3] Barozzi G. C. *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione*, Zanichelli, Bologna (2001).
- [4] Churchill R.V. *Fourier Series and Boundary Value Problems*, International Student Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, San Francisco, Toronto, London e Kōgakusha Company, ltd, Tokyo (1963).
- [5] Codegone M. *Metodi Matematici per l'Ingegneria*, Zanichelli, Bologna (1995).
- [6] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, Spriger-Verlag, New York (1978).
- [7] R. Courant e D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Voll. I e II, Interscience, New York (1962).
- [8] R. Courant e K. O. Friedrichs, *Supersonic flow and shock waves*, Interscience Publ., New York (1948).
- [9] B. Finzi, *Meccanica Razionale*, Vol. II, Zanichelli, Bologna (1960).
- [10] B. Friedman, *Principle and technics of applied mathematics*, John Wiley & Sons, New York (1965).
- [11] Gilardi G. *Analisi tre*, McGraw-Hill Libri Italia, Milano (1994).
- [12] E. Goursat, *A course of Mathematical Analysis - Functions of a complex variable*, Vol. II. Part one, Dover, New York (1959).
- [13] E. Hille, *Analytic function theory*, Blaidswell, Voll. I e II, New York (1963).
- [1] Jean-Pierre Kahane e Ytzhak Katznelson, *Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques*, Studia Mathematica, **XXVI**, (1966), 305.
- [14] Ytzhak Katznelson, *Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques*, Studia Mathematica, **XXVI**, (1966), 301.
- [15] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press (1993).
- [16] I. G. Petrovsky, *Lectures on partial differential equations*, Interscience Publ., New York (1964).

- [17] Rudin W. *Functional Analysis*, 2nd ed. (International Series on Pure and Applied Mathematics) McGraw-Hill Inc., New York (1991).
- [18] D. E. Rutherford, *Fluid Dynamics*, Oliver and Boyd, Edinburgh (1959).
- [19] G. Sansone, *Lezioni sulla teoria di una variabile complessa*, Voll. I e II, Cedam, Padova (1955).
- [20] V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, Vol. II, Éditions MIR, Moscou (1970)
- [21] A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*, Academic Press Publ., New York (1949).
- [22] Tran Duc Van, Mikio Tsuji, Nguyen Duy Thai Son, *The characteristic method and its generalizations for first-order nonlinear partial differential equations*, Chapman& Hall/CRC, Boca Raton (2000).
- [23] F. Tricomi, *Equazioni a derivate parziali*, Cremonese, Roma (1964).
- [24] F. Tricomi, *Funzioni analitiche*, Zanichelli, Bologna (1961).
- [25] Weinberger H.F. *A first course in Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York (1965).
- [26] E.T. Whittaker e G.N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (1962).