Capitolo Sedicesimo

CENNO SULLE SUPERFICI

§ 1. LA NOZIONE DI SUPERFICIE

In tutto il Capitolo, chiameremo *dominio* un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^2$ che sia *la chiusura di un aperto connesso*.
Sono tali, per esempio, i domini ammissibili del Capitolo 13 sugli integrali di Riemann e i domini regolari del Capitolo 15 sulle curve.

DEFINIZIONE. Data un'applicazione φ di un dominio K in $\mathbb{R}^3$, si ponga $\Sigma = \varphi(K)$. La coppia (φ, Σ) prende il nome di *superficie*. L'applicazione φ si chiama *rappresentazione parametrica* della superficie, mentre l'insieme Σ è detto il suo *sostegno.*

Si ha $\qquad \varphi(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v))^T$, ossia $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

e $\qquad \Sigma = \{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))^T \colon (u,v) \in K\}$.

Per assegnare una superficie è sufficiente assegnare l'applicazione φ; per questo motivo, ci permetteremo espressioni del tipo: "Data una superficie φ …", in luogo di "Data una superficie (φ, Σ) …".

DEFINIZIONE. Una superficie (φ, Σ) è detta *semplice* se da $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in K$, $\underline{u}_1 \neq \underline{u}_2$ e almeno uno dei due interno a K segue $\varphi(\underline{u}_1) \neq \varphi(\underline{u}_2)$.

DEFINIZIONE. Una superficie (φ, Σ) è detta *regolare* se l'applicazione φ soddisfa alle seguenti condizioni:
1) è di classe C^1 sul dominio K (cfr. Cap. 12, §1);
2) per ogni $\underline{u}$ interno a K, è uguale a 2 il rango (o la caratteristica) della matrice Jacobiana

$$J(\varphi(\underline{u})) = \begin{pmatrix} x_u(\underline{u}) & x_v(\underline{u}) \\ y_u(\underline{u}) & y_v(\underline{u}) \\ z_u(\underline{u}) & z_v(\underline{u}) \end{pmatrix}.$$

ESEMPI. 1) Si consideri la superficie (φ, Σ), con $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\varphi(u,v) = (a_1u + b_1v + c_1, a_2u + b_2v + c_2, a_3u + b_3v + c_3)^T$, $a_i,b_i,c_i \in \mathbb{R}$. fissati. Si tratta di un superficie regolare semplice il cui sostegno Σ è un piano passante per il punto $\underline{x}^0 = (c_1,c_2,c_3,)^T$.

2) Si consideri la superficie (φ, Σ), con $\varphi \colon K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ e φ definita da $\varphi(u,v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)^T$, $R \in \mathbb{R}^+$ fissato. Si tratta di una superficie regolare semplice il cui sostegno Σ è la superficie sferica di centro nell'origine e raggio R.

3) Si consideri la superficie (φ, Σ), con φ: $K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, \pi] \times [0, 1]$ e φ definita da $\varphi(u,v) = (Rv \cos u, Rv \sin u, cRv)^T$, $R,c \in \mathbb{R}^+$. Si tratta di una superficie regolare semplice il cui sostegno Σ è una porzione di cono.

4) Si consideri la superficie (φ,Σ), con φ: $K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, 3\pi] \times \mathbb{R}$ e φ definita da $\varphi(u,v) = (R \cos u, R \sin u, v)^T$, $R \in \mathbb{R}^+$. Si tratta di una superficie regolare, ma non semplice il cui sostegno Σ è un cilindro.

5) Si consideri la superficie (φ,Σ), con φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, e φ definita da $\varphi(u,v) = (u, |u|, v)^T$. Si tratta di una superficie semplice ma non regolare, il cui sostegno Σ è ancora un cilindro.

§ 2. LINEE COORDINATE, VERSORE NORMALE E PIANO TANGENTE

Sia data una superficie *regolare semplice* (φ,Σ), con φ: $K \to \mathbb{R}^3$ definita da $\varphi(\underline{u}) = \varphi(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v))^T$.

DEFINIZIONE. Fissato $\underline{u}^0 = (u_0,v_0)^T \in$ *int* K, le curve $\varphi(u,v_0)$ e $\varphi(u_0,v)$ prendono il nome di *linee coordinate* su Σ (passanti) per $\underline{x}^0 = \varphi(u_0,v_0)$.

Le rappresentazioni parametriche delle linee coordinate per $\underline{x}^0$ sono dunque

$$\varphi(u,v_0) = (x(u,v_0),y(u,v_0),z(u,v_0))^T \text{ e } \varphi(u_0,v) = (x(u_0,v),y(u_0,v),z(u_0,v))^T.$$

I vettori tangenti alle linee coordinate per $\underline{x}^0$ sono, rispettivamente,

$$\varphi_u(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} x_u(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) \\ z_u(u_0,v_0) \end{pmatrix}; \qquad \varphi_v(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} x_v(u_0,v_0) \\ y_v(u_0,v_0) \\ z_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}.$$

La condizione (2) della definizione di superficie regolare ci dice che i vettori $\varphi_u(u_0,v_0)$ e $\varphi_v(u_0,v_0)$ sono *linearmente indipendenti*, ossia sono *non nulli* e *non paralleli*. Ciò si può esprimere con la condizione

$$\varphi_u(u_0,v_0) \wedge \varphi_v(u_0,v_0) \neq \underline{0}.$$

Poiché il vettore $\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)$ è ortogonale sia a $\varphi_u(\underline{u}^0)$ sia a $\varphi_v(\underline{u}^0)$, si può dare la seguente

DEFINIZIONE. Il versore

$$\nu(\underline{u}^0) := \frac{\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)}{\|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\|}$$

è detto versore *normale* a Σ in $\underline{x}^0 = \varphi(\underline{u}^0)$.

Il vettore $\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)$ si ottiene sviluppando secondo la prima riga il determinante formale

$$\begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ x_u(\underline{u}^0) & y_u(\underline{u}^0) & z_u(\underline{u}^0) \\ x_v(\underline{u}^0) & y_v(\underline{u}^0) & z_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_u(\underline{u}^0) & z_u(\underline{u}^0) \\ y_v(\underline{u}^0) & z_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} \underline{e}_1 - \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}^0) & z_u(\underline{u}^0) \\ x_v(\underline{u}^0) & z_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} \underline{e}_2 + \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}^0) & y_u(\underline{u}^0) \\ x_v(\underline{u}^0) & y_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} \underline{e}_3.$$

I vettori $\varphi_u(\underline{u}^0)$ e $\varphi_v(\underline{u}^0)$ applicati in $\underline{x}^0 = \varphi(\underline{u}^0)$, non essendo paralleli, individuano un piano ortogonale a $\nu(\underline{u}^0)$ e passante per $\underline{x}^0$.

DEFINIZIONE. Il piano $\sigma_{\underline{x}0}(\lambda,\mu)$ (passante per $\underline{x}^0 = \varphi(\underline{u}^0)$) generato dai vettori $\varphi_u(\underline{u}^0)$ e $\varphi_v(\underline{u}^0)$ prende il nome di *piano tangente* a Σ in $\underline{x}^0$.

Il piano $\sigma_{\underline{x}0}(\lambda,\mu)$ tangente a Σ in $\underline{x}^0 = \varphi(\underline{u}^0)$ ha dunque la seguente *rappresentazione parametrica*:

$$\underline{x} = \underline{x}^0 + \lambda\varphi_u(\underline{u}^0) + \mu\varphi_v(\underline{u}^0), \quad (\lambda,\mu)^T \in \mathbb{R}^2.$$

Un punto $\underline{x} \neq \underline{x}^0$ appartiene al piano $\sigma_{\underline{x}0}(\lambda,\mu)$ se e solo se il vettore $\underline{x} - \underline{x}^0$ è ortogonale al versore ν e quindi al vettore $\varphi_u(u_0,v_0) \wedge \varphi_v(u_0,v_0)$, cioè se e solo se è

$$<\underline{x} - \underline{x}^0, \varphi_u(u_0,v_0) \wedge \varphi_v(u_0,v_0)> = 0.$$

Si ottiene così l'*equazione cartesiana del piano tangente* $\sigma_{\underline{x}0}(\underline{u})$:

$$\begin{vmatrix} y_u(\underline{u}^0) & z_u(\underline{u}^0) \\ y_v(\underline{u}^0) & z_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}^0) & z_u(\underline{u}^0) \\ x_v(\underline{u}^0) & z_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}^0) & y_u(\underline{u}^0) \\ x_v(\underline{u}^0) & y_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} (z - z_0) = 0.$$

ESEMPI. 1) Si consideri ancora la superficie sferica (φ,Σ) dell'Esempio 1 del § 1: φ: $K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$, $\varphi(u,v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)^T$, $R \in \mathbb{R}^+$. Se è $\underline{u}^0 \in$ *int K*, si ha:

$$\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ R \cos u_0 \cos v_0 & R \cos u_0 \sin v_0 & -R \sin u_0 \\ -R \sin u_0 \sin v_0 & R \sin u_0 \cos v_0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^2 \sin^2 u_0 \cos v_0\, \underline{e}_1 + R^2 \sin^2 u_0 \sin v_0\, \underline{e}_2 + R^2 \cos u_0 \sin u_0\, \underline{e}_3,$$

da cui

$$\|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\| = R^2\sqrt{\sin^4 u_0 \cos^2 v_0 + \sin^4 u_0 \sin^2 v_0 + \cos^2 u_0 \sin^2 u_0} =$$

$$= R^2\sqrt{\sin^4 u_0 + \cos^2 u_0 \sin^2 u_0} = R^2|\sin u_0| = R^2 \sin u_0,$$

essendo $u \in]0, \pi[$. Si ottiene:

$$\nu(\underline{u}^0) = \sin u_0 \cos v_0\, \underline{e}_1 + \sin u_0 \sin v_0\, \underline{e}_2 + \cos u_0\, \underline{e}_3.$$

L'equazione del piano tangente a Σ in $\underline{x}^0 = \varphi(\underline{u}^0)$ è dunque

$$R^2 \sin^2 u_0 \cos v_0 (x - x_0) + R^2 \sin^2 u_0 \sin v_0 (y - y_0) + R^2 \cos u_0 \sin u_0 (z - z_0) = 0$$

e dunque, essendo $\sin u_0 \neq 0$,

$$\sin u_0 \cos v_0 \,(x - x_0) + \sin u_0 \sin v_0 \,(y - y_0) + \cos u_0 \,(z - z_0) = 0.$$

2) Si consideri ancora la superficie (φ, Σ) dell'Esempio 2 del § 1, $\varphi: K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, \pi] \times [0, 1]$, $\varphi(u,v) = (Rv \cos u, Rv \sin u, cR\, v)^T$, $R,c \in \mathbb{R}^+$. Se è $\underline{u}^0 \in int\, K$, si ha:

$$\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ -Rv_0 \sin u_0 & Rv_0 \cos u_0 & 0 \\ R \cos u_0 & R \sin u_0 & cR \end{vmatrix} =$$

$$= cR^2 v_0 \cos u_0\, \underline{e}_1 + cR^2 v_0\, \sin u_0\, \underline{e}_2 - R^2 v_0 \underline{e}_3;$$

$$\|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\| = R^2 v_0 \sqrt{c^2 \cos^2 u_0 + c^2 \sin^2 u_0 + 1} = R^2 v_0 \sqrt{1 + c^2}.$$

Si ottiene:

$$\nu(\underline{u}^0) = \frac{c \cos u_0}{\sqrt{1 + c^2}} \underline{e}_1 + \frac{c \sin u_0}{\sqrt{1 + c^2}} \underline{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \underline{e}_3.$$

Essendo $\sqrt{1 + c^2} \neq 0$, l'equazione del piano tangente a Σ in $\underline{x}^0 = \varphi(\underline{u}^0)$ è dunque

$$c \cos u_0 \,(x - x_0) + c \sin u_0 \,(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Superfici regolari in forma cartesiana. Data una funzione f: $K(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ di classe C^1 sul dominio K, resta individuata la superficie φ: $K \to \mathbb{R}$ di rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases} .$$

È chiaro che il sostegno Σ di tale superficie è il grafico della f. Poiché la matrice Jacobiana è

$$J(\varphi(\underline{u})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u(\underline{u}) & f_v(\underline{u}) \end{pmatrix},$$

se è $\underline{u}^0 \in int\, K$, si ha:

$$\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 0 & f_u(\underline{u}^0) \\ 0 & 1 & f_v(\underline{u}^0) \end{vmatrix} = -f_u\,(\underline{u}^0)\, \underline{e}_1 - f_v\,(\underline{u}^0)\, \underline{e}_2 + \underline{e}_3;$$

$$\|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\| = \sqrt{1 + \|\nabla f(\underline{u}^0)\|^2}.$$

Notiamo che è

$$<\nu(\underline{u}^0), \underline{e}_3> = \frac{<\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0), \underline{e}_3>}{\|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f(\underline{u}^0)\|^2}} > 0.$$

Essendo $z_0 = f(x_0,y_0)$, l'equazione del piano tangente è (cfr. Capitolo 12, § 1):

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

ESEMPI. 3) Dato il piano di equazione $z = ax + by + c$, il vettore normale $\varphi_u \wedge \varphi_v$ è costante e si ha

$$\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0) = -a\,\underline{e}_1 - b\,\underline{e}_2 + \underline{e}_3; \quad \|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\| = \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

4) Dato il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$, si ha

$$\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0) = -2u_0\,\underline{e}_1 - 2v_0\,\underline{e}_2 + \underline{e}_3; \quad \|\varphi_u(\underline{u}^0) \wedge \varphi_v(\underline{u}^0)\| = \sqrt{1 + 4u_0^2 + 4v_0^2}.$$

L'equazione del piano tangente è

$$z = z_0 + 2u_0\,(x - x_0) + 2v_0\,(y - y_0).$$

Superfici regolari in forma implicita. Sia $g: A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su un aperto A di $\mathbb{R}^3$ e sia $\Sigma = \{(x,y,z)^T: g(x,y,z) = 0\}$. Si può dimostrare che, per ogni $\underline{x}^0 \in \Sigma$, con $\nabla g(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$, esistono un intorno U di $\underline{x}^0$ e una funzione $z = f(x,y)$ [o una funzione $y = k(x,z)$ o una funzione $x = h(y,z)$] di classe C^1 tali che $\Sigma \cap U = G(f)$ (= grafico di f) [o, rispettivamente, $\Sigma \cap U = G(k)$, $\Sigma \cap U = G(h)$]. Si dice che la funzione f [la funzione k o, rispettivamente, la funzione h] è definita *implicitamente* dall'equazione $g(\underline{x}) = 0$.

ESEMPI. 5) Siano

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,\ (x,y,z)^T \in A = \mathbb{R}^3,\ \Sigma = \{(x,y,z)^T: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Se è $\underline{x}^0 = (0,0,1)^T$, si può porre $U = \{(x,y,z)^T: z > 0\}$ e $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;
se è $\underline{x}^0 = (-1,0,0)^T$, si può porre $U = \{(x,y,z)^T: x < 0\}$ e $h(y,z) = -\sqrt{1 - y^2 - z^2}$;
se è $\underline{x}^0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$ si può porre $U = \{(x,y,z)^T: x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $k(x,z) = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$ e $h(y,z) = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$.

6) Siano $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, $(x,y,z)^T \in A = \mathbb{R}^3$. $\Sigma = \{(x,y,z)^T: x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. Nel punto $\underline{0}$ la funzione g non è regolare. Se è $\underline{x}^0 = (0,1,1)^T$, si può prendere come U il semispazio delle z positive e $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; se è $\underline{x}^0 = (1,0,-1)^T$, si può prendere come U il semispazio delle z negative e $f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

§ 3. AREA DI UNA SUPERFICIE REGOLARE SEMPLICE

N.B. Da questo punto in poi, supporremo sempre che il dominio K sia *misurabile*. Ciò implica, in particolare, che K è limitato e quindi, essendo chiuso, compatto.

PREMESSA. Se due vettori linearmente indipendenti $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono applicati ad un medesimo punto $\underline{x}^0 = (x_0, y_0)^T$ e se α è la misura assoluta dell'angolo convesso da essi formato, questi individuano un parallelogramma Σ di area $A(\Sigma) = \|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\| \sin\alpha = \|\underline{a} \wedge \underline{b}\|$. D'altra parte, Σ è il sostegno di una superficie regolare semplice (φ, Σ) con φ: $K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, 1] \times [0, 1]$ e φ definita da $\varphi(u,v) = \underline{x}^0 + u\underline{a} + v\underline{b}$. Essendo $\varphi_u = \underline{a}$ e $\varphi_v = \underline{b}$, si ha

$$A(\Sigma) = \|\underline{a} \wedge \underline{b}\| = \|\underline{a} \wedge \underline{b}\| m(K),$$

da cui

$$A(\Sigma) = \iint_K \|\underline{a} \wedge \underline{b}\| dudv.$$

Quest'ultima formula si estende al caso generale, ma la sua giustificazione richiede ragionamenti non del tutto elementari.

DEFINIZIONE. Sia φ: $K\ (\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, una superficie regolare semplice con K dominio misurabile; si definisce *area* del suo sostegno Σ il numero reale

$$A(\Sigma) := \iint_K \|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| dudv.$$

ESEMPI. 1) (*Area della superficie sferica.*) Si consideri la superficie (φ, Σ), con φ: $K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ e φ definita da $\varphi(u,v) = (R \sin u \cos v,\ R \sin u \sin v,\ R \cos u)^T$, $R \in \mathbb{R}^+$ fissato. Sappiamo che è $\|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| = R^2 \sin u$ (cfr. §1, Esempio 1), da cui

$$A(\Sigma) = \iint_K R^2 \sin u\ dudv = R^2 \int_{-\pi}^{\pi} dv \int_0^{\pi} \sin u\ du = 4\pi R^2.$$

2) Si consideri la superficie (φ, Σ), con φ: $K \to \mathbb{R}^3$, $K = [0, 1] \times [0, 2]$ e φ definita da $\varphi(u,v) = (u^2, v^2, \sqrt{2}uv)^T$. Si ha

$$\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u}) = -2\sqrt{2}v^2\underline{e}_1 - 2\sqrt{2}u^2\underline{e}_2 + 4uv\underline{e}_3;$$

$$\|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| = \sqrt{8u^4 + 8v^4 + 16u^2v^2} = 2\sqrt{2}(u^2 + v^2).$$

Si ottiene

$$A(\Sigma) = 2\sqrt{2} \iint_K (u^2 + v^2) dudv = 2\sqrt{2} \int_0^2 dv \int_0^1 (u^2 + v^2)\ du =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^2 dv\ \left[\frac{1}{3}u^3 + uv^2\right]_{u=0}^{u=1} = 2\sqrt{2} \int_0^2 \left[\frac{1}{3} + v^2\right] dv = \frac{2}{3}\sqrt{2}\ [v + v^3]_0^2 = \frac{20}{3}\sqrt{2}.$$

Area di una superficie in forma cartesiana. Siano: f: $K \to \mathbb{R}$ di classe C^1, φ: $K \to \mathbb{R}^3$, definita da $\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))^T$, $\Sigma = G(f)$. Sappiamo che è:

$$\|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| = \sqrt{1 + \|\nabla f(\underline{u})\|^2}.$$

Si ottiene

$$A(\Sigma) = \iint_K \sqrt{1 + \|\nabla f(\underline{u})\|^2} dudv.$$

ESEMPIO. 3) (Area della *calotta parabolica*.) Siano: f: $K \to \mathbb{R}$, $f(u,v) = u^2 + v^2$, $K = \{(u,v)^T\colon u^2 + v^2 \le 1\}$. Si ha

$$A(\Sigma) = \iint_K \sqrt{1 + \|\nabla f(\underline{u})\|^2}\,dudv = \iint_K \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}\,dudv =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{2\pi}{8}\int_1^5 \sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}[\sqrt{t^3}]_1^5 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

Area di una superficie cilindrica. Siano: (γ,Γ) una curva piana regolare semplice, con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 definita da $\gamma(u) = (x(u), y(u))^T$, f,g: $E(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ continue, con $f(\underline{x}) \le g(\underline{x})$ per ogni $\underline{x} \in E$ e $\Gamma \subset E$. Si vede facilmente che l'insieme

$$\Sigma = \{(x,y,z)^T\colon (x,y)^T \in \Gamma,\ f(x,y) \le z \le g(x,y)\}$$

è il sostegno della superficie regolare semplice di rappresentazione parametrica φ: $K \to \mathbb{R}^3$, con

$$K = \{(u,v)^T\colon a \le u \le b,\ f(x(u,v),y(u,v)) \le v \le g(x(u,v),y(u,v))\}$$

e

$$\varphi(u,v) = (x(u), y(u), v)^T.$$

Una superficie (φ,Σ) così definita è detta *cilindrica*. Fissato $(x,y)^T \in \Gamma$, la retta parallela all'asse z passante per $(x,y,0)^T$ si dice *retta generatrice*; mentre il sostegno della curva γ si dice *direttrice* della superficie cilindrica.

Si ha

$$\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u}) = (y'(u), -x'(u), 0)^T,$$

$$\|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| = \sqrt{y'^2(u) + x'^2(u)} = \|\gamma'(u)\|,$$

$$A(\Sigma) = \iint_K \|\gamma'(u)\|\,dudv = \int_a^b du \int_{f(x(u),y(u))}^{g(x(u),y(u))} \|\gamma'(u)\|\,dv =$$

$$= \int_a^b \|\gamma'(u)\|\,(g(x(u),y(u)) - f(x(u),y(u)))du = \int_\gamma (g(x(u),y(u)) - f(x(u),y(u)))ds.$$

ESEMPIO. 4) Siano: γ: $I = [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(u) = (u, \frac{u^2}{2})^T$, f,g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = x$. Si ha:

$$K = \{(u,v)^T\colon 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le u\},\ \Sigma = \{(x,y,z)^T\colon 0 \le x \le 1,\ y = \frac{x^2}{2},\ 0 \le z \le x\},$$

$$A(\Sigma) = \iint_K \sqrt{1 + u^2}\,dudv = \int_0^1 du \int_0^u \sqrt{1 + u^2}\,dv = \int_0^1 u\sqrt{1 + u^2}\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}(\sqrt{8} - 1).$$

Area di una superficie di rotazione. Sia (γ,Γ) una curva piana regolare semplice, con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 definita da $\gamma(u) = (x(u), z(u))^T$, con $x(u) > 0$ per ogni $u \in\ ]a,b[$.

Facendo ruotare Γ di un angolo $\alpha \in\ ]0, 2\pi]$ attorno all'asse z, si ottiene il sostegno Σ di una superficie regolare semplice di rappresentazione parametrica φ: $K \to \mathbb{R}^3$, con

$$K = [a,b] \times [0,\alpha] \quad \text{e} \quad \varphi(u,v) = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u))^T.$$

Una superficie (φ, Σ) così definita è detta *di rotazione*.

Si ha $\qquad \varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u}) = (-x(u)z'(u) \cos v, -x(u)z'(u) \sin u, \ x(u)x'(u))^T,$

$$\|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| = x(u) \sqrt{z'^2(u) + x'^2(u)} = x(u)\|\gamma'(u)\|,$$

(*) $$A(\Sigma) = \iint_K x(u) \|\gamma'(u)\| du dv = \alpha \int_a^b x(u) \|\gamma'(u)\| du = \alpha \int_\gamma x \, ds.$$

Ricordiamo che il numero

$$\overline{x} = \frac{\int_\gamma x \, ds}{l(\gamma)}$$

fornisce l'ascissa del baricentro geometrico di Γ. Dalla (*) si ricava immediatamente il

TEOREMA 1. *(Primo Teorema di Pappo - Guldino) - L'area di una superficie di rotazione ottenuta ruotando di un angolo* $\alpha \in\ ]0,2\pi]$ *attorno all'asse z una curva regolare semplice* (γ, Γ)*, con* Γ *contenuto nel semipiano di ascissa* $x \geq 0$*, è data da*

$$A(\Sigma) = \alpha \int_\gamma x \, ds = \overline{x} \, \alpha l(\gamma),$$

essendo $\overline{x}$ *l'ascissa del baricentro geometrico di* Γ. ∎

ESEMPI. 5) Area della superficie laterale di un "tronco di cono". Siano: γ: $I = [1,2] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(u) = (u, 2u)^T$, $K = [1,2] \times [0,2\pi]$; si ha:

$$A(\Sigma) = \iint_K x(u) \|\gamma'(u)\| du dv = 2\pi \int_1^2 \sqrt{5} u \, du = \pi\sqrt{5} \, [u^2]_1^2 = 3\pi\sqrt{5}.$$

6) Area della superficie del toro. Si parte dalla curva (γ, Γ), con γ: $[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(u) = (R + r \cos u, r \sin u)^T$, che è la circonferenza di centro $(R, 0)^T$ del piano xz e raggio r ($\leq R$), e si ruota di 2π attorno all'asse z. Applichiamo il Primo Teorema di Pappo - Guldino. Il baricentro di Γ è, ovviamente, il punto $(R,0)^T$. Si ha dunque:

$$A(\Sigma) = \overline{x} \, \alpha l(\gamma) = R \, (2\pi)(2\pi r) = 4\pi^2 Rr.$$

Volume dei solidi di rotazione

Sia K un dominio del piano xz, con $x \geq 0$ per ogni $(x,z)^T \in K$. Facendo ruotare K di un angolo $\alpha \in\ ]0,2\pi]$ attorno all'asse delle z, si ottiene un *solido di rotazione E* del quale vogliamo determinare il volume. Siano $D = K \times [0,\alpha]$, Φ: $D \to E$ definita da $\Phi(u,v,w) = (u\cos w, u\sin w, v)^T$. La Φ è di classe C^1 in D, biiettiva fra *int D* e *int E* e si ha $|det\,(J\Phi)(u,v)| = u > 0$ in ogni punto di *int D*. Si ottiene:

$$(*) \qquad m(E) = \iiint_E 1\, dxdydz = \iiint_D u\, dudvdw = \int_0^\alpha dw \iint_K u\, dudv = \alpha \int_K x\, dm.$$

Ricordiamo che il numero

$$\overline{x} = \frac{\int_K x\, dm}{m(K)}$$

fornisce l'ascissa del baricentro geometrico del dominio piano K. Dalla (*) si ricava immediatamente il

TEOREMA 2. *(Secondo Teorema di Pappo - Guldino) - Il volume di un solido di rotazione E ottenuto ruotando di un angolo* $\alpha \in\,]0,2\pi]$ *attorno all'asse z un dominio K, contenuto nel piano xz e con* $x \geq 0$, *è data da*

$$m(E) = \alpha \int_K x\, dm = \overline{x}\,\alpha\, m(K),$$

essendo $\overline{x}$ *l'ascissa del baricentro geometrico di K.* ∎

ESEMPIO. 7) Ricalcoliamo il volume del toro. Si parte dal cerchio K di centro $(R, 0)$ del piano (x,z) e raggio r $(\leq R)$, e si ruota di 2π attorno all'asse z. Applichiamo il Secondo Teorema di Pappo - Guldino. Il baricentro di K è il punto $(R,0)$. Si ha dunque:

$$m(E) = \overline{x}\,\alpha\, m(K) = R\,(2\pi)(\pi r^2) = 2\pi^2 R r^2.$$

§ 4. INTEGRALI SUPERFICIALI

Siano: (φ, Σ), con φ: $K(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, una superficie regolare semplice e f: $E(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ un campo scalare continuo, con $\Sigma \subset E$.

DEFINIZIONE. Si definisce *integrale superficiale di f su* Σ il numero

$$\iint_\Sigma f\, d\sigma := \iint_K f(\varphi(u,v))\, \|\varphi_u(u,y) \wedge \varphi_v(u,v)\| dudv.$$

OSSERVAZIONE. Se f è la funzione costante 1, si ha

$$\iint_\Sigma 1\, d\sigma = \iint_K \|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| dudv = A(\Sigma).$$

ESEMPI. 1) Determinare il baricentro della superficie conica (φ,Σ), con $\Sigma = \{(x,y,z)^T\colon z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 1\}$. Si può assumere φ: $K(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})^T$, $K = \{(u,v)^T\colon u^2 + v^2 \leq 1\}$; si ha $\|\varphi_u(u,y) \wedge \varphi_v(u,v)\| = \sqrt{2}$.

Il baricentro cercato è il punto di coordinate $(0, 0, \overline{z})^T$, con

$$\overline{z} = \frac{\iint_\Sigma z\, d\sigma}{\iint_\Sigma 1 d\sigma} = \frac{\iint_K \sqrt{u^2+v^2}\, \|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| dudv}{\iint_K \|\varphi_u(\underline{u}) \wedge \varphi_v(\underline{u})\| dudv} = \frac{\iint_K \sqrt{u^2+v^2} dudv}{\iint_K 1 dudv} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho^2 d\rho}{\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho d\rho} = \frac{2}{3}.$$

2) Calcolare $\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma$, con $\Sigma = \{(x,y,z)^T\colon x^2 + y^2 - z = -1,\ 1 \le z \le 3\}$. Si può assumere $\varphi\colon K(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u, v, 1 + u^2 + v^2)^T$, $K = \{(u,v)^T\colon u^2 + v^2 \le 2\}$. Si ha

$$\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma = \iint_K (u^2 + v^2)\sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}\, dudv =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = \pi \int_1^3 \frac{p^4 - p^2}{8} dp,$$

avendo posto $1 + 4\rho^2 = p^2$. Si ottiene:

$$\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma = \frac{\pi}{8}\left[\frac{p^5}{5} - \frac{p^3}{3}\right]_1^3 = \frac{\pi}{8}\left[\frac{242}{5} - \frac{26}{3}\right].$$

§ 5. E S E R C I Z I

1) Si ricalcoli l'area della superficie sferica utilizzando il 1° Teorema di Pappo - Guldino.

2) Si calcoli l'area della superficie che delimita il solido

$$E = \{(x,y,z)^T\colon x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 \le x\}.$$

3) Si calcoli l'area della superficie di sostegno $\Sigma = \{(x,y,z)^T\colon x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ 0 \le z \le 1\}$.

4) Si calcolino baricentro e momento rispetto all'asse z di una massa di densità $\mu(x,y,z) = x^2 + y^2$ distribuita sulla superficie di equazione $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

5) Si calcoli l'area della parte del piano $z = x + y + 1$ interna al cilindro di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$.

6) Si calcoli $\iint_\Sigma x d\sigma$, essendo Σ la parte del cilindro $z = \frac{x^2}{2}$ interna al cilindro $x^2 + y^2 \le 1$.

7) Si calcoli l'area della superficie cilindrica $x^2 + z^2 = a^2$ interna al cilindro $y^2 + z^2 \le b^2$, con $0 \le b \le a$.

8) Si calcoli il momento d'inerzia rispetto all'asse z della superficie $\Sigma = \{(x,y,z)^T\colon x^2 + y^2 = 1,\ |z| \le 1\}$, sapendo che la sua densità superficiale è $\mu(x,y,z) = z^2$.

9) Calcolare $\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma$, con $\Sigma = \{(x,y,z)^T\colon x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ 1 \le z \le \sqrt{5}\}$.