Capitolo Quindicesimo

CURVE IN $\mathbb{R}^n$ (n = 2, 3)

§ 1. LA NOZIONE DI CURVA

In tutto il Capitolo, I indicherà un intervallo non degenere aperto o no, limitato o no.

DEFINIZIONE. Data un'applicazione $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ (con $n = 2$ o $n = 3$), si ponga $\Gamma = \gamma(I)$. La coppia (γ, Γ) prende il nome di *curva di* $\mathbb{R}^n$. L'applicazione γ si chiama *rappresentazione parametrica* della curva, mentre l'insieme Γ è detto il suo *sostegno*. Se l'intervallo I è *chiuso* e *limitato*, si parla anche di *arco di curva*.

Per $n = 2$, si ha $\gamma(t) = (x(t),y(t))^T$, ossia $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, e $\Gamma = \{(x(t),y(t))^T : t \in I\}$.

Per $n = 3$, si ha $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t))^T$, ossia $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, e $\Gamma = \{(x(t),y(t),z(t))^T : t \in I\}$.

Per assegnare una curva è sufficiente assegnare l'applicazione γ; per questo motivo, ci permetteremo espressioni del tipo: "Data una curva γ …", in luogo di "Data una curva (γ, Γ) …".

ESEMPI. 1) *Retta*. Dati un punto $\underline{x}^1 = (x_1,y_1,z_1)^T$ e un versore $\underline{x}^2 = (x_2,y_2,z_2)^T$ di $\mathbb{R}^3$, la retta per $\underline{x}^1$ e direzione $\underline{x}^2$ è rappresentata da

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 t \\ y = y_1 + y_2 t \\ z = z_1 + z_2 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2) Le due curve (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), con

$$\gamma_1: I_1 = [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)^T$$

e

$$\gamma_2: I_2 = [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^2, \ \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)^T$$

sono diverse; infatti, pur essendo $\Gamma_1 = \Gamma_2$ (circonferenza unitaria di centro l'origine), è $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

3) $\gamma: I = [-1, 2] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)^T$ (*arco di parabola cubica*).

4) $\gamma: I = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$ (*elica*).

DEFINIZIONE. Una curva (γ, Γ) è detta *continua* [*di classe* C^k] se è tale la funzione γ.

DEFINIZIONE. Una curva (γ, Γ) è detta *regolare* se la funzione γ è di classe C^1 e si ha $\gamma'(t) = (x'(t),y'(t),z'(t))^T \neq \underline{0}$ per ogni $t \in \operatorname{int} I$. Dato $t \in I$, i vettori $\gamma'(t) := (x'(t),y'(t),z'(t))^T$ e $\tau(t) := \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ sono detti, rispettivamente, *vettore tangente* e *versore tangente* alla curva nel punto $\gamma(t)$.

Le curve degli esempi precedenti sono regolari. Diamo un esempio di curva non regolare.

ESEMPI0. 5) La curva (γ, Γ), con γ: $I = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)^T$, non è regolare, essendo $0 \in int\, I$ e $\gamma'(0) = \underline{0}$.

DEFINIZIONE. Una curva (γ, Γ), con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è detta *chiusa* se è $\gamma(a) = \gamma(b)$.

DEFINIZIONE. Una curva (γ, Γ), con γ: $I \to \mathbb{R}^n$ è detta *semplice* se da $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ e con almeno uno dei due punti interno ad I, segue $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

L'unica curva chiusa che compare negli esempi precedenti è la γ_1 dell'Esempio 2. L'unica curva non semplice fra quelle sopra definite è la γ_2 dell'Esempio 2.

ESEMPIO. 6) La curva γ: $I = [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin 2t)^T$ è chiusa, semplice e regolare.

DEFINIZIONE. Sia (γ, Γ) una curva *regolare semplice.* Se $t_0 \in int\, I$, la retta di equazione $r(s) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)s$, $s \in \mathbb{R}$, è detta *retta tangente* alla curva nel punto $\gamma(t_0)$.

DEFINIZIONE. Una curva (γ, Γ), con γ: $I \to \mathbb{R}^n$ *continua* si dice *regolare a tratti* se esistono n punti $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ di I che dividono l'intervallo in sottointervalli chiusi (tranne, eventualmente, il primo e l'ultimo) in ciascuno dei quali γ è *regolare*.

Ogni curva regolare è ovviamente regolare a tratti. La curva (non regolare) dell'esempio 5 è regolare a tratti. Le poligonali definite nel §2 del Capitolo 3 sono esempi di curve regolari a tratti.

Curve in forma cartesiana. Data una funzione f: $I \to \mathbb{R}$ e posto, per ogni $t \in I$,

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases},$$

si ottiene una curva γ, di cui l'equazione $y = f(x)$ è detta la *rappresentazione cartesiana* e il cui sostegno Γ è dato dal *grafico G(f)* della funzione f. La curva γ è in ogni caso semplice.

Curve in forma implicita. Sia g: $A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su un insieme aperto A e sia $\Gamma = \{(x,y)^T: g(x,y) = 0\}$. Si può dimostrare che, per ogni $P_0 = (x_0,y_0)^T \in \Gamma$ tale che $\nabla g(x_0,y_0) \neq \underline{0}$, esistono un intorno U di P_0 e una funzione $y = h(x)$ [o una funzione $x = k(y)$] di classe C^1 tali che $\Gamma \cap U = G(h)$ (= grafico di h) [rispettivamente, $\Gamma \cap U = G(k)$]. Si dice che la funzione h [la funzione k] è definita *implicitamente* dall'equazione $g(x,y) = 0$.

ESEMPI. 7) Sia $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $(x,y)^T \in A = \mathbb{R}^2$. Se è $P_0 = (0,1)^T$, si può prendere come U il semipiano delle y positive e $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$; se è $P_0 = (-1,0)^T$, si può prendere come U il semipiano delle x negative e $k(y) = -\sqrt{1 - y^2}$; se è $P_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, si può prendere come U il primo quadrante del piano cartesiano, $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $k(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

8) Sia $g(x,y) = x^5 + y^5 - xy - 1$, $(x,y)^T \in A = \mathbb{R}^2$. Si vede subito che è $f(1,1) = 0$ e $\nabla f(1,1) \neq \underline{0}$. Si può dunque applicare il risultato precedente, anche se non sappiamo scrivere esplicitamente l'espressione della funzione h o della funzione k.

Curve in forma polare. Si consideri una funzione $\rho = \rho(\vartheta)$: $I \to \mathbb{R}$. Se, per ogni $\vartheta \in I$, si ha $\rho(\vartheta) \geq 0$, allora la funzione γ: $I \to \mathbb{R}^2$ definita da $(\rho(\vartheta) \cos \vartheta, \rho(\vartheta) \sin \vartheta)^T$ è la rappresentazione parametrica di una curva piana di cui la funzione $\rho = \rho(\vartheta)$ costituisce la *rappresentazione polare.*

ESEMPI. 9) Siano $\rho(\vartheta) = r$; $I = [0,2\pi]$. Si ha $\gamma(\rho,\vartheta) = (r \cos\vartheta, r \sin\vartheta)^T$ il cui sostegno è una circonferenza.

10) Siano $\rho(\vartheta) = a\vartheta$; $a \neq 0$; $I = [0,+\infty[$. Si ha $\gamma(\rho,\vartheta) = (a\vartheta \cos\vartheta, a\vartheta \sin\vartheta)^T$ il cui sostegno è una spirale.

11) Siano $\rho(\vartheta) = 1 + \cos\vartheta$; $I = [0,2\pi]$. Si ha $\gamma(\rho,\vartheta) = ((1 + \cos\vartheta)\cos\vartheta, (1 + \cos\vartheta)\sin\vartheta)^T$ il cui sostegno è detto *cardioide.*

Curve equivalenti

DEFINIZIONE. Due curve (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), con γ_1: $I_1 \to \mathbb{R}^n$ e γ_2: $I_2 \to \mathbb{R}^n$ si dicono *equivalenti* se esiste una φ: $I_2 \to I_1$ tale che:

1) φ è biiettiva;

2) φ è di classe C^1 ed è $\varphi'(s) \neq 0$ per ogni $s \in I_2$; (quindi anche l'inversa φ^{-1} è di classe C^1);

3) $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma_2$ (ossia $\gamma_1(\varphi(s)) = \gamma_2(s)$ per ogni $s \in I_2$).

Ne viene che l'applicazione φ è strettamente monotona. Se, in particolare, si ha $I_1 = [a,b]$ e $I_2 = [c,d]$, la φ deve portare c in a e d in b o viceversa.

ESEMPI. 12) Data una curva (γ_1, Γ_1) con γ_1: $I_1 = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, siano $I_2 = [-b,-a]$ e γ_2: $I_2 \to \mathbb{R}^n$, con $\gamma_2(s) = \gamma_1(-s)$ per ogni $s \in I_2$. Le due curve sono equivalenti; basta prendere come φ: $I_2 \to I_1$ la funzione $\varphi(s) = -s$.

13) Le curve (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), con γ_1: $I_1 = [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)^T$ e γ_2: $I_2 = [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(\tau) = (\cos\tau, \sin\tau)^T$ non sono equivalenti. Infatti, per ogni φ: $I_2 \to I_1$, per cui è $\varphi(\pi) = 0$ o $\varphi(\pi) = 2\pi$ si ha $\gamma_2(\pi) \neq \gamma_1(\varphi(\pi))$.

Ci sarà utile il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione:

TEOREMA 1. 1) *La relazione sopra definita è di equivalenza.*
2) *Due curve equivalenti hanno il medesimo sostegno.*
3) *Se due curve semplici non chiuse hanno il medesimo sostegno, allora sono equivalenti.* ∎

L'Esempio 13 mostra che due curve semplici e chiuse aventi il medesimo sostegno possono risultare non equivalenti.

Orientazione di una curva

Le curve (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), con γ_1: $I = [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ e γ_2: $I = [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definite da $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $\gamma_2(\tau) = (\cos \tau, -\sin \tau)^T$ sono equivalenti; basta prendere φ: $I_2 \to I_1$, con

$\varphi(\tau) = 2\pi - \tau$; è dunque $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$. Osserviamo però che, se t varia da 0 a 2π, il sostegno Γ viene percorso da $\gamma_1(t)$ in senso antiorario mentre, al variare di τ da 0 a 2π, il sostegno Γ è percorso da $\gamma_2(\tau)$ in senso orario.

DEFINIZIONE. Si dice che due curve equivalenti (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), con $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma_2$, hanno *lo stesso orientamento* se è $\varphi'(s) > 0$, $\forall s \in I_2$, mentre si dice che le due curve hanno *orientamento opposto* se è $\varphi'(s) < 0$, $\forall s \in I_2$.

TEOREMA 2. *Siano* (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2), *con* $\gamma_1\colon I_1 \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2\colon I_2 \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma_2$, *due curve regolari equivalenti e siano* $\tau_1(t)$, $t \in \operatorname{int} I_1$, $\tau_2(s)$, $s \in \operatorname{int} I_2$, *i relativi versori tangenti. Allora, per ogni* $s \in \operatorname{int} I_2$, *si ha* $\tau_1(\varphi(s)) = \tau_2(s)$ *se le curve hanno lo stesso orientamento, mentre è* $\tau_1(\varphi(s)) = -\tau_2(s)$ *se le curve hanno orientamento opposto.*

DIM. Si ha: $\tau_2(s) = \dfrac{\gamma_2'(s)}{\|\gamma_2'(s)\|} = \dfrac{\gamma_1'(\varphi(s))\varphi'(s)}{\|\gamma_1'(\varphi(s))\varphi'(s)\|} = \dfrac{\varphi'(s)}{|\varphi'(s)|}\,\dfrac{\gamma_1'(\varphi(s))}{\|\gamma_1'(\varphi(s))\|} = \operatorname{sign}(\varphi')\,\tau_1(\varphi(s))$. ▮

§ 2. CURVE RETTIFICABILI

Siano (γ, Γ), con $\gamma\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva continua e δ una decomposizione di I individuata dai punti $\{t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$. Consideriamo la poligonale $\pi(\delta)$ ottenuta dagli n segmenti

$$(1 - \tau)\gamma(t_{i-1}) + \tau\gamma(t_i), \quad \tau \in [0,1] .$$

Si definisce *lunghezza* di $\pi(\delta)$ il numero

$$l(\pi(\delta)) := \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

DEFINIZIONE. Si dice che una curva continua (γ, Γ), con $\gamma\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è *rettificabile* se è $\sup_{\delta \in \Delta(I)} l(\pi(\delta)) < +\infty$, dove $\Delta(I)$ indica l'insieme di tutte le decomposizioni di I. Il numero

$$l(\gamma) := \sup_{\delta \in \Delta(I)} l(\pi(\delta))$$

prende il nome di *lunghezza* della curva.

N.B. *Non tutte* le curve sono rettificabili.

ESEMPIO. 1) Si consideri la poligonale Γ (data da "infiniti segmenti") che si ottiene unendo, nell'ordine, i punti (del piano) di coordinate

$$(1,1),\ (1,0),\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}, 0\right),\ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3}, 0\right),\ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{1}{4}, 0\right),$$

$$\ldots,\ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right),\ \left(\frac{1}{n}, 0\right),\ \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right),\ \left(\frac{1}{n+1}, 0\right), \ldots$$

e aggiungiamo, in fondo, il punto (0,0). Diciamo J_n il segmento che unisce l'n - imo di tali punti con il successivo. Sia ora I_n l'intervallo $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$, con $n = 1, 2, 3,\dots$ È facile convincersi che è possibile definire un'applicazione continua γ di $I = [0,1]$ in Γ che porta 0 in (0,0) e I_n in J_n. Posto $l_n = l(J_n)$, è evidente che dovremmo avere:

$$l(\gamma) > l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{2n+1} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

che è la ridotta di una serie divergente.

TEOREMA 3. *Se l'applicazione* $\gamma: I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *è di classe* C^1*, allora la curva* (γ, Γ) *è rettificabile e si ha*

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \blacksquare$$

TEOREMA 4. *Se le due curve regolari* (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2)*, con* $\gamma_1: I_1 = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2: I_2 = [c,d] \to \mathbb{R}^n$*, sono equivalenti, allora si ha* $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$.

DIM. Per ipotesi, esiste un'applicazione $\varphi: [c,d] \to [a,b]$ tale che $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma_2$. Si ha

$$l(\gamma_1) = \int_a^b \|\gamma_1'(t)\| dt = \int_c^d \|\gamma_1'(\varphi(\tau))\| \cdot |\varphi'(\tau)| d\tau = \int_c^d \|\gamma_1'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\| d\tau = \int_c^d \|\gamma_2'(\tau)\| d\tau = l(\gamma_2). \blacksquare$$

Se un sottoinsieme Γ di $\mathbb{R}^n$ è il sostegno di una curva regolare semplice $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, il numero $l(\gamma)$ può dunque essere assunto anche come lunghezza di Γ.

ESEMPI. 2) Si consideri il segmento (γ,Γ) con $\gamma: I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ dato da $\gamma(t) = \underline{v}t$, $\underline{v} \neq \underline{0}$. Si ha

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\underline{v}\| dt = \|\underline{v}\|(b - a) = \|\underline{v}(b - a)\| = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|.$$

3) Si consideri la curva (γ, Γ) con $\gamma: I = [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, ct)^T$, $R,c > 0$. Si ha $\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t, c)^T$, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 + c^2}$; è dunque:

$$l(\gamma) = \int_0^{4\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{R^2 + c^2} dt = 4\pi\sqrt{R^2 + c^2}.$$

4) Si consideri la curva (γ, Γ) con $\gamma: I = [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)^T$, $0 < b \leq a$. Si ha $\gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t)^T$, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$. Se è $a = b$, si ha $\|\gamma'(t)\| = a$, da cui si ricava subito $l(\gamma) = 2\pi a$. Se è $b < a$, si ottiene:

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\, dt.$$

Ci si imbatte così in un integrale *ellittico* che non si calcola elementarmente.

(Ricordiamo che il numero $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ è detto *eccentricità* dell'ellisse.)

5) Calcolare la lunghezza della seguente curva data dall'intersezione di due superfici:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + 2z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = z^2 \\ x^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}.$$

Per la simmetria della curva, possiamo calcolare la lunghezza dell'arco che si ottiene prendendo $x,y,z \geq 0$ e moltiplicare il risultato per 8. Con queste limitazioni, si ottiene la curva

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - 2z^2} \\ y = z \\ z = z \end{cases}, \ z \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}].$$

Essendo $\gamma'(z) = (\frac{-2z}{\sqrt{1 - 2z^2}}, 1, 1)^T$, si ottiene $\|\gamma'(z)\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - 2z^2}}$. È dunque:

$$l(\gamma) = 8 \int_0^{\sqrt{1/2}} \|\gamma'(z)\| dz = 8 \int_0^{\sqrt{1/2}} \frac{\sqrt{2}dz}{\sqrt{1 - 2z^2}} = 8 \int_0^{\sqrt{1/2}} \frac{\sqrt{2}dz}{\sqrt{1 - (\sqrt{2}z)^2}} = 8 \arcsin 1 = 4\pi.$$

6) Sia f: $I = [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 (curva in forma cartesiana). Si ha

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(x)\| dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx .$$

Se, per esempio, è $f(x) = x^2$, con $x \in [0,2]$, si ha:

$$l(\gamma) = \int_0^2 \|\gamma'(x)\| dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{1 + u^2} du =$$

$$= \frac{1}{4} [\log(u + \sqrt{1 + u^2}) + u \sqrt{1 + u^2}\,]_0^4 = \frac{1}{4} [\log(4 + \sqrt{17}) + 4\sqrt{17}].$$

[Per integrare la funzione $\sqrt{1 + u^2}$, si effettua la sostituzione $u = \mathrm{Sh}t$ e si ricorda che è $\mathrm{arcsinh}u = \log(u + \sqrt{1 + u^2})$.]

Si consideri una funzione $\rho = \rho(\vartheta)$: $I = [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1, con $\rho(\vartheta) \geq 0$, $\forall\ \vartheta \in I$. Questa è la rappresentazione polare di una curva (γ, Γ) con γ: $I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definita da:

$$\gamma(\vartheta) = (\rho(\vartheta) \cos \vartheta, \rho(\vartheta) \sin \vartheta)^T.$$

Si ha:

$$\gamma'(\vartheta) = (\rho'(\vartheta) \cos \vartheta - \rho(\vartheta) \sin \vartheta, \rho'(\vartheta) \sin \vartheta + \rho(\vartheta) \cos \vartheta)^T,$$

$$\|\gamma'(\vartheta)\| = \sqrt{(\rho'(\vartheta) \cos \vartheta - \rho(\vartheta) \sin \vartheta)^2 + (\rho'(\vartheta) \sin \vartheta + \rho(\vartheta) \cos \vartheta)^2} = \sqrt{\rho'^2(\vartheta) + \rho^2(\vartheta)},$$

da cui: $$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(\vartheta)\| d\vartheta = \int_a^b \sqrt{\rho'^2(\vartheta) + \rho^2(\vartheta)}\, d\vartheta.$$

ESEMPI. 7) Sia $\rho = \rho(\vartheta) = a\vartheta$, $\vartheta \in [0, 4\pi]$, $a \neq 0$, (arco di *spirale archimedea*). Si ha:

$$l(\gamma) = \int_0^{4\pi} \sqrt{\rho'^2(\vartheta) + \rho^2(\vartheta)}\,d\vartheta = \int_0^{4\pi} \sqrt{a^2 + a^2\vartheta^2}\,d\vartheta = a\int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \vartheta^2}\,d\vartheta =$$

$$= \frac{a}{2}\left[\log(\vartheta + \sqrt{1 + \vartheta^2}) + \vartheta\sqrt{1 + \vartheta^2}\,\right]_0^{4\pi}.$$

8) Sia $\rho = \rho(\vartheta) = 1 + \cos\vartheta$, $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ (*cardioide*). Si ha:

$$l(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\rho'^2(\vartheta) + \rho^2(\vartheta)}\,d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\vartheta}\,d\vartheta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\vartheta}\,d\vartheta.$$

Posto $\varphi = \dfrac{\vartheta}{2}$, si ottiene:

$$l(\gamma) = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi}\,d\varphi = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{2\cos^2\varphi}\,d\varphi = 8.$$

§ 3. INTEGRALI CURVILINEI DI CAMPI SCALARI

DEFINIZIONE. Siano (γ, Γ), γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, una curva *regolare* e f: $E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funzione *continua*, con $\Gamma \subset E$. Si definisce *integrale curvilineo di f lungo* γ (o *su* γ) il numero

$$\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$$

Osserviamo che se è $f(\underline{x}) = 1$, si ha $\int_\gamma f\,ds = l(\gamma)$.

ESEMPI. 1) Si vuol calcolare $\int_\gamma z\,ds$, essendo γ: $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$. Si ha:

$$\int_\gamma z\,ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\,dt = 2\pi^2\sqrt{2}.$$

2) Si vuol calcolare $\int_\gamma (2\sqrt{x} + y^2 + z^2)ds$, con γ: $[0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t^2, e^t\cos t, e^t\sin t)^T$. Si ha

$$\int_\gamma (2\sqrt{x} + y^2 + z^2)ds = \int_0^1 (2t + e^{2t})\sqrt{4t^2 + 2e^{2t}}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^1 (8t + 4e^{2t})\sqrt{4t^2 + 2e^{2t}}\,dt = \frac{1}{4}\int_2^c \sqrt{u}\,du,$$

essendo $u = 4t^2 + 2e^{2t}$ e $c = 4 + 2e^2$. Si ottiene:

$$\int_\gamma (2\sqrt{z} + y^2 + z^2)ds = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\sqrt{(2 + e^2)^3} - 1\right].$$

TEOREMA 5. *Siano dati: una curva* (γ,Γ), $\gamma\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *regolare a tratti e* $n + 1$ *punti* $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ *di* I *tali per cui siano regolari le restrizioni* γ_i *della* γ *agli intervalli* $[a_{i-1}, a_i]$. *Se* $f\colon E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua, con* $\Gamma \subset E$, *Si ha*

$$\int_\gamma f\,ds = \int_{\gamma_1} f\,ds + \int_{\gamma_2} f\,ds + \dots + \int_{\gamma_n} f\,ds\,. \blacksquare$$

ESEMPIO. 3) Si vuol calcolare $\int_\gamma (x + y^2)ds$, essendo $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (|t|, t)^T$. Si ha

$$\int_\gamma (x + y^2)ds = \int_{\gamma_1} (x + y^2)\,ds + \int_{\gamma_2} (x + y^2)\,ds = \sqrt{2}\int_{-1}^{0} (-t + t^2)dt + \sqrt{2}\int_{0}^{1}(t + t^2)dt = \frac{5}{3}\sqrt{2}.$$

TEOREMA 6. *Se le due curve regolari* (γ_1,Γ_1) e (γ_2,Γ_2), *con* $\gamma_1\colon I_1 = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2\colon I_2 = [c,d] \to \mathbb{R}^n$, *sono equivalenti, allora, per ogni funzione continua* $f\colon E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, *con* $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma \subset E$, *si ha*

$$\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_{\gamma_2} f\,ds\,.$$

DIM. Per ipotesi, esiste un'applicazione $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ tale che $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma_2$. Si ha

$$\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_a^b f(\gamma_1(t))\|\gamma_1'(t)\|dt = \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(\tau)))\|\gamma_1'(\varphi(\tau))\|\cdot|\varphi'(\tau)|d\tau = \int_c^d f(\gamma_2(\tau))\|\gamma_2'(\tau)\|d\tau = \int_{\gamma_2} f\,ds. \blacksquare$$

Ciò comporta che, se (γ, Γ) è una curva regolare e semplice, si può pensare l'integrale curvilineo della f come definito sul sostegno Γ anziché sul γ.

§ 4. INTEGRALI CURVILINEI DI CAMPI VETTORIALI

DEFINIZIONE. Siano (γ,Γ), con $\gamma\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, una curva *regolare* e $g\colon E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale *continuo*, con $\Gamma \subset E$. Si definisce *integrale curvilineo di* g *lungo* γ (o *su* γ) il numero

$$\int_\gamma \langle g,\tau\rangle ds := \int_a^b \langle g(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt,$$

dove $\tau(t) := \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ è il versore tangente alla curva nel punto $\gamma(t)$.

OSSERVAZIONE. Si ha:

$$\int_\gamma \langle g,\tau\rangle ds = \int_a^b \langle g(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt = \int_a^b \left\langle g(\gamma(t)),\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right\rangle\|\gamma'(t)\|dt.$$

Dunque l'integrale curvilineo del campo vettoriale g lungo γ può pensarsi come l'integrale curvilineo su γ del campo scalare continuo $\langle g, \tau\rangle$. Ne viene che anche per gli integrali curvilinei dei campi vettoriali sussiste un risultato analogo a quello del Teorema 5.

OSSERVAZIONE. $\boxed{n = 2.}$ Dati il campo vettoriale g: $E(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, con

$$g(x,y) = (X(x,y),Y(x,y))^T = X(x,y)\underline{e}_1 + Y(x,y)\underline{e}_2,$$

e la curva γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (x(t),y(t))^T$, si ha

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = \int_a^b [X(x(t),y(t))x'(t) + Y(x(t),y(t))y'(t)]dt.$$

$\boxed{n = 3}$ Dati il campo vettoriale g: $E(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$, con

$$g(x,y,z) = (X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))^T = X(x,y,z)\underline{e}_1 + Y(x,y,z)\underline{e}_2 + Z(x,y,z)\underline{e}_3,$$

e la curva γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^3$, con $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t))^T$, si ha

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = \int_a^b [X(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Y(x(t),y(t),z(t))y'(t) + Z(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

Interpretazione fisica. Se la funzione $g(\underline{x})$ esprime un *campo di forze stazionario* (ossia costante nel tempo), allora, data una curva (γ,Γ), con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, l'integrale $\int_\gamma <g,\tau>ds$ esprime il *lavoro* compiuto dal campo sulla particella di massa unitaria che si muove lungo la traiettoria data dal sostegno Γ della curva.

ESEMPI. 1) Dati il campo vettoriale g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $g(x,y) = (0,y)^T$ e la curva γ: $I = [0,1] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (t,t^2)^T$, si vuol calcolare $\int_\gamma <g,\tau>ds$. Si ha

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = \int_0^1 t^2(2t)dt = 2\int_0^1 t^3dt = \frac{1}{2}.$$

2) Dati il campo vettoriale g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $g(x,y,z) = (z,y,x)^T$ e la curva γ_1: $I = [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$, si vuol calcolare $\int_{\gamma_1} <g,\tau>ds$. Si ha

$$\int_{\gamma_1} <g,\tau>ds = \int_0^{2\pi} [-t\sin t + \sin t\cos t + \cos t]dt = [t\cos t - \sin t + \frac{\sin^2 t}{2} + \sin t]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

3) Calcolare $\int_{\gamma_2} <g,\tau>ds$, dove il campo g è quello dell'esempio precedente e γ_2: $I = [0,2] \to \mathbb{R}^3$ è data da $\gamma(t) = (1, t, e^t)^T$. Si ha

$$\int_{\gamma_2} <g,\tau>ds = \int_0^2 [t + e^t]dt = 1 + e^2.$$

TEOREMA 7. *Se le due curve* (γ_1,Γ_1) e (γ_2,Γ_2), *con* γ_1: $I_1 = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, γ_2: $I_2 = [c,d] \to \mathbb{R}^n$, *sono equivalenti, allora, per ogni campo vettoriale continuo* g: $E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ *(con* $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma \subset E$*) si ha*

$$\int_{\gamma_1} <g, \tau>ds = \int_{\gamma_2} <g,\tau>ds, \quad \textit{se le due curve hanno lo stesso orientamento}$$

e

$$\int_{\gamma_1} <g, \tau>ds = -\int_{\gamma_2} <g,\tau>ds, \quad \textit{se le due curve hanno orientamento opposto.}$$

DIM. Si ha

$$\int_{\gamma_2} <g, \tau>ds = \int_c^d <g(\gamma_2(s)), \gamma_2'(s)>ds = \int_c^d <g(\gamma_1(\varphi(s)), \gamma_1'(\varphi(s))\, \varphi'(s)> ds =$$

$$= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} <g(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t)>dt = \mathrm{sign}(\varphi') \int_a^b <g(\gamma_1(t), \gamma_1'(t)>dt = \mathrm{sign}(\varphi') \int_{\gamma_1} <g, \tau>dt\,.$$

(Si tenga presente che si ha $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$ se è $\varphi'(s) > 0$, mentre se è $\varphi'(s) < 0$ si ha $\varphi(c) = b$ e $\varphi(d) = a$.) ∎

§ 5. CAMPI CONSERVATIVI

PROBLEMA. Sotto quali condizioni un integrale curvilineo $\int_\gamma <g,\tau>ds$, con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, dipende solo dal punto iniziale $\gamma(a)$ e dal punto finale $\gamma(b)$, ma non dalla curva γ?

DEFINIZIONE. Un campo vettoriale g: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, *A aperto*, si dice *conservativo* se esiste un campo scalare f: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che

$$\nabla f(\underline{x}) = g(\underline{x}), \quad \forall\ \underline{x} \in A.$$

La funzione f è detta un *potenziale* di g.

Naturalmente, se $f(\underline{x})$ è un potenziale del campo vettoriale $g(\underline{x})$, è tale anche ogni funzione del tipo $f(\underline{x}) + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 8. *Se* g: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, *A aperto, è un campo vettoriale continuo e conservativo, allora, per ogni curva regolare* (γ,Γ), γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subset A$, *si ha*

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

con f: $A \to \mathbb{R}$ *funzione potenziale di g.* (dunque: $\int_\gamma <g,\tau>ds$ *non dipende da* γ, *ma solo dai punti* $\gamma(b)$ *e* $\gamma(a)$).

DIM. Sia g: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $g = (X(\underline{x}), Y(\underline{x}), Z(\underline{x}))^T$ un campo vettoriale continuo e conservativo. Esiste dunque un campo scalare f: $A \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(\underline{x}) = g(\underline{x})$, $\forall\ \underline{x} \in A$. Per ogni curva (γ,Γ), γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subset A$, si ha

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = \int_a^b [X(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Y(x(t),y(t),z(t))y'(t) + Z(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt =$$

$$= \int_a^b [f_x(\gamma(t))x'(t) + f_y(\gamma(t))y'(t) + f_z(\gamma(t))z'(t)]dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)), \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Sia A un sottoinsieme *aperto* e *connesso* di $\mathbb{R}^n$. Per ogni coppia di punti $(\underline{x}, \underline{y}) \in A$, poniamo

$$\Gamma_A(\underline{x},\underline{y}) := \{\gamma: I = [a,b] \to \mathbb{R}^n, \gamma \text{ regolare a tratti}, \gamma(I) \subset A, \gamma(a) = \underline{x}, \gamma(b) = \underline{y}\}.$$

Si può dimostrare che, se A è aperto e connesso, l'insieme $\Gamma_A(\underline{x},\underline{y})$ non è vuoto, quali che siano i punti $\underline{x},\underline{y} \in A$.

TEOREMA 9. *Siano: A un aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$ e g: $A \to \mathbb{R}^n$, un campo vettoriale continuo. Allora g è conservativo se e solo se, per ogni coppia di punti $\underline{x}$, $\underline{y}$ di A si ha*

$$\int_{\gamma_1} <g,\tau>ds = \int_{\gamma_2} <g,\tau>ds,$$

quali che siano le curve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_A(\underline{x},\underline{y})$.

DIM. $\boxed{\text{Per } \boldsymbol{n = 2}}$. La necessità è provata dal Teorema 8; dimostriamo la sufficienza. Fissato in A un punto $\underline{x}^0$, poniamo, per ogni $\underline{x} \in A$, $f(\underline{x}) = \int_\gamma <g,\tau>ds$, essendo $\gamma \in \Gamma_A(\underline{x}^0,\underline{x})$. Dato che, per ipotesi, questo integrale non dipende dalla particolare curva scelta, si ha che la definizione è coerente e si ottiene effettivamente una funzione f: $A \to \mathbb{R}$. Proviamo che la funzione f è di classe C^1 e che si ha $\nabla f = g$, Sia dunque $g(x,y) = X(x,y)\underline{e}_1 + Y(x,y)\underline{e}_2$ e mostriamo che è $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = X(x,y)$. Si ponga $\underline{x}' = (x + h,y)^T$, δ: $[0,1] \to \mathbb{R}^2$, con $\delta(t) = (x + th, y)^T$; si ha

$$\frac{f(\underline{x}') - f(\underline{x})}{h} = \frac{f(x + h,y) - f(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_\gamma <g,\tau>ds + \int_\delta <g,\tau>ds - \int_\gamma <g,\tau>ds\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^1 [X(x + th,y)h + Y(x + th,y)\, 0]dt = \int_0^1 X(x + th,y)\, dt = X(x + \xi h,y)\,(1 - 0),$$

con $0 < \xi < 1$. Dunque $\frac{f(\underline{x}') - f(\underline{x})}{h}$ tende a $X(x,y)$ al tendere di h a 0, data la continuità della funzione $X(\underline{x})$. In modo analogo si prova che è $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Y(x,y)$. Da tali uguaglianze segue poi anche la continuità delle derivate parziali della funzione f. $\blacksquare$

COROLLARIO 10. *Un campo vettoriale continuo. g: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, con A aperto e connesso, è conservativo se e solo se, è a circuitazione nulla, ossia se e solo se si ha*

$$\int_\gamma <g,\tau>ds = 0$$

su ogni curva γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ chiusa e regolare a tratti, con sostegno Γ contenuto in A.

DIM. Se g è conservativo, è il gradiente di un campo scalare f: $A \to \mathbb{R}$ e si ha $\int_\gamma <g,\tau>ds$ = $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$, essendo $\gamma(b) = \gamma(a)$. Supponiamo, inversamente, che il campo g sia a circuitazione nulla. Fissiamo ad arbitrio due punti $\underline{x}$, $\underline{y} \in A$ e due curve γ_1, $\gamma_2 \in \Gamma(\underline{x},\underline{y})$; non è restrittivo supporre γ_1: $[-1,0] \to \mathbb{R}^n$ e γ_2: $[0,1] \to \mathbb{R}^n$. Sia ora γ: $[-1,1] \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [-1,0] \\ \gamma_2(1-t) & \text{se } t \in [0,1] \end{cases} .$$

La curva γ è chiusa e regolare a tratti; il suo sostegno Γ è dato da $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Si ottiene

$$0 = \int_\gamma <g,\tau>ds = \int_{\gamma_1} <g,\tau>ds - \int_{\gamma_2} <g,\tau>ds,$$

da cui la tesi, data l'arbitrarietà dei punti $\underline{x}$, $\underline{y}$ e delle curve γ_1, γ_2. ∎

OSSERVAZIONE. (Significato del termine "conservativo": Teorema *di conservazione dell'energia totale.*) Sia g: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ un campo di forze conservativo; esiste dunque un campo scalare f: $A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f = g$. Se $\gamma(t)$ è la legge del moto di una particella di massa m soggetta al campo di forze g, allora $\gamma(t)$ soddisfa all'equazione differenziale $m\, \gamma''(t) = g(\gamma(t))$. Moltiplicando scalarmente i due membri per $\gamma'(t)$ e integrando, si ottiene

$$m \int_a^b <\gamma''(t),\gamma'(t)>dt = \int_a^b <g(\gamma(t)),\gamma'(t)>dt,$$

da cui
$$\frac{1}{2} m \,||\gamma'(b)||^2 - \frac{1}{2} m \,||\gamma'(a)||^2 = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

e quindi
$$\frac{1}{2} m \,||\gamma'(b)||^2 - f(\gamma(b)) = \frac{1}{2} m \,||\gamma'(a)||^2 - f(\gamma(a)).$$

Si conclude che la funzione
$$E(t) = \frac{1}{2} m \,||\gamma'(t)||^2 - f(\gamma(t))$$

è costante nel tempo. (Il primo addendo dà l'energia cinetica, il secondo quella potenziale.)

DEFINIZIONE. Sia g: $A(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))^T$, un campo vettoriale di classe C^1; si definisce *rotore* di g il campo vettoriale *rot g* : $A \to \mathbb{R}^3$ così definito (sviluppo secondo la prima riga del determinante formale a secondo membro):

$$rot\, g := \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (Z_y - Y_z)\underline{e}_1 + (X_z - Z_x)\underline{e}_2 + (Y_x - X_y)\underline{e}_3.$$

OSSERVAZIONE. Si verifica facilmente che: *La legge $g \mapsto rot\, g$ è un'applicazione lineare di $C^1(A,\mathbb{R}^3)$ in $C^0(A,\mathbb{R}^3)$.* Osserviamo poi che si può scrivere $rot\, g = \nabla \wedge g$; per questo il rotore è anche detto *differenziale esterno* del campo vettoriale g.

OSSERVAZIONE. Dato un campo vettoriale g: $A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, con $g(x,y) = X(x,y)\underline{e}_1 + Y(x,y)\underline{e}_2$, questo individua un campo vettoriale $\overline{g}$: $A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\overline{g}(x,y,z) = X(x,y)\underline{e}_1 + Y(x,y)\underline{e}_2 + 0\underline{e}_3.$$

Se g è di classe C^1, è tale anche $\overline{g}$ e si ha

$$rot\ \overline{g} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = (Y_x - X_y)\underline{e}_3.$$

DEFINIZIONE. Il rotore di $\overline{g}$ si assume come *rotore* di g. È dunque

$$rot\ g := (Y_x - X_y)\underline{e}_3.$$

DEFINIZIONE. Un campo vettoriale g: $A(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ è detto *irrotazionale* se per esso si ha $rot\ g \equiv \underline{0}$.

Dal Teorema di Schwarz (cfr. Capitolo 12, Teorema 1) segue subito il

TEOREMA 11. *Ogni campo vettoriale conservativo di classe C^1 e irrotazionale.* ▮

N.B. Non sussiste l'implicazione opposta di quest'ultimo teorema.

ESEMPIO. 1) Si consideri il campo vettoriale g: $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$g(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\underline{e}_1 + \frac{x}{x^2+y^2}\underline{e}_2 .$$

Si constata immediatamente che il campo è irrotazionale. Si consideri ora la curva (γ, Γ) con γ: $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$. Si ha

$$\int_\gamma \langle g,\tau \rangle ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi.$$

Quindi si può concludere, per il Teorema 11, che il campo vettoriale g *non* è conservativo.

Per avere condizioni sufficienti affinché un campo irrotazionale sia conservativo, bisogna imporre delle condizioni di carattere topologico su A.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^n$ si dice *stellato* se esiste $\underline{x}^0 \in A$ tale che, per ogni $\underline{x} \in A$, il segmento $[\underline{x}^0,\underline{x}] := \{\underline{y} = \underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)$: $t \in [0,1]\}$ è contenuto in A.

TEOREMA 12. *Sia g: $A(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 con A insieme aperto e stellato. Allora g è conservativo se e solo se è irrotazionale.*

Cenno di dimostrazione. Basta, ovviamente, provare il *se*. Supposto g irrotazionale, si pone, per ogni $\underline{x} \in A$, $f(\underline{x}) = \int_\gamma \langle g,\tau \rangle ds$, essendo γ il segmento di equazione $\gamma(t) = \underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)$, $t \in [0,1]$. Si pone cioè:

$$f(\underline{x}) = \int_0^1 \langle g(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0)), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle dt.$$

Si prova poi che è $\nabla f = g$. ∎

ESEMPI. 2) Il campo vettoriale g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $g(x,y,z) = (z, y, x)^T$ è, come subito si vede, irrotazionale ed è definito in un insieme stellato; g è dunque conservativo. Fissiamo il punto $\underline{x}^0 = \underline{0}$. Una funzione potenziale di g è data dal campo scalare

$$f(\underline{x}) = \int_0^1 \langle g(\underline{0} + t(\underline{x} - \underline{0})), \underline{x} - \underline{0} \rangle dt = \int_0^1 \langle g(t\underline{x}), \underline{x} \rangle dt =$$

$$= \int_0^1 [X(t\underline{x})\, x'(t) + Y(t\underline{x})\, y'(t) + Z(t\underline{x})\, z'(t)] dt = \int_0^1 [(tz)\, x + (ty)\, y \ + (tx)\, z] dt =$$

$$= \int_0^1 [2xzt \ + y^2 t] dt = \ [2xz + y^2] \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2} [2xz + y^2].$$

3) Calcolare $\int_\gamma \langle g,\tau \rangle ds$, essendo il campo g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e la curva γ: $I \to \mathbb{R}^2$ definiti da

$$g(x,y) = (ye^x, e^x - \cos y\,)^T; \ \gamma(t) = (t \cos t, \ 1 - \sin t)^T, \ I = [0,2\pi].$$

Si ha:
$$\int_\gamma \langle g,\tau \rangle ds \ = \int_0^{2\pi} [y(t)\, e^{x(t)} x'(t) + (e^{x(t)} - \cos y(t)) y'(t)\,] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(1 - \sin t) e^{t \cos t} (\cos t - t \sin t) - (e^{t \cos t} - \cos(1 - \sin t)) \cos t] dt =$$

$$= [(1 - \sin t) e^{t \cos t}]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^{t \cos t} \cos t\, dt - \int_0^{2\pi} e^{t \cos t} \cos t\, dt - [\sin(1 - \sin t)]_0^{2\pi} = e^{2\pi} - 1.$$

Ma possiamo anche osservare che il campo g è irrotazionale e definito su un aperto stellato ed è, quindi, conservativo. Ne viene che invece di calcolare l'integrale di g lungo γ, possiamo calcolarlo lungo un'arbitraria curva regolare a tratti che unisca i punti $\gamma(0) = (0,1)^T$ e $\gamma(2\pi) = (2\pi,1)^T$. Scegliamo il segmento γ_1: $[0,1] \to \mathbb{R}^2$, dato da $\gamma_1(t) = (2\pi t,1)^T$. Si ha

$$\int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle ds \ = \int_0^1 [y(t)\, e^{x(t)} x'(t) + 0] dt = \int_0^1 [2\pi e^{2\pi t}] dt = [e^{2\pi t}]_0^1 = e^{2\pi} - 1.$$

§ 6. I TEOREMI BIDIMENSIONALI DI STOKES E DELLA DIVERGENZA

Il Teorema di Stokes

Sia (γ, Γ), con γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$, una curva regolare a tratti, semplice e chiusa. Il complementare dell'insieme Γ è formato da due aperti connessi, di cui uno limitato che indicheremo con Δ. Posto $D = cl\, \Delta$, si ha $\mathcal{F} D = \Gamma$.

DEFINIZIONE. Un insieme D così definito è detto un *dominio regolare* di $\mathbb{R}^2$.

DEFINIZIONE. Siano D un dominio regolare e (γ,Γ).una curva tale che $\Gamma = \mathcal{F}D$. Si dice che la curva γ *orienta positivamente* [*negativamente*] il suo sostegno Γ (= $\mathcal{F}D$) se, al crescere di $t \in [a,b]$, $\gamma(t)$ percorre $\mathcal{F}D$ in senso antiorario [in senso orario]. Per indicare una qualunque curva γ che orienta positivamente l'insieme $\mathcal{F}D$, useremo la notazione $+\mathcal{F}D$.

Sussiste il seguente Teorema che fornisce un metodo per ricondurre il calcolo degli integrali doppi a quello di integrali curvilinei.

TEOREMA 13. *(di Stokes bidimensionale) - Siano* $D(\subset \mathbb{R}^2)$ *un dominio regolare,* $A(\subset \mathbb{R}^2)$ *un aperto contenente* D, $g: A \to \mathbb{R}^2$ *un campo vettoriale di classe* C^1. *Si ha*

$$\iint_D <rot\, g, \underline{e}_3> dxdy = \int_{+\mathcal{F}D} <g,\tau> ds. \blacksquare$$

Se è $g(x,y) = X(x,y)\underline{e}_1 + Y(x,y)\underline{e}_2$ e se $\gamma: I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$, è una curva che orienta positivamente $\mathcal{F}D$, si ha

$$\iint_D [Y_x(x,y) - X_y(x,y)]dxdy = \int_a^b [X(x(t),y(t))x'(t) + Y(x(t),y(t))y'(t)]dt\ .$$

Non possiamo produrre la dimostrazione di questo Teorema, ma ci limitiamo a darne una giustificazione nel caso molto particolare che il dominio D sia un rettangolo; sia dunque $D = \{(x,y)^T: a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Si ha

$$\iint_D [Y_x(x,y) - X_y(x,y)]dxdy = \int_c^d (\int_a^b Y_x(x,y)dx)dy - \int_a^b (\int_c^d X_y(x,y)dy)dx =$$

$$= \int_c^d [Y(b,y) - Y(a,y)]dy - \int_a^b [X(x,d) - X(x,c)]dx =$$

$$= \int_a^b X(x,c)dx + \int_c^d Y(b,y)dy - \int_a^b X(x,d)dx - \int_c^d Y(a,y)diy.$$

Ora, percorrendo $\mathcal{F}D$ in senso antiorario a partire dal punto (a,c), si incontrano 4 segmenti, sostegni di altrettante curve che indicheremo con γ_1, γ_2, γ_3 e γ_4. Si ottiene

$$\int_{+\mathcal{F}D} <g,\tau> ds = \int_{\gamma_1} <g,\tau> ds + \int_{\gamma_2} <g,\tau> ds + \int_{\gamma_3} <g,\tau> ds + \int_{\gamma_4} <g,\tau> ds.$$

Si vede poi subito che è

$$\int_{\gamma_1} <g,\tau> ds = \int_a^b X(x,c)dx; \qquad \int_{\gamma_2} <g,\tau> ds = \int_c^d Y(b,y)dy;$$

$$\int_{\gamma_3} <g,\tau> ds = - \int_a^b X(x,d)dx; \qquad \int_{\gamma_4} <g,\tau> ds = - \int_c^d Y(a,y)dy.$$

Applicazione al calcolo delle aree

Dato un dominio *regolare D*, sappiamo che è $m(D) = \iint_D 1dxdy$. Siano ora g_1,g_2: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i due campi vettoriali definiti da $g_1(x,y) = (0, x)^T$ e $g_2(x,y) = (y, 0)^T$. Si ha

$$rot\ g_1 = \underline{e}_3 \quad \text{e} \quad rot\ g_2 = -\underline{e}_3,$$

da cui
$$<rot\ g_1,\underline{e}_3> = 1 \quad \text{e} \quad <rot\ g_2,\underline{e}_3> = -1.$$

Dal Teorema 13 si ricava allora il

COROLLARIO 14. *L'area di un dominio regolare D è data da*

$$m(D) = \int_{+\mathcal{F}D} x(t)y'(t)dt = -\int_{+\mathcal{F}D} y(t)x'(t)dt = \frac{1}{2}\int_{+\mathcal{F}D}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt..$$

DIM. Si ha:
$$m(D) = \iint_D 1dxdy = \iint_D <rot\ g_1,\underline{e}_3>dxdy = \int_{+\mathcal{F}D} x(t)y'(t)dt;$$

$$m(D) = -\iint_D <rot\ g_2,\underline{e}_3>dxdy = -\int_{+\mathcal{F}D} y(t)x'(t)dt;$$

da cui
$$m(D) = \frac{1}{2}\int_{+\mathcal{F}D}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt. \ \blacksquare$$

ESEMPI. 1) Si vuol calcolare l'area del dominio regolare avente per frontiera il sostegno della curva (*asteroide*) γ: $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)^T$, $a > 0$. Si ha

$$m(D) = \iint_D 1dxdy = \frac{1}{2}\int_{+\mathcal{F}D}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}[\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t\,]dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{4\pi}\sin^2 u\,du = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

2) Si vuol calcolare l'area del dominio regolare D avente per frontiera il sostegno della curva (*cardioide*) γ: $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = ((1 + \cos t)\cos t, (1 + \cos t)\sin t)^T$. Si ha

$$m(D) = \iint_D 1dxdy = \frac{1}{2}\int_{+\mathcal{F}D}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \cos t)(\cos^2 t + \cos^3 t + \sin^2 t + \cos t\sin^2 t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \cos t)^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos t + \cos^2 t)dt = \frac{3\pi}{2}.$$

In questo caso, si poteva procedere anche partendo direttamente dall'equazione polare $\rho(\vartheta) = 1 + \cos\vartheta$. Si ha

$$m(D) = \iint_D 1dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{1+\cos\vartheta} \rho d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \cos\vartheta)^2 d\vartheta = \frac{3\pi}{2}.$$

Il teorema della divergenza

DEFINIZIONE. Siano D un dominio regolare e $\gamma \in +\Finv D$, con γ: $I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$ regolare a tratti e definita da $\gamma(t) = (x(t),y(t))^T$. Per ogni $t \in I$ per cui esiste il vettore tangente $(x'(t),y'(t))^T \neq \underline{0}$, si definisce *vettore normale esterno* a $\Gamma = \Finv D$ nel punto $\gamma(t)$ il vettore $n(t) := (y'(t), -x'(t))^T$ $(\neq \underline{0})$; si definisce poi *versore normale esterno* a Γ nel punto $\gamma(t)$ il versore $\nu(t) := \frac{n(t)}{\|n(t)\|}$.

DEFINIZIONE. Siano D e γ come sopra. Se g: $A \to \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale continuo definito su un aperto A contenente D, si chiama *flusso di g attraverso* $\Gamma = \Finv D$ il numero

$$\int_{+\Finv D} <g,\nu>ds := \int_a^b <g(\gamma(t)),n(t)>dt = \int_a^b <g(\gamma(t)),\nu(t)>\|n(t)\|dt.$$

DEFINIZIONE. Dato un campo vettoriale g: $A \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 sull'aperto A di $\mathbb{R}^2$ e definito da $g(t) = (X(\underline{x}), Y(\underline{x}))^T$, si chiama *divergenza di g* il campo scalare *div g* definito da

$$div\, g(\underline{x}) := X_x(\underline{x}) + Y_y(\underline{x}).$$

Osserviamo che la divergenza di g può essere indicata con il prodotto scalare formale

$$div\, g := <\nabla, g>.$$

TEOREMA 15 *(della divergenza) - Siano D un dominio regolare di* $\mathbb{R}^2$, $A(\subset \mathbb{R}^2)$ *un aperto contenente D* e g: $A \to \mathbb{R}^2$ *un campo vettoriale di classe* C^1. *Si ha*

$$\iint_D div\, g\, dm = \int_{+\Finv D} <g,\nu>ds.$$

[Ossia: *l'integrale doppio su D della divergenza del campo vettoriale g uguaglia il flusso di g attraverso* $\Finv D$.]

DIM. Sia $g(\underline{x}) = (X(\underline{x}), Y(\underline{x}))^T$. Consideriamo il nuovo campo vettoriale h: $A \to \mathbb{R}^2$ definito da $h(\underline{x}) = (-Y(\underline{x}), X(\underline{x}))^T$. Si constata subito che h è di classe C^1 e che si ha

$$div\, g = <rot\, h, \underline{e}_3>.$$

Tenuto conto del Teorema di Stokes, si ottiene:

$$\iint_D div\, g\, dm = \iint_D (X_x(x,y) + Y_y(x,y))\, dxdy = \iint_D <rot\, h(x,y), \underline{e}_3>dxdy =$$

$$= \int_a^b (-Y(\underline{x}(t))x'(t) + X(\underline{x}(t))y'(t))dt = \int_a^b <g(\underline{x}(t)),n(\underline{x}(t))>dt = \int_{+\Finv D} <g,\nu>ds. \blacksquare$$

§ 7. E S E R C I Z I

1) Calcolare le lunghezze dei seguenti archi di curva:

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi; \qquad \begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \\ z = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi;$$

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi; \qquad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

2) Si consideri un filo di densità $\mu(x,y,z)$ disposto sul sostegno di una curva regolare semplice (γ, Γ). Ricordiamo che le coordinate del baricentro sono date da

$$\bar{x} = \frac{\int_\gamma x\,\mu(x,y,z)\,ds}{\int_\gamma \mu(x,y,z)\,ds}, \;\ldots\ldots$$

Ricordiamo inoltre che i momenti rispetto all'origine e rispetto agli assi sono dati da

$$m_0 = \int_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x,y,z)\,ds, \qquad m_x = \int_\gamma (y^2 + z^2)\mu(x,y,z)\,ds, \;\ldots\ldots$$

Calcolare baricentro e momenti delle seguenti curve ($\mu(x,y,z) = 1$):

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi; \qquad \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi; \qquad \begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \\ z = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

3) Si dica se il campo vettoriale $g: A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, con $A = \{(x,y)^T: y > 0\}$, definito da $g(x,y) = (x\log(y^2), \frac{x^2}{y})^T$ è conservativo. In caso affermativo, si calcoli una sua funzione potenziale.

4) Si calcoli $\int_\gamma \langle g,\tau\rangle ds$, essendo $g: A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y)^T: x > 0\}$, $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiti da $g(x,y) = (xe^y + \log x, \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}x^2e^y)^T$, $\gamma(t) = (2 + \sin t, t)^T$.

5) *a*) Si calcoli l'area del dominio piano compreso fra l'asse delle x e l'arco di *cicloide* sostegno della curva $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^T$.

b) Si calcoli l'area del dominio piano delimitato dall'arco di *spirale logaritmica* di equazione polare $\rho(t) = at$, $a > 0$, $0 \le t \le 2\pi$.