Capitolo Decimo

SERIE DI FUNZIONI

§ 1. SUCCESSIONI DI FUNZIONI

I concetti di successione e di serie possono essere estesi in modo molto naturale al caso delle funzioni.

DEFINIZIONE. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e, per ogni numero naturale n, sia f_n una funzione a valori reali definita in E. Si ottiene così una *successione* $(f_n)_n$ *di funzioni di* E *in* $\mathbb{R}$ (ossia un'applicazione di $\mathbb{N}$ nell'insieme $\mathbb{R}^E$ di tutte le funzioni di E in $\mathbb{R}$).

Per ogni $x_0 \in E$, resta definita una successione di numeri reali $(f_n(x_0))_n$ che potrà essere convergente o no. Sia $E'(\subset E)$ l'insieme dei punti $x \in E$ per i quali la successione numerica $(f_n(x))_n$ è convergente. Posto, per ogni $x \in E'$, $\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, si ottiene una funzione $\varphi: E' \to \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE. Data una successione $(f_n)_n$ di funzioni a valori reali e definite in un insieme E, diremo che essa *converge (puntualmente)* a una funzione $\varphi: E \to \mathbb{R}$ se, per ogni $x \in E$, la successione numerica $(f_n(x))_n$ è convergente a $\varphi(x)$. Scriveremo $f_n \to \varphi$, o $\varphi = \lim_{n\to+\infty} f_n$.

Si pone allora un problema. Se le funzioni f_n godono di una data proprietà (continuità, derivabilità, integrabilità, …) e se è $f_n \to \varphi$, gode di tale proprietà anche la φ? In generale, la risposta è negativa.

ESEMPIO. 1) Siano: $E = [0,1]$, $f_n : E \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. La successione $(f_n)_n$ converge in E alla funzione φ che vale 1 per $x = 1$ e 0 per $x \neq 1$. Le f_n sono continue, mentre la φ non lo è.

Si cercano allora condizioni che assicurino il trasferimento delle proprietà delle f_n alla funzione limite.

La condizione $f_n \to \varphi$ in E significa:

$$(\forall\, x \in E)(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \nu(x, \varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > \nu(x, \varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon).$$

Interessa il caso in cui il numero ν dipende solo da ε e non dal punto x.

DEFINIZIONE. Si dice che la successione $(f_n)_n$ di funzioni di E in $\mathbb{R}$ *converge uniformemente* ad una funzione $\varphi: E \to \mathbb{R}$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero naturale ν, dipendente solo da ε, tale che, per ogni $n > \nu$ e per ogni $x \in E$, si ha $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Non intendiamo insistere ulteriormente su questo concetto, ma ci limitiamo a dimostrare, a titolo di esempio, il seguente

TEOREMA 1. *Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni continue di E in $\mathbb{R}$; se $(f_n)_n$ converge uniformemente alla funzione $\varphi: E \to \mathbb{R}$, allora anche la funzione φ è continua in E.*

DIM. Fissiamo un $x_0 \in E$ e proviamo che la φ è continua in x_0. Assegniamo dunque un $\varepsilon > 0$. In virtù della convergenza uniforme, esiste un ν tale che, per ogni $n > \nu$ e per ogni $x \in E$, si ha $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon/3$. Fissato un $m > \nu$, esiste un intorno U di x_0 per ogni x del quale si ha $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \varepsilon/3$. Dunque, per ogni $x \in U$, si ha:

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |\varphi(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - \varphi(x_0)| \leq$$
$$\leq |\varphi(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - \varphi(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \blacksquare$$

§ 2. SERIE DI FUNZIONI

DEFINIZIONE. Data una successione $(f_n)_n$ di funzioni di E in $\mathbb{R}$, si definisce una nuova successione di funzioni $(S_n)_n$, sempre di E in $\mathbb{R}$, ponendo:

$$S_0(x) := f_0(x),\quad S_1(x) := f_0(x) + f_1(x),\quad S_2(x) := f_0(x) + f_1(x) + f_2(x),\ \dots,$$
$$S_n(x) := f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x),\ \dots\dots$$

ossia:
$$S_0(x) := f_0(x),\quad S_1(x) := S_0(x) + f_1(x),\quad S_2(x) := S_1(x) + f_2(x),\ \dots,$$
$$S_n(x) := S_{n-1}(x) + f_n(x),\ \dots\dots$$

La successione $(S_n)_n$ così definita è detta *successione delle somme parziali* o *delle ridotte*. La coppia $((f_n)_n, (S_n)_n)$ si dice *serie di funzioni*. La indicheremo scrivendo $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

DEFINIZIONE. Diremo che una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, con $f_n: E \to \mathbb{R}$, *converge (puntualmente)* a una funzione $\varphi: E \to \mathbb{R}$ se, per ogni $x \in E$, si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \varphi(x)$. In tal caso, diremo che la funzione $\varphi(x)$ è la *somma* della serie.

Anche nel caso delle serie, come già nel caso delle successioni, ci si può chiedere se le proprietà delle funzioni f_n si trasmettono alla funzione somma (supposta esistente).

La risposta è, in generale, negativa. Sappiamo che la somma di un numero finito di funzioni continue su un dato insieme è ancora una funzione continua; analogamente per le funzioni derivabili e le funzioni integrabili. Ne viene che, se le f_n godono di una di queste proprietà, ne godono anche le funzioni S_n. Ci si riconduce così al caso delle successioni di funzioni. Per quanto visto nel paragrafo precedente, si ha, per esempio, che non sempre la somma di una serie di funzioni continue è ancora una funzione continua.

Anche nel caso delle serie si introduce il concetto di convergenza uniforme. Precisamente:

DEFINIZIONE. Diremo che una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, con $f_n: E \to \mathbb{R}$, *converge uniformemente* a una funzione $\varphi: E \to \mathbb{R}$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > \nu$, e per ogni $x \in E$, si ha $|\varphi(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Il Teorema visto nel paragrafo precedente ci dice che:

TEOREMA 1'. *Se una serie di funzioni continue converge uniformemente, allora ance la funzione somma è continua.* $\blacksquare$

PROBLEMA. È dato un sistema infinito di funzioni $\Phi := \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$ con $\varphi_n : I = [a,b] \to \mathbb{R}$. Si vuol vedere se, data una funzione $g : I \to \mathbb{R}$, esiste una successione numerica $(a_n)_n$ tale che

$$(\forall x \in I)(g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(x)).$$

In caso affermativo, si dice che g è *sviluppabile in serie di funzioni* rispetto al sistema Φ.

Ci sono due casi particolari di fondamentale importanza:
- *Sviluppabilità in serie di potenze* (o di *Taylor*), se è $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I$.
- *Sviluppabilità in serie di Fourier,* se è:

$$\varphi_0(x) = 1;\ \varphi_{2n-1}(x) = \sin(nx);\ \varphi_{2n}(x) = \cos(nx),\ n \in \mathbb{N}^+.$$

Noi ci occuperemo esclusivamente del primo caso.

§ 3. SERIE DI POTENZE

DEFINIZIONE. Fissiamo un $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice *serie di potenze* di $(x - x_0)$ una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

dove i numeri reali $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ sono detti i *coefficienti* della serie.

ESEMPIO. 1) Consideriamo le tre serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\,x^n$. La prima converge per ogni x reale con $|x| < 1$; la seconda converge per ogni x reale; la terza converge solo per $x = 0$.

TEOREMA 2. (*Lemma di Abel*) - *Se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ *converge per* $x = x_1$, *allora converge assolutamente per ogni* x *per cui è* $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. *La stessa tesi sussiste anche sotto l'ipotesi più debole che la successione* $(a_n(x_1 - x_0)^n)_n$ *risulti limitata.*

DIM. Sappiamo che, se la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ converge, allora la successione $(a_n(x_1 - x_0)^n)_n$ tende a 0 ed è, pertanto, limitata. Supponiamo dunque $|a_n(x_1 - x_0)^n| < M$, per ogni n. Sia $(0 \le)\ |x - x_0| < |x_1 - x_0|$; si ha:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n|\cdot|x - x_0|^n = |a_n|\cdot|x_1 - x_0|^n \cdot \frac{|x - x_0|^n}{|x_1 - x_0|^n} \le M\left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^n,$$

da cui la tesi, essendo convergente la serie a termini reali positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M\left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^n. \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Sia $A = \{|x - x_0|: \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge$\}$ e sia $R := \sup A$, con $0 \leq R \leq + \infty$. R è detto *raggio di convergenza* della serie.

TEOREMA 3. *Data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, *sia R il suo raggio di convergenza. Allora:*
1) *La serie converge assolutamente per ogni x tale che* $|x - x_0| < R$.
2) *La serie non converge per ogni x per cui è* $|x - x_0| > R$.

DIM. Se è $|x - x_0| < R$, esiste un x_1, con $|x - x_0| < |x_1 - x_0| \leq R$, tale che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ risulta convergente. Per il Teorema precedente, si ha subito la prima parte della tesi. La seconda segue dal fatto che, per la stessa definizione di R, la serie non può convergere per nessun x per cui sia $|x - x_0| > R$. ∎

OSSERVAZIONE. Sussiste anche l'implicazione opposta di quest'ultimo Teorema, cioè:

Se un numero reale R soddisfa alle proprietà (1) *e* (2) *del precedente Teorema, allora R è il raggio di convergenza della serie di potenze.*

COROLLARIO 4. *Data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, *sia R il suo raggio di convergenza. Se è* $R = 0$, *la serie converge solo in* x_0; *se è* $R = + \infty$, *la serie converge per ogni numero reale x; se è* $0 < R < + \infty$, *la serie converge in ogni punto dell'intervallo aperto* $]x_0 - R, x_0 + R[$, *mentre non converge in ciascuno dei punti esterni a tale intervallo* ∎

N.B. I punti $x_0 - R$ *e* $x_0 + R$ vanno studiati a parte.

DEFINIZIONE. Se il raggio di convergenza R di una serie di potenze è finito e positivo, l'insieme $I_R =]x_0 - R, x_0 + R[$ è detto l'*intervallo di convergenza*, mentre è detto *insieme di convergenza* l'insieme D formato da tutti i punti di $\mathbb{R}$ in cui la serie converge. Si ha $I_R \subset D \subset \overline{I_R} = [x_0 - R, x_0 + R]$.

ESEMPIO. 2) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge per $-1 < x < 1$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ converge per $-1 \leq x < 1$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$ converge per $-1 \leq x \leq 1$.

Stabiliamo due criteri per determinare il raggio R di convergenza di una serie di potenze.

TEOREMA 5. *Se esiste il* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, allora si ha:

$R = 0$, *se è* $L = + \infty$; $R = + \infty$, *se è* $L = 0$; $R = 1/L$, *se è* $0 < L < + \infty$.

DIM. Sia $0 < \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < + \infty$ e si fissi un x tale che $|x - x_0| < \frac{1}{L}$. Si ha:

$$\sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\, |x - x_0| \to L\, |x - x_0| = K < 1;$$

la serie converge per il Criterio dalla radice (caso del limite). Se, invece, è $|x - x_0| > \frac{1}{L}$, si ha:

$$\sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x - x_0| \to L\,|x - x_0| = H > 1;$$

dunque la serie non converge (sempre per lo stesso Criterio).

Se è $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x - x_0| = 0$, per ogni x e quindi la serie converge per ogni numero reale.

Se, in fine, è $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, si ha $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x - x_0| = +\infty$, per ogni $x \neq x_0$ e quindi la serie non converge per alcun numero reale diverso da x_0. ∎

In modo perfettamente analogo, si prova il

TEOREMA 6. *Se esiste il* $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, *allora si ha:*

$R = 0$, *se è* $L = +\infty$; $R = +\infty$, *se è* $L = 0$; $R = 1/L$, *se è* $0 < L < +\infty$. ∎

ESEMPI. 3) Si vuol studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\log(n + 1)} (x - 2)^n$. Si ha:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n + 1)^2}{\log(n + 2)} \frac{\log(n + 1)}{n^2} \to 1.$$

È dunque $R = 1$. La serie converge per $x \in\ ]1, 3[$. Per $x = 1$ o $x = 3$, la serie non converge, dato che per il suo termine generale b_n si ha $|b_n| = \frac{n^2}{\log(n + 1)} \to +\infty$.

4) Si vuol studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n (x + 1)^n$. Si ha:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 2 + \frac{1}{n} \to 2.$$

È dunque $R = \frac{1}{2}$. La serie converge per $x \in\ ]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$. Per $x = -\frac{3}{2}$ o $x = -\frac{1}{2}$, la serie non converge, dato che per il suo termine generale b_n si ha

$$|b_n| = \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}{2^n} > 1.$$

§ 4. SERIE DI POTENZE E DERIVAZIONE

TEOREMA 7. *Se la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ *ha raggio di convergenza* R, *allora è* R *anche il raggio di convergenza della serie delle derivate* $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$.

DIM. Siano R e R' i raggi di convergenza delle due serie. Dato un x_1 tale che $0 < |x_1 - x_0| < R'$, la serie di termine generale $b_n = n \cdot a_n(x_1 - x_0)^{n-1} = \frac{n\, a_n}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0)^n$ converge assolutamente. Per n sufficientemente grande, si ha $|b_n| = \frac{n|a_n|}{|x_1 - x_0|}|x_1 - x_0|^n > |a_n| \cdot |x_1 - x_0|^n$. Per il criterio del confronto, si ottiene che per $x = x_1$ converge anche la serie di partenza. È dunque $R \geq R'$.

Sia ora x_1 tale che $0 < |x_1 - x_0| < R$; esiste pertanto un x_2 tale che $|x_1 - x_0| < |x_2 - x_0| < R$. Dunque la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot |x_2 - x_0|^n$ converge. Ora, per n sufficientemente grande, si ha:

$$n\,|a_n| \cdot |x_1 - x_0|^{n-1} = |a_n| \left[\frac{n}{|x_2 - x_0|}\left|\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}\right|^{n-1}\right] \cdot |x_2 - x_0|^n < |a_n| \cdot |x_2 - x_0|^n,$$

dato che il fattore $\left[\frac{n}{|x_2 - x_0|}\left|\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}\right|^{n-1}\right]$ tende a zero. Per il criterio del confronto, si ottiene che per $x = x_1$ converge anche la serie delle derivate. È dunque anche $R \leq R'$. ∎

Sussiste inoltre il seguente importante risultato:

TEOREMA 8. *(di derivabilità) - Data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, *con raggio di convergenza* $R > 0$, *la funzione somma* $f(x)$ *è derivabile in* $]x_0 - R; x_0 - R[$ *e si ha* $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n(x - x_0)^{n-1}$.

DIM. Effettuando il cambio di variabile: $x - x_0 = u$, si ottiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$ che, ovviamente, ha ancora raggio di convergenza R. Sappiamo che anche la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n u^{n-1}$ ha lo stesso raggio di convergenza. Fissiamo un u con $|u| < R$. Chiamiamo h e δ due numeri reali tali che $0 < |h| < \delta < R - |u|$. Si ha:

$$\left|\frac{f(u+h) - f(u)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n u^{n-1}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left((u+h)^n - u^n\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n u^{n-1} h\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\left(0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left[(u+h)^n - u^n - n\,h u^{n-1}\right]\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left[u^n + n\,u^{n-1}h + \binom{n}{2}u^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}u^{n-3}h^3 + \ldots + h^n - u^n - n\,h u^{n-1}\right]\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} a_n\left[\binom{n}{2}u^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}u^{n-3}h^3 + \ldots + h^n\right]\right)\right| =$$

$$= |h| \times \left| \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left[\binom{n}{2} u^{n-2} + \binom{n}{3} u^{n-3} h + \dots + h^{n-2} \right] \right| \leq$$

$$\leq |h| \times \left(\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \left[\binom{n}{2} |u|^{n-2} + \binom{n}{3} |u|^{n-3} \delta + \dots + \delta^{n-2} \right] \right) =$$

$$= |h| \times \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|a_n|}{\delta^2} \left[\binom{n}{2} |u|^{n-2} \delta^2 + \binom{n}{3} |u|^{n-3} \delta^3 + \dots + \delta^n \right] \right) \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{\delta^2} \times \left(\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \left(|u| + \delta\right)^n \right).$$

Essendo, per ipotesi, $|u| + \delta < R$, la serie a termini positivi $\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n|(|u| + \delta)^n$ è convergente ad un valore K dato dall'estremo superiore dell'insieme delle sue ridotte (Teor. sul limite delle funzioni monotone!). In conclusione, risulta:

$$\left| \frac{f(u+h) - f(u)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n u^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{\delta^2} \times K$$

che tende a 0 al tendere a 0 di h. ∎

COROLLARIO 9. *Se è* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, *con raggio di convergenza* $R > 0$, *allora la funzione somma* $f(x)$ *è continua su* $]x_0 - R; x_0 + R[$. ∎

TEOREMA 10 *(di integrabilità) - Sia data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, *con raggio di convergenza* $R > 0$ *e sia* $f(x)$ *la sua somma. Allora la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ *ha ancora raggio di convergenza* R *e la sua somma* $F(x)$ *è una primitiva di* $f(x)$ *sull'intervallo* $]x_0 - R; x_0 + R[$.

DIM. La tesi segue dai Teoremi 7 e 8, dato che la prima serie sopra scritta si ottiene derivando termine a termine la seconda. ∎

Ricordiamo ancora un utile risultato di cui non riportiamo la dimostrazione:

TEOREMA 11 *(di Abel) - È data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, *con raggio di convergenza* $R > 0$. *Se la serie converge per* $x = x_0 + R$ [*per* $x = x_0 - R$], *allora la funzione somma* $f(x)$ *è continua anche nel punto* $x_0 + R$ [*nel punto* $x_0 - R$]. ∎

§ 5. SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI TAYLOR

Dal Teorema 8 segue subito il

TEOREMA 12. *Sia data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, *con raggio di convergenza* $R > 0$. *La funzione somma* $f(x)$ *è derivabile infinite volte su* $I =]x_0 - R, x_0 + R[$ (ossia: $f \in C^\infty(I)$) *e si ha:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k},$$

dove la serie a secondo membro ha ancora raggio di convergenza R. ∎

COROLLARIO 13. *Se è* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ *su* $]x_0 - R, x_0 + R[$, *si ha:* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.
È dunque:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n . \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Sia $f \in C^\infty(I)$, con $I =]x_0 - h, x_0 + h[$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ prende il nome di *serie di Taylor generata da f* o *sviluppo di Taylor di f, con punto iniziale* x_0. Se la serie di Taylor generata da f converge in I alla funzione stessa, si dice che f è *sviluppabile su I in serie di Taylor.*

La ragione di questo nome è data dal fatto che la ridotta k - ima

$$S_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

è il polinomio di Taylor di f di grado k con punto iniziale x_0.

Dunque, la somma di una serie di potenze è una funzione sviluppabile in serie di Taylor (che coincide con la serie di partenza). Si pone, per contro, il

PROBLEMA. Sotto quali condizioni una funzione f è sviluppabile in serie di potenze?

Intanto, la f deve essere infinitamente derivabile, ma questo *non basta.* Può cioè accadere che la serie di Taylor di una funzione non converga alla funzione che l'ha generata, come appare dal seguente

ESEMPIO. 1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Si ha $f^{(n)}(0) = 0$, per ogni n. Quindi la serie di Taylor generata da f, con punto iniziale $x_0 = 0$, è la serie *nulla* che non converge a f (tranne che in $x_0 = 0$).

TEOREMA 14. *Se è $f \in C^\infty(I)$, con $I =]x_0 - h, x_0 + h[$, e se esiste un $M > 0$ per cui risulti $|f^{(n)}(x)| \le M \frac{n!}{h^n}$, per $|x - x_0| < h$, allora, per tali x, è*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

dove la serie a secondo membro ha raggio di convergenza $R \ge h$.

DIM. Se è $|x - x_0| < h$, si ha:

$$|f(x) - S_{k-1}(x)| = \left| f(x) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| = \left| \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - x_0)^k \right| =$$

$$= \frac{|f^{(k)}(\xi)|}{k!} |x - x_0|^k \le M \frac{k!}{h^k} \frac{|x - x_0|^k}{k!} \le M \left| \frac{x - x_0}{h} \right|^k = M q^k \to 0,$$

essendo $0 \le q = \left| \frac{x - x_0}{h} \right| < 1$. ∎

TEOREMA 15. *Se è $f \in C^\infty(I)$, con $I =]x_0 - h, x_0 + h[$, e se esiste un $L > 0$ per cui risulti $|f^{(n)}(x)| \le L^n$, per $|x - x_0| < h$, allora la f è sviluppabile su I in serie di Taylor.*

DIM. Si ha: $|f(x) - S_{k-1}(x)| = \frac{|f^{(k)}(\xi)|}{k!} |x - x_0|^k \le \frac{L^k}{k!} |x - x_0|^k < \frac{(Lh)^k}{k!} \to 0$. ∎

COROLLARIO 16. *Se è $f \in C^\infty(I)$, con $I =]x_0 - h, x_0 + h[$, e se esiste un $H > 0$ per cui risulti $|f^{(n)}(x)| \le H$, per $|x - x_0| < h$, allora la f è sviluppabile su I in serie di Taylor.*

DIM. Per $n > 0$ si ha: $|f^{(n)}(x)| \le H < (H + 1)^n$, da cui la tesi per il Teorema precedente. ∎

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ è *analitica* in $x_0 \in I$ se esiste un $h > 0$ tale che la f risulti sviluppabile in serie di Taylor in $]x_0 - h, x_0 + h[$; la f è detta *analitica* in I se è tale in ogni punto di I.

§ 6. SVILUPP0 IN SERIE DI TAYLOR DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

A) L'esponenziale. $f(x) = e^x$; $x_0 = 0$.

Si ha: $f^{(n)}(x) = e^x$; $f^{(n)}(0) = 1$

e, inoltre: $|f^{(n)}(x)| \le e^h$, per ogni x per cui è $|x| \le h$.

È dunque: $$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{per } |x| < h .$$

Essendo h arbitrario, e^x è sviluppabile su tutto $\mathbb{R}$.

B) Il coseno. $f(x) = \cos x;\ x_0 = 0.$

Si ha: $f^{(4n)}(x) = \cos x$; $f^{(4n+1)}(x) = -\sin x$; $f^{(4n+2)}(x) = -\cos x$; $f^{(4n+3)}(x) = \sin x$;

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n;\ f^{(2n+1)}(0) = 0$$

e, inoltre: $|f^{(n)}(x)| \le 1$ per ogni x .

È dunque:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Dato che questo è vero in ogni intervallo $]-h, h[$, si conclude che la funzione $\cos x$ è sviluppabile su tutto $\mathbb{R}$.

C) Il seno. $f(x) = \sin x;\ x_0 = 0.$

Si procede esattamente come sopra. Si ottiene:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{su } \mathbb{R}.$$

D) Il coseno iperbolico. $f(x) = \mathrm{Ch}\,x = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2};\ x_0 = 0.$

Si ha: $f^{(2n)}(x) = \cosh x$; $f^{(2n+1)}(x) = \sinh x$; $f^{(2n)}(0) = 1$; $f^{(2n+1)}(0) = 0$,

e, inoltre: $|f^{(n)}(x)| \le \cosh x < \cosh h$, per $|x| < h$.

È dunque:

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{per } |x| < h.$$

Essendo h arbitrario, $\cosh x$ è sviluppabile su tutto $\mathbb{R}$.

E) Il seno iperbolico. $f(x) = \mathrm{Sh}\,x = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2};\ x_0 = 0.$

Procedendo come sopra, si trova che è:

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{su } \mathbb{R}.$$

F) La funzione potenza. $f(x) = (1 + x)^\alpha;\ x_0 = 0;\ \alpha \in \mathbb{R}.$

Si ha: $f^{(n)}(x) = (\alpha)_n (1 + x)^{\alpha - n} = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$;

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n} = \frac{(\alpha)_n}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Lo sviluppo di Taylor di $(1 + x)^\alpha$ è dunque dato dalla *serie binomiale*: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$

Proviamo che: 1) Il raggio di convergenza di questa serie è $R = 1$.
2) La serie converge a $f(x)$ in $]-1, 1[$.

1) Si ha: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(\alpha)_{n+1}}{(n+1)!}\ \frac{n!}{(\alpha)_n}\right| = \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right|$.

È dunque, definitivamente, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n-\alpha}{n+1} \to 1 = L$.

Il raggio di convergenza è quindi $R = 1/L = 1$.

2) Posto $g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$; per $|x| < 1$,

si ha: $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1} = \alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1}$;

$$x\,g'(x) = \alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^n;$$

$$(1+x)g'(x) = \alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1} + \alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^n = \alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n + \alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^n =$$

$$= \alpha + \alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}\right]x^n = \alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha\, g(x).$$

Si ha dunque: $(1+x)g'(x) = \alpha\, g(x)$; $g(0) = 1$,

ossia: $\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{1+x}$; $g(0) = 1$.

Si ottiene: $D(\log(g(x))) = D(\log(1+x)^\alpha)$; $\log(g(0)) = 0$,

da cui: $\log(g(x)) = \log(1+x)^\alpha + c$; $\log(g(0)) = 0 = \log(1+0)^\alpha + c = c$,

e, in fine, $\log(g(x)) = \log(1+x)^\alpha$.

Ma ciò equivale a $g(x) = (1+x)^\alpha$.

È dunque: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$; per $|x| < 1$,

Casi particolari di α per la funzione potenza. (Sempre con $|x| < 1$.)

1) La radice. $\boxed{\alpha = 1/2.}$ Si ha:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}x^n = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(1/2)_n}{n!}x^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(1-2\cdot1)(1-2\cdot2)(1-2\cdot3)\ldots(1-2(n-1))}{2^n n!}x^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n.$$

Si può provare che la serie converge anche per $x = 1$ (Leibniz); per il Teorema di Abel, si ha poi che la somma della serie è $\sqrt{2}$.

ESEMPIO. 1) Si ha

$$\sqrt{53} = \sqrt{49 + 4} = 7\sqrt{1 + \frac{4}{49}} = 7\left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{49} - \frac{1}{4 \times 2}\left(\frac{4}{49}\right)^2 + \ldots\ldots\right) \approx$$

$$\approx 7\left[1 + \frac{2}{49} - \frac{2}{49^2}\right] = 7 \times \frac{2497}{2401} = 7{,}27988\ldots\ldots$$

(In realtà, è $\sqrt{53} = 7{,}2801\ldots\ldots$)

2) $\boxed{\alpha = -1.}$ Si ha: $\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

2') Il logaritmo. Posto $g(x) = \log(1 + x)$, si ha:

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n ,$$

da cui $$g(x) = \log(1 + x) = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} x^{n+1} .$$

La serie è convergente anche per $x = 1$ (Leibniz); inoltre essa converge a $\log 2$ per il Teorema di Abel. Lo sviluppo non è molto efficace, perché la convergenza è molto lenta.

Ora, avendosi $$\log(1 - x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n + 1} x^{n+1} ,$$

si ottiene: $$\log\frac{1 + x}{1 - x} = \log(1 + x) - \log(1 - x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n + 1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n + 1} x^{2n+1} .$$

Siccome, per ogni $y > 0$ esiste uno ed un solo $x \in\ ]-1, 1[$ tale che $y = \frac{1 + x}{1 - x}$ $[x = \frac{y - 1}{y + 1}]$, si ha $\log y = \log \frac{1 + x}{1 - x}$. Sottolineiamo esplicitamente il fatto che questa formula permette il calcolo del logaritmo di un qualunque numero positivo.

ESEMPIO. 2) Si ha: $$\log 2 = \log \frac{1 + 1/3}{1 - 1/3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n + 1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} =$$

$$= 2\left[1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right] \approx 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215}\right] \approx 0{,}693004.$$

(In verità, è $\log 2 = 0{,}69314\ldots$)

3) L'arcotangente. Si ha: $\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Posto $g(x) = \operatorname{arctg} x$, si ha: $$g'(x) = \frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} ,$$

da cui:

$$g(x) = \operatorname{arctg} x = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Per $x = -1$, la serie diverge, mentre, per $x = 1$, converge (Leibniz) e la sua somma è, per il Teorema di Abel, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Si ha, in particolare, $$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

e quindi $$\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

4) $\boxed{\alpha = -\frac{1}{2}}$. Si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)_n}{n!} x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, 1(1+2)(1+2\cdot 2)(1+2\cdot 3)\ldots(1+2(n-1))}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n.$$

4') L'arcoseno. Si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Posto $g(x) = \arcsin x$, si ha:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Ne viene: $$g(x) = \arcsin x = 0 + x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} x^{2n+1}.$$

È immediato verificare che la serie converge anche per $x = -1$ (Leibniz). La convergenza per $x = 1$ segue dal fatto che, per la Formula di Wallis (cfr. Cap. 5, § 6), il termine generale della serie è strettamente equivalente a $\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2\pi n}}$ ed è quindi un infinitesimo di ordine $\frac{3}{2}$. Dal Teorema di Abel si ha poi che la somma della serie è data, rispettivamente, da $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

In particolare, si ha:

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}},$$

da cui $$\pi = 3 + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Si ha così una formula per il calcolo di π più efficace di quella vista in precedenza. Per esempio, già con S_4 si ottiene un valore di π dato da

$$3 + 6\left[\frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{15}{43008} + \frac{105}{1769472}\right] \approx 3{,}141511\ldots$$

§7. SERIE DI POTENZE NEL CAMPO COMPLESSO

Anche le nozioni di successione e di serie di funzioni si estendono in modo del tutto naturale al campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. È però necessario riadattare alcune note definizioni.

DEFINIZIONE. Dati un numero complesso z_0 e un numero reale positivo r, si chiama *sfera aperta di cento* z_0 e *raggio* r l'insieme $S(z_0, r) := \{z\colon d(z, z_0) < r\}$. Si chiama poi *intorno* di z_0 ogni sottoinsieme di $\mathbb{C}$ che contiene una sfera aperta di centro z_0.

DEFINIZIONE. Dati un sottoinsieme E di $\mathbb{C}$ e un numero complesso z_0, diremo che z_0 è un *punto di accumulazione* per E se in ogni intorno di z_0 cadono infiniti punti di E.

DEFINIZIONE. Dati una funzione $f\colon E\ (\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ e un punto $z_0 \in E$, la f è *continua* in z_0 se, per ogni intorno V di $f(z_0)$, esiste un intorno U di z_0 tale che $f(U \cap E) \subset V$, ossia se

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, z \in E)(d(z, z_0) < \delta \Rightarrow d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon).$$

Si dice che una funzione $f\colon E\ (\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ è *continua* in E se è continua in ogni punto di E.

ESEMPIO. 1) Sono continue le funzioni di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$: z^n, $(n \in \mathbb{N})$, $|z|$, $\overline{z}$; è continua anche la funzione di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{C}$ definita da $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Posto $z = x + yi$, la funzione di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ definita da $f(z) = \mathrm{sign}(y)$ non è continua nei punti del tipo $z = x + 0i$.

DEFINIZIONE. Dati una funzione $f\colon E\ (\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, un punto z_0 di accumulazione per E e un numero complesso l, si dice che l è il *limite della f per z che tende a* z_0 se, per ogni intorno V di l, esiste un intorno U di z_0 tale che $f(U \cap E \setminus \{z_0\}) \subset V$, ossia se

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, z \in E)(0 < d(z, z_0) < \delta \Rightarrow d(f(z), l) < \varepsilon).$$

In tal caso si scrive $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$.

DEFINIZIONE. Dati una funzione $f\colon E\ (\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ e un punto $z_0 \in E$, la f è detta *derivabile* in z_0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale della f relativamente a z_0, ossia se esiste finito il $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

ESEMPI. 2) Sia $f(z) = z^n$, $(n \in \mathbb{N}^+)$. si ha

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \ldots + z_0^{n-1}$$

che tende a nz_0^{n-1}. Si ha dunque, per ogni $z \in \mathbb{C}$: $\boxed{D(z^n) = nz^{n-1}.}$

3) Sia $f(z) = \overline{z}$, con $z = x + yi$. Si ha

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x - yi) - (x_0 - y_0 i)}{(x + yi) - (x_0 + y_0 i)} = \frac{x - x_0 - (y - y_0)i}{x - x_0 + (y - y_0)i}.$$

Se è $y = y_0$, e quindi $x \neq x_0$, il rapporto incrementale vale costantemente 1; se è $x = x_0$, e quindi

$y \neq y_0$, il rapporto incrementale vale costantemente -1. Non esiste dunque il limite del rapporto incrementale e la funzione non è derivabile in alcun punto del suo dominio.

Segnaliamo che continuano a sussistere le regole di derivazione studiate nel caso delle funzioni reali di variabile reale, come si constata molto facilmente ripercorrendo le dimostrazioni fatte a suo tempo.

DEFINIZIONE. Data una successione $(f_n)_n$ di funzioni a valori complessi e definite in un insieme $E \subset \mathbb{C}$, diremo che essa *converge (puntualmente)* a una funzione $\varphi: E \to \mathbb{C}$ se, per ogni $z \in E$, la successione numerica $(f_n(z))_n$ è convergente a $\varphi(z)$. Scriveremo $f_n \to \varphi$, o $\varphi = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

DEFINIZIONE. Data la successione di funzioni $f_n: E\ (\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, si definisce la successione $(S_n)_n$, ancora con $S_n: E\ (\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, delle *somme parziali* o *ridotte* ponendo

$$S_n(z) := f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z).$$

La coppia $((f_n)_n, (S_n)_n)$ si dice *serie di funzioni*. La indicheremo scrivendo $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

DEFINIZIONE. Data la serie di funzioni $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$, con $f_n: E\ (\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, diremo che essa *converge (puntualmente)* a una funzione $\varphi: E \to \mathbb{C}$ se ciò accade per la successione $(S_n)_n$.

Ci limiteremo a studiare il caso delle serie di potenze.

DEFINIZIONE. Fissiamo uno $z_0 \in \mathbb{C}$. Si dice *serie di potenze* di $(z - z_0)$ una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ \ldots$$

dove i numeri complessi $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sono detti i *coefficienti* della serie.

Per le serie di potenze nel campo complesso continuano a valere tutti i risultati stabiliti nei § 3 e 4 per le analoghe serie nel campo reale. In particolare, si ha:

TEOREMA 2'. *Se la serie* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ *converge per* $z = z_1$, *allora converge assolutamente per ogni z per cui è* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. *La stessa tesi sussiste anche sotto l'ipotesi più debole che la successione* $(a_n(z_1 - z_0)^n)_n$ *risulti limitata.* ∎

DEFINIZIONE. Sia $A = \{|z - z_0|: \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge$\}$, e sia $R = \sup A$, con $0 \leq R \leq +\infty$. R è detto *raggio di convergenza* della serie.

TEOREMA 3'. *Data la serie di potenze* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, *sia R il suo raggio di convergenza. Allora:*
1) *La serie converge assolutamente per ogni z tale che* $|z - z_0| < R$.
2) *La serie non converge per ogni z per cui è* $|z - z_0| > R$. ∎

N.B. I punti dell'insieme $\{z: |z - z_0| = R\}$ *vanno studiati a parte.*

Continuano inoltre a sussistere i Criteri del rapporto e della radice per la ricerca del raggio di convergenza.

ESEMPI. 4) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge per $|z| < 1$.

5) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+1}$ converge per $|z| \leq 1$, ma con $z \neq 1$ (Cap. 9, Teor. 22).

6) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$ converge per $|z| \leq 1$.

7) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (n!)z^n$ converge solo in $z = 0$.

8) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log(n+2)}{n^2+1}(z-2)^n$ ha raggio di convergenza $R = 1$ (Crit. del rapporto). Essa converge assolutamente per $|z - 2| < 1$. Sia ora $|z - 2| = 1$. Il modulo del termine generale della serie è $\frac{\log(n+2)}{n^2+1}$ che tende a 0 con un ordine poco minore di 2 (è, per esempio, maggiore di $\frac{3}{2}$); la serie è dunque assolutamente convergente anche per $|z - 2| = 1$.

§ 8. LE FUNZIONI ELEMENTARI NEL CAMPO COMPLESSO

Come possiamo definire le funzioni elementari (esponenziale, seno e coseno, funzioni iperboliche, logaritmo) nel campo complesso?

Sappiamo che in $\mathbb{R}$, si ha, per esempio, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. L'idea è quella di estendere, per definizione, questa uguaglianza anche al campo complesso.

DEFINIZIONE. Si definiscono nel campo complesso le seguenti funzioni:

Esponenziale: $$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Coseno iperbolico: $$\cosh z = \mathrm{Ch} z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Seno iperbolico: $$\sinh z = \mathrm{Sh} z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Coseno: $$\cos z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Seno: $$\sin z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Si tenga presente che anche nel campo complesso sussiste il seguente risultato:

TEOREMA 17. *Per ogni* $z, w \in \mathbb{C}$, *si ha* $e^{z+w} = e^z e^w$. ▮

TEOREMA 18. *Sussistono le seguenti Formule di Eulero:*

1) $e^{iy} = \cos y + i \sin y$; $\qquad e^{-iy} = \cos y - i \sin y$;

2) $\cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \mathrm{Ch}(yi)$ $\qquad \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \dfrac{\mathrm{Sh}(yi)}{i}$.

Inoltre:

3) *La funzione* e^z *è periodica di periodo* $2\pi i$.

DIM. 1) Si ha:

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots,$$

$$i \sin y = i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right) = iy + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \ldots.$$

Per incastro, si ottiene l'uguaglianza:

$$\cos y + i \sin y = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots =$$

$$= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \ldots = e^{iy}.$$

L'altra delle (1) si prova in modo analogo.
Le (2) si ottengono per somma e sottrazione dalle precedenti.
La (3) segue immediatamente dalla prima delle (1) e dall'uguaglianza $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. ▮

Evidenziamo ancora che, se è $z = x + iy$, si ha

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).}$$

$$\boxed{e^{\pi i} = -1.} \qquad \boxed{e^z \neq 0, \ \forall z.} \qquad \boxed{|e^{iy}| = |(\cos y + i \sin y)| = 1.}$$

$$\boxed{|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x |(\cos y + i \sin y)| = e^x .}$$

Si constata immediatamente che

TEOREMA 19. *Le funzioni di* $\mathbb{C}$ *in* $\mathbb{C}$ *sopra definite sono derivabili e, anzi, analitiche. Si ha inoltre, sempre analogamente al caso reale:*

$D(e^z) = e^z$; $\quad D(\mathrm{Ch} z) = \mathrm{Sh} z$; $\quad D(\mathrm{Sh} z) = \mathrm{Ch} z$; $\quad D(\cos z) = -\sin z$; $\quad D(\sin z) = \cos z$. ▮

Passiamo a definire il logaritmo nel campo complesso.
Dato $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, questo può essere scritto nella forma

$$w = \rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}, \text{ con } \rho > 0.$$

Cerchiamo ora *tutti* i numeri complessi $z = x + iy$ per cui è

(*) $$e^z = w.$$

Essendo $e^z = e^{z + iy}$, la (*) può essere scritta nella forma

$$e^{x + iy} = \rho e^{i\vartheta}$$

o anche

$$e^x(\cos y + i \sin y) = \rho\,(\cos\vartheta + i \sin\vartheta),$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} e^x = \rho \\ \cos y = \cos\vartheta \\ \sin y = \sin\vartheta \end{cases} .$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} x = \log\rho \\ y = \vartheta + 2k\pi \end{cases} .$$

L'equazione $e^z = w$ ha dunque infinite soluzioni, in accordo col fatto che, come si è visto, la funzione esponenziale è, nel campo complesso, periodica di periodo $2\pi i$. Essa non è dunque invertibile. Per renderla tale è necessario considerare la sua restrizione ad un opportuno sottoinsieme E di $\mathbb{C}$. Da quanto precede, si vede che la funzione esponenziale ristretta all'insieme $E = \{z = x + yi\colon -\pi < y \leq \pi\}$ è iniettiva ed assume tutti i valori complessi non nulli.

DEFINIZIONE. La funzione inversa della funzione esponenziale ristretta all'insieme $E = \{z = x + yi\colon -\pi < y \leq \pi\}$ è detta funzione logaritmo. Essa è dunque una funzione di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in E. Il logaritmo di un numero complesso $w = \rho e^{i\vartheta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è dunque l'unico numero complesso $z = x + yi =: \log w$, con $-\pi < y \leq \pi$ per cui è $e^z = w$.

Osservazione. Si usa talvolta chiamare *logaritmo* del numero complesso $w = \rho e^{i\vartheta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'insieme (indicato con $\mathrm{Log}\, w$) di *tutti* i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $e^z = w$, ossia l'insieme dei numeri complessi della forma

$$z = \log\rho + (\vartheta + 2k\pi)i, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Prendendo $k \in \mathbb{Z}$ in modo che risulti $\vartheta + 2k\pi \in\ ]-\pi, \pi]$, si ottiene un unico valore di z che prende il nome di *determinazione principale* del logaritmo di w e che è appunto quello che abbiamo indicato con $\log w$.

Si tenga ben presente che, con questa definizione di logaritmo, non si ottiene una funzione di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{C}$, ma un'applicazione di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nell'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ delle parti di $\mathbb{C}$.

ESEMPI. 1) Cerchiamo Log(-1). Essendo $-1 = 1\, e^{\pi i}$, si ha $\mathrm{Log}(-1) = \log 1 + (\pi + 2k\pi)i$ e, quindi, $\log(-1) = \pi i$.

2) Cerchiamo $\mathrm{Log}(1 + i)$. Essendo $1 + i = \sqrt{2}\, e^{(\pi/4)i}$, si ha:

$$\mathrm{Log}(1 + i) = \log\sqrt{2} + (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)i\ ; \quad \log(1 + i) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}i.$$

§ 9. ESERCIZI

1) Trovare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x) = \log\sqrt{1 + x^2}$.

[$\Re$. $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x^2)^{n+1}$.]

2) Trovare una primitiva di ciascuna delle funzioni: $f(x) = e^{x^2}$; $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

[$\Re$. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!} \Rightarrow F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + F(0)$; $x \in \mathbb{R}$;

$g(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \Rightarrow G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + G(0)$; $x \in \mathbb{R}$.]

3) Trovare gli sviluppi di Taylor, con punto iniziale $x_0 = 0$, delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = e^{3x+1}$; *b*) $f(x) = \sin(x + \pi/4)$; *c*) $f(x) = \sin x \cos x$;
d) $f(x) = \cosh x - \cos x$; *e*) $f(x) = \sqrt{4 + x}$.

[$\Re$. *a*) $f(x) = e \cdot e^{3x} = e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3x)^n}{n!}$;

b) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots)$;

c) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

d) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(4n+2)!}x^{4n+2}$;

e) $f(x) = 2\sqrt{1 + \frac{x}{4}} = 2\left[1 + \frac{x}{8} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!\,4^n}x^n\right]$, con raggio di converga. $R = 4$.]

4) Trovare gli sviluppi di Taylor delle funzioni:

a) $f(x) = e^{-2x}$; $x_0 = -1$; *b*) $f(x) = \sin x$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$; *c*) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $x_0 = -2$.

[$\Re$. *a*) Posto $x = t - 1$, si ha $e^{-2x} = e^2e^{-2t} = e^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2t)^n}{n!} \Rightarrow f(x) = e^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^n(x+1)^n}{n!}$.

b) Posto $x = t + \frac{\pi}{2}$, si ottiene $\sin x = \sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t \Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x - \pi/2)^{2n}}{(2n)!}$.

c) Essendo $\frac{1}{x^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right)$ e $-\frac{1}{x} = \frac{-1}{(x+2)-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{x+2}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}$,

si ottiene $\frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(x+2)^{n-1}}{2^{n+1}}$, con raggio di convergenza $R = 2$.]

5). Calcolare, con 3 cifre decimali esatte i numeri:

$$a)\ \frac{1}{e}; \quad b)\ \log(1{,}9); \quad c)\ \cos 5°; \quad d)\ \sin 80°.$$

[$\Re$. *a*) $\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$; serie di Leibniz; si ha: $|\frac{1}{e} - S_n| < \frac{1}{(n+1)!}$; basta che sia $\frac{1}{(n+1)!} <$ $5 \times 10^{-4} = \frac{1}{2000}$; è sufficiente $n = 6$.

b) $\log(1{,}9) = \log\frac{19}{10} = \log(1 + \frac{9}{10}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$; è $|\log(1{,}9) - S_n| < \frac{1}{n+2}\left(\frac{9}{10}\right)^{n+2}$; basta che sia $\frac{1}{n+2}\left(\frac{9}{10}\right)^{n+2} < \frac{1}{2000}$; per questo è …sufficiente prendere $n = 26$.

Per contro, si ha:

$$\log(1{,}9) = \log\frac{1 + 9/29}{1 - 9/29} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1}\left(\frac{9}{29}\right)^{2n+1} = \frac{18}{29}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{81}{841}\right)^n = \frac{18}{29}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Essendo, per ogni n, $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$, si ha $\sum_{m=n+1}^{+\infty} a_m < 2a_{n+1} < a_n$, da cui si ottiene

$$\log(1{,}9) - S_n < \frac{18}{29}\, a_n = \frac{18}{29} \times \frac{1}{2n+1}\left(\frac{81}{841}\right)^n.$$

Questa differenza è minore di 5×10^{-4} se è $n \geq 2$.

c) $\cos 5° = \cos\frac{5\pi}{180} = \cos\frac{\pi}{36} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n}$; è una serie di Leibniz; si ha:

$$|\cos 5° - S_n| \leq \frac{1}{(2(n+1))!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2(n+1)} < \frac{1}{(2(n+1))!}\left(\frac{1}{9}\right)^{2(n+1)}.$$

Quest'ultima espressione è minore di 5×10^{-4} se è $n \geq 1$.

d) Basta osservare che è $\sin 80° = \cos 10° = \cos\frac{\pi}{18}$ ……]

6) Trovare i raggi di convergenza delle seguenti serie e studiarne il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n; \quad b)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(1 - \sqrt{n})^n}; \quad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)}; \quad d)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2n}}{\sqrt{n+1}};$$

$$e)\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-3)^n (x+1)^n; \quad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n^3}(4 - x)^n; \quad g)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + 5^n}{n!} x^n.$$

[$\Re$. *a*) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{4}$; quindi è $R = 4$. Per $x = \pm 4$, si ottengono serie numericche per il cui termine generale si ha $|b_n| \approx \frac{n^{2n} e^{-2n}\ 2\pi n\ 4^n}{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}} = \sqrt{\pi n} \to +\infty$ e che quindi non convergono.

b) $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$; è quindi $R = +\infty$.

c) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$; è quindi $R = 1$. Per $x = 1$, è $b_n = \frac{1}{\log(n+1)}$; ordine di infinitesimo sottoreale, serie divergente. Per $x = -1$, è $b_n = \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$; serie convergente (Leibniz).

d) Posto $x^2 = y$, si ottiene la serie di termine generale $\dfrac{2^n y^n}{\sqrt{n+1}}$; per questa serie, è $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 2$; il suo raggio di convergenza è, perciò, $\dfrac{1}{2}$; di conseguenza, quello della serie data è $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Per $|x| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, si ottiene la serie numerica di termine generale $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ che è divergente.

e) $\sqrt[n]{|a_n|} = 3$; si ha quindi $R = \dfrac{1}{3}$. Se è $|x + 1| = \dfrac{1}{3}$, si ottengono serie numeriche il cui termine generale, in valore assoluto, è uguale a 1 e che, perciò, non convergono.

f) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to e$; è quindi $R = \dfrac{1}{e}$. Se $|4 - x| = \dfrac{1}{e}$, si ottengono serie numeriche il cui termine generale, in valore assoluto, è uguale a $\dfrac{1}{n^3}$ e che, perciò, convergono assolutamente.

g) Si ha $0 < a_n \approx \dfrac{5^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \left(\dfrac{5e}{n}\right)^n \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} < \left(\dfrac{5e}{n}\right)^n = b_n$. Avendosi $\sqrt[n]{b_n} = \dfrac{5e}{n} \to 0$, si ha $R = +\infty$.

7) Trovare il raggio di convergenza e la somma delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (4x)^n\ ;\quad b)\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)x^n\ ;\quad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+3};\quad d)\ \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)x^{2n}\ .$$

[$\mathfrak{R}$. *a*) Si ha $\sqrt[n]{|a_n|} = 4$ e, quindi, $R = \dfrac{1}{4}$. La somma è $f(x) = \dfrac{1}{1+4x}$. Per $|x| = \dfrac{1}{4}$, la serie non converge.

b) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1 = R$. Per $|x| = 1$, la serie non converge. Per $x \neq 0$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)x^n = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)x^{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=3}^{+\infty} nx^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[-1 - 2x + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}\right] = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) - 1 - 2x\right] = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) - 1 - 2x\right] =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{(1-x)^2} - 1 - 2x\right] = \frac{1 - (1+2x)(1-x)^2}{x^2(1-x)^2} = \frac{1}{x^2}\frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} = \frac{3-2x}{(1-x)^2}\ .$$

Si constata poi che l'uguaglianza sussiste anche per $x = 0$.

c) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1 = R$. Per $x = 1$, la serie diverge, mentre converge per $x = -1$. Per $x \neq 0$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3} = \frac{1}{x^3}\left[-\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right] = \frac{1}{x^3}\left[-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{x^3}\log(1-x) - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}. = g(x).$$

Per $x = 0$, si ha la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n+3} = \frac{1}{3} = \lim_{x\to 0} g(x)$.

d) Posto $x^2 = y$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)x^{2n} =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)y^n = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{n=0}^{+\infty}(y^{n+1}) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{y}{1-y} = \frac{2}{(1-y)^2} = \frac{2}{(1-x^2)^2}.$$

Il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)y^n$ è $R = 1$, avendosi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$; è dunque 1 anche il raggio di convergenza della serie di partenza. Per $|x| = 1$, la serie diverge.]

8) Si studino le seguenti serie di potenze nel campo complesso:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{1+4^n};\quad b)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(2z+i)^n}{2^n};\quad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty}n^{2n}z^n;$$

$$d)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(n!)^2};\quad e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+1/n)^n}(z-1)^n$$

[$\Re$. *a*) $\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{4}$; $R = 4$; per $|z - i| = 4$, si ottengono serie il cui termine generale tende a 1; *b*) il termine generale della serie è $n(z + i/2)^n$; si h $R = 1$; per $|z + i/2| = 1$, la serie non converge; *c*) $\sqrt[n]{|a_n|} = n^2 \to +\infty$; $R = 0$; la serie converge solo in $z = 0$; *d*) $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to 0$; $R = +\infty$, la serie converge assolutamente per ogni z; *e*) $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1 = R$; per $|z - 1| = 1$, $z \neq 2$, la serie converge semplicemente, dato che si può applicare il Teor. 22 del Cap. 9.]

9) Si risolvano nel campo complesso le seguenti equazioni:

$$a)\ e^z = \frac{\pi}{4}i;\quad b)\ e^z = 1 + \pi i;\qquad c)\ \log z = \frac{\pi}{4}i;\quad d)\ \log z = 1 + \pi i.$$

[$\Re$. *a*) $\log\frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i$; *b*) $\frac{1}{2}\log(1 + \pi^2) + (\mathrm{arctg}\,\pi + 2k\pi)i$; *c*) $e^{(\pi/4)i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; *d*) $e^{(1+\pi i)} = -e$.]

10) Si studi la seguente serie di potenze:

$$1 - \frac{z}{2} + z^2 - \frac{z^3}{2} + z^4 - \frac{z^5}{2} + \ldots + z^{2n} - \frac{z^{2n+1}}{2} + \ldots$$

[$\Re$. Si ha $R = 1$ (Criterio della radice); si noti che per $z = 2$ si ottiene la serie indeterminata

$$1 - 1 + 2^2 - 2^2 + 2^3 - 2^3 + \ldots + 2^{2n} - 2^{2n} + \ldots]$$

11) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-n} + i\sin n}{n+1}.$$

[$\Re$. Per il Teorema 20 del Cap. 9, basta studiare la serie di termine generale $\frac{i\sin n}{n+1}$. Per il Teor. 22 del Cap. 9, è semplicemente convergente la serie di termine generale $\frac{\cos n + i\sin n}{n+1}$ e quindi anche la serie data, ancora per il Teor. 20 del Cap. 9.]