Capitolo Nono

SERIE NUMERICHE

§ 1. RICHIAMI SULLE SUCCESSIONI

Ricordiamo che si chiama *successione di numeri reali* ogni applicazione f di $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{N}^+$) in $\mathbb{R}$. Per indicare la successione $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (ossia la successione per cui è $f(n) = a_n$), scriveremo $(a_n)_n$; indicheremo invece con $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme immagine $f(\mathbb{N})$. L'elemento a_n è detto il *termine generale* o *n - imo* della successione. Se $M = \{n_0, n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$, con $n_k < n_{k+1}$, è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$, la restrizione della f a M è ancora una successione $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots = (a_{n_k})_k$, che prende il nome di *sottosuccessione*. Se, in particolare, M è un insieme del tipo $\{n : n > m\}$, la sottosuccessione è detta anche *coda*.

Sappiamo che una successione $(a_n)_n$ è detta *convergente* se esiste finito il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, è detta *divergente* se il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ è infinito ($+\infty$, $-\infty$ o ∞) mentre, se il limite non esiste, si dice che la successione è *oscillante* o *indeterminata*. Ricordiamo che è $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se, per ogni intorno V di l, esiste un intero ν tale che, per ogni n maggiore di ν, è $a_n \in V$, ossia se

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \nu \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(\, n > \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon).$$

Analogamente, si ha: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists\, \nu \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow a_n > M).$$

(Chi studia rienunci anche le definizioni di $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ e di $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$.)

Gioverà tenere ben presente i seguenti risultati sui limiti delle successioni (cfr. Cap. 5, §1):

TEOREMA 1. 1) *(Unicità del limite) - Se una successione ha limite, esso è unico.*

2) *(Limite delle sottosuccessioni) - Se una successione ha limite, allora ha lo stesso limite ogni sua sottosuccessione e, in particolare, ogni sua coda.*

2') *(Limite delle code) - Una successione ha limite se e solo se lo ha una delle sue code.*

3) *(Permanenza del segno) - Se una successione ha limite positivo* [*negativo*], *esiste un* ν *tale che, per* $n > \nu$, *è* $a_n > 0$ [risp. $a_n < 0$].

4) *(Limitatezza delle successioni convergenti) - Se una successione* $(a_n)_n$ *è convergente allora è limitata* (ossia: *l'insieme immagine* $f(\mathbb{N}) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *è limitato*).

5) *(Limite delle successioni monotone) - Una successione monotona ha sempre limite (finito o no) che coincide con* $\sup f(\mathbb{N})$, *se la successione è non - decrescente, ed è dato da* $\inf f(\mathbb{N})$, *se la successione è non - crescente.* ∎

OSSERVAZIONI ED ESEMPI. 1) Non sussiste l'implicazione opposta della (2), ossia: se una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ di una successione $(a_n)_n$ ha limite β, non è detto che la successione abbia limite; quello che si può dire è che, se $(a_n)_n$ ha limite, questo non può che essere β. Dalla (5) si ottiene che: *Una successione monotona ha limite* β *se e solo se ha questo limite una qualunque delle sue sottosuccessioni.*

2) La successione di termine generale $(-1)^n$ è oscillante, ma la sottosuccessione dei termini di indice pari è costantemente uguale a 1 ed è, quindi, convergente.

3) Sappiamo che la successione di termine generale $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente, superiormente limitata e, quindi, convergente; il suo limite è il numero e.

4) Data la successione $(a_n)_n$, se accade che la sottosuccessione dei termini di posto pari e quella dei termini di posto dispari hanno lo stesso limite l, allora anche la successione data ha limite l. Infatti, fissato un intorno V di l, in esso cadono, per ipotesi, tutti i termini di indice dispari maggiore di un opportuno n' e tutti i termini di indice pari maggiore di un opportuno n''; in conclusione, in V cadono tutti gli a_n con $n > \max\{n', n''\}$.

§ 2. SERIE NUMERICHE

Consideriamo il numero reale (razionale) $a = 2{,}345$; questo può essere scritto nella forma $a = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000}$. Lo stesso procedimento, applicato al numero $b = 1{,}2323232323\ldots$ porta alla scrittura $1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \ldots + \frac{2}{10^{2n-1}} + \frac{3}{10^{2n}} + \ldots$ che ha l'aspetto di una somma di *infiniti addendi*. Si pone dunque, in modo naturale, il seguente

PROBLEMA. Come si può estendere il significato di addizione al caso di infiniti addendi, assegnati come termini di una successione? Il semplice procedimento aritmetico non è sufficiente, dato che questo insegna a sommare solo un numero *finito* di termini. È perciò necessaria una qualche forma di *passaggio al limite.*

Ora, l'aritmetica ci dice che, per definizione, è

$$2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} = \left(\left(2 + \frac{3}{10}\right) + \frac{4}{100}\right) + \frac{5}{1000}\,.$$

Ossia: se si devono sommare n addendi, si sommano i primi due, poi al risultato così trovato si aggiunge il terzo, poi il quarto e così via. E se gli addendi sono infiniti? L'idea precedente ci porta a sommare i primi 2 addendi, ad aggiungere al risultato il terzo, poi il quarto, …, poi l'n - imo, poi… Così facendo, si ottiene una successione di *somme parziali* di cui possiamo cercare il limite per n che tende a infinito.

DEFINIZIONE. Data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali, si definisce una nuova successione $(S_n)_n$ ponendo:

$$S_0 := a_0;\ \ S_1 := a_0 + a_1;\ \ S_2 := a_0 + a_1 + a_2;\ \ \ldots\ S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n;\ \ \ldots\ldots$$

ossia:

$$S_0 := a_0;\ \ S_1 := S_0 + a_1;\ \ S_2 := S_1 + a_2;\ \ \ldots\ S_n := S_{n-1} + a_n;\ \ \ldots\ldots$$

La successione $(S_n)_n$ così definita è detta *successione delle somme parziali* o *delle ridotte*. La coppia $((a_n)_n, (S_n)_n)$ si dice *serie (di numeri reali).* La indicheremo scrivendo

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots\,,\ \text{oppure} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Si dice che a_n è il *termine generale* o *n - imo* della serie.

OSSERVAZIONE. Una serie $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ è, in sostanza, una successione: quella delle sue ridotte $(S_n)_n = S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ Viceversa, una qualunque successione può essere espressa come serie; in vero, data la successione S_0, S_1, S_2, …, S_n, … , questa può essere pensata come successione delle ridotte della serie:

$$S_0 + (S_1 - S_0) + (S_2 - S_1) + \ldots + (S_{n+1} - S_n) + \ldots$$

La distinzione fra successioni e serie è dunque più di forma che di sostanza.

DEFINIZIONE. Diremo che una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è:
- *convergente*, se la successione $(S_n)_n$ delle sue ridotte ha limite finito;
- *divergente a* $+\infty$, se la successione $(S_n)_n$ delle sue ridotte ha limite $+\infty$;
- *divergente a* $-\infty$, se la successione $(S_n)_n$ delle sue ridotte ha limite $-\infty$;
- *divergente a* ∞, se la successione $(S_n)_n$ delle sue ridotte ha limite ∞;
- *indeterminata*, se non esiste il limite della successione $(S_n)_n$ delle sue ridotte.

Se è $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, il numero reale S è detto la *somma* della serie; in tal caso si scrive $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$. Per esprimere il fatto che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente, si scrive $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \infty$ (e, quando è il caso, $+\infty$ o $-\infty$).

La proprietà di una serie di essere convergente, divergente o indeterminata è detta il suo *carattere.*

PRIMI ESEMPI. 1) La serie "apparente" $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$ è ovviamente convergente ed ha per somma $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Le serie che ci interessano sono quelle "vere", cioè quelle con infiniti termini diversi da zero.

2) La serie $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ diverge a $+\infty$. Più in generale, la serie $a + a + a + a + \ldots$ diverge a $+\infty$ se è $a > 0$, diverge a $-\infty$ se è $a < 0$, converge a 0 se è $a = 0$.

3) La serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ è indeterminata; infatti le ridotte di indice pari ($n \geq 0$) valgono tutte 1, mentre quelle di indice dispari valgono tutte 0; non esiste perciò il limite di $(S_n)_n$.

4) La serie $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$ diverge a ∞; infatti la successione delle ridotte è data da: 1, -1, 2, - 2, 3, - 3, …

5) La serie $1 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + \ldots$ è indeterminata, avendo le ridotte pari ($n \geq 0$) divergenti a $+\infty$ e quelle dispari costantemente nulle.

§ 3. TRE ESEMPI IMPORTANTI

1) **Le serie geometriche.** Sono così dette le serie del tipo

$$a + ak + ak^2 + ak^3 + ak^4 + \ldots + ak^n + \ldots, \text{ con } a \neq 0,$$

dove il numero reale k è detto la *ragione* della serie geometrica.
- Se è $k = 1$, si ha la serie $a + a + a + a + \ldots$ che, essendo $a \neq 0$, è divergente.
- Se è $k = -1$, si ha la serie $a - a + a - a + \ldots$ che, essendo $a \neq 0$, è indeterminata.

Sia dunque $|k| \neq 1$. La ridotta n - ima della serie è data da

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} ak^i = a\,\frac{1 - k^{n+1}}{1 - k}\,.$$

- Se è $|k| < 1$, la serie è convergente, con somma $a\dfrac{1}{1 - k}$.
- Se è $|k| > 1$, la serie diverge (a ∞ se è $k < -1$; a $+\infty$ per $k > 1$, $a > 0$; a $-\infty$ per $k > 1$, $a < 0$).

2) **La serie di Mengoli.** Si chiama così la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Dall'uguaglianza $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, si ottiene che la serie data può essere riscritta nella forma

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots,$$

dalla quale si ricava subito l'uguaglianza

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1};$$

dunque $(S_n)_n$ tende a 1 al tendere di n a $+\infty$.

3) **La serie armonica.** È detta così la serie ottenuta sommando i reciproci dei numeri naturali positivi:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \ (n \in \mathbb{N}^+).$$

Si ha:

$$S_1 = 1 > \frac{1}{2};\ \ S_2 = 1 + \frac{1}{2} > 2\cdot\frac{1}{2};\ \ S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{2}{4} > 3\cdot\frac{1}{2};\ \ \ldots\ldots$$

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} > S_{2^n} + 2^n\frac{1}{2^{n+1}} > n\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = (n+1)\frac{1}{2};\ \ldots\ldots$$

Ne viene che è $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2^n} = +\infty$, da cui anche $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (cfr. § 1, Es. 1).

§ 4. TEOREMI FONDAMENTALI SULLE SERIE

TEOREMA 2. *Se una serie* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge, allora il suo termine generale* a_n *tende a* 0 *al tendere di n a* $+\infty$.

DIM. Sia $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = S$. Si ha: $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, da cui la tesi, dato che S_{n+1} e S_n tendono entrambi a S. ∎

N.B. Non sussiste l'implicazione opposta di questo Teorema; cioè; *Se il termine generale di una serie tende a* 0, *non è detto che la serie sia convergente*. Un controesempio è fornito dalla *serie armonica* vista nel paragrafo precedente.

Una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie è data dal seguente Teorema del quale omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 3. *(di Cauchy) - Una serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge se e solo se è verificata la seguente condizione:*

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \nu \in \mathbb{N})(\forall\ n \in \mathbb{N})(\forall\ p \in \mathbb{N})(n > \nu\ \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon).\ ▮$$

TEOREMA 4. *(Aut - Aut per le serie a termini di segno costante) - Una serie a termini di segno costante* (≥ 0, o ≤ 0) *o è convergente o è divergente,* (ossia: *non può essere indeterminata*).

DIM. Sia, per esempio, $a_n \geq 0$ per ogni n. Dall'uguaglianza $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, si ottiene $S_{n+1} \geq S_n$; dunque la successione $(S_n)_n$ è monotona non - decrescente ed è quindi dotata di limite (finito o no!), dato dall'estremo superiore dell'insieme dei suoi valori. ▮

Da ciò segue che: *Una serie a termini di segno costante è convergente se e solo se è limitata.* (Si tenga ben presente che una tale affermazione non è vera per le serie qualunque; la serie 1 - 1 + 1 - 1 + … è limitata ma non è convergente.)

DEFINIZIONE. Data una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, si dice suo *resto k - imo* la *serie* che si ottiene tralasciando i suoi primi $k + 1$ termini, ossia la serie

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+p} + \ldots \quad \left(= \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n\right).$$

TEOREMA 5. *Il resto k - imo di una serie ha lo stesso carattere della serie data.*

DIM. Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, indichiamo con $S_n^{(k)}$ ($n \geq 0$) la ridotta n - ima del suo resto k - imo; è dunque:

$$S_n^{(k)} = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+n+1}.$$

Si ha:

$$S_n^{(k)} := S_{k+n+1} - S_k.$$

Se la serie data è convergente, si ha $\lim_{n\to+\infty} S_{k+n+1} = S$, da cui $\lim_{n\to+\infty} S_n^{(k)} = S - S_k$. Si vede parimenti che, se la serie data è divergente, è tale anche la serie resto. Si procede poi in modo analogo per provare le implicazioni opposte. ▮

DEFINIZIONE. Date le serie

$$(1)\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad (2)\ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

restano definite: la serie *"somma"*

$$(3)\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n := \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)$$

e, per ogni numero reale c, la serie *"prodotto per una costate"*

$$(4)\ c \sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \sum_{n=0}^{+\infty} c a_n.$$

Per studiare il carattere di queste nuove serie, basta tener presente i Teoremi sui limiti delle funzioni:

TEOREMA 6. 1) *Se le serie* (1) *e* (2) *sono convergenti con somme rispettive A e B, allora la* (3) *converge con somma A + B.*
2) *Se le serie* (1) *e* (2) *sono entrambi divergenti a* $+\infty$ [*a* $-\infty$], *è tale anche la* (3).
3) *Se la* (1) *è divergente e la* (2) *è convergente, la* (3) *è divergente.*
4) *Se la* (1) *converge con somma A, la* (4) *converge con somma cA.*
5) *Se la* (1) *diverge ed è* $c \neq 0$, *la* (4) *diverge (mentre, per* $c = 0$, *la* (4) *converge in ogni caso a* 0). ∎

Si tenga presente che se la (1) diverge a $+\infty$ e la (2) diverge a $-\infty$, nulla si può dire, in generale, della serie somma, che va quindi studiata di caso in caso.

ESEMPIO. 1) Si consideri la serie

$$\frac{11}{100} + \frac{101}{100^2} + \frac{1001}{100^3} + \ldots + \frac{10^n + 1}{100^n} + \ldots$$

Questa è la serie somma delle due serie geometriche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{100^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{100^n}$ che convergono con somma $\frac{1}{10} \times \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{1}{9}$ e, rispettivamente, $\frac{1}{100} \times \frac{1}{1 - 1/100} = \frac{1}{99}$. La serie data è dunque convergente con somma $\frac{1}{9} + \frac{1}{99} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$.

DEFINIZIONE. Date le due serie (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, si chiama loro *incastro* ogni serie ottenuta alternando in modo arbitrario i termini della (1) e della (2), in modo che questi compaiano tutti, una volta sola ciascuno e senza che si alteri l'ordine degli a_n e dei b_n.

Per esempio, sono incastri della (1) e della (2) le serie:

$$a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n + \ldots$$
$$a_0 + a_1 + b_0 + a_2 + a_3 + b_1 + a_4 + a_5 + b_2 + \ldots + a_{2n} + a_{2n+1} + b_n + \ldots$$

L'ultima serie si può pensare come somma delle due serie

(*) $\quad a_0 + a_1 + 0 + a_2 + a_3 + 0 + a_4 + a_5 + 0 + \ldots + a_{2n} + a_{2n+1} + 0 + \ldots$

(°) $\quad 0 + 0 + b_0 + 0 + 0 + b_1 + 0 + 0 + b_2 + \ldots + 0 + 0 + b_n + \ldots$

Questa tecnica può essere generalizzata. Date le due serie (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, consideriamo un loro incastro (3) $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$. Tutti i c_n provengono dalla (1) o dalla (2), ossia sono degli a_p o dei b_q; sostituiamo dapprima tutti i c_n del secondo tipo con degli zeri: si ottiene una serie (1') in cui compaiono i termini della (1) … diluiti… in mezzo a degli zeri. Poi si fa lo stesso con i c_n che provengono dalla (1), ottenendo una serie (2') fatta di zeri e dai b_n. Non è difficile convincersi che la (1) e la (1') [la (2) e la (2')] hanno lo stesso carattere e, se convergenti, anche la stessa somma. A questo punto, la (3) diventa la somma della (1') e della (2') e possiamo applicare ad essa i teoremi sulla somma di due serie visti più su. (Il discorso qui fatto è volutamente impreciso, dato che, per renderlo rigoroso, avremmo bisogno di un po' di formalismo in più.) Otteniamo così il

TEOREMA 7. *Siano date le due serie* (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

1) *Se le serie* (1) *e* (2) *sono convergenti con somme rispettive A e B, allora ogni loro incastro converge con somma A + B.*

2) *Se le serie* (1) *e* (2) *sono entrambi divergenti a* $+\infty$ [*a* $-\infty$], *è tale anche ogni loro incastro.*

3) *Se la* (1) *è divergente e la* (2) *è convergente, ogni loro incastro è divergente.* ∎

Si tenga presente che se la (1) diverge a $+\infty$ e la (2) diverge a $-\infty$, nulla si può dire, in generale, delle serie incastro, che vanno quindi studiate di caso in caso.

ESEMPIO. 2) Si consideri la serie prospettata all'inizio del § 2:

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \ldots + \frac{2}{10^{2n-1}} + \frac{3}{10^{2n}} + \ldots$$

Siccome il carattere di una serie coincide col carattere di ogni suo resto, possiamo intanto tralasciare il primo termine. La serie che così si ottiene, è incastro delle due serie:

$$(1) \qquad \frac{2}{10} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^5} + \ldots + \frac{2}{10^{2n-1}} + \ldots = \frac{2}{10}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots\right);$$

$$(2) \qquad \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^6} + \ldots + \frac{3}{10^{2n}} + \ldots = \frac{3}{10^2}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots\right).$$

Si tratta di due serie convergenti con somme rispettive $\frac{20}{99}$ e $\frac{3}{99}$. La serie data è dunque convergente con somma $1 + \frac{20}{99} + \frac{3}{99} = \frac{122}{99}$.

OSSERVAZIONE. Si tenga presente che *non è lecito associare tra loro i termini di una serie*. Per esempio, sappiamo che la serie 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + … è indeterminata; se però associamo i suoi termini a 2 a 2, otteniamo la serie 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + … che è convergente. In generale, se partiamo da una serie (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e associamo in qualche modo i suoi termini, otteniamo una nuova serie (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$; ebbene, si vede subito che la successione delle ridotte della (2) è una sottosuccessione di quella delle ridotte della (1). Conclusione: *Se la* (2) *converge* [*diverge*], *la* (1) *o converge con la stessa somma o è indeterminata* [risp. *o diverge o è indeterminata*]. Se però sappiamo che la (1) non può essere indeterminata, allora (1) e (2) si comportano allo stesso modo.

Sottolineiamo ancora che: *In generale, non è lecito cambiare l'ordine dei termini di una serie*. Questo problema che si chiama *permutabilità* delle serie è di soluzione meno immediata di quello dell'associabilità e perciò lo tralasciamo.

§ 5. SERIE A TERMINI POSITIVI

Sfrutteremo sistematicamente il fatto che, come già sappiamo, una serie a termini positivi non può essere indeterminata, perché la successione delle sue ridotte è monotona. Per analoghe ragioni e per quanto visto a proposito del resto di una serie, si ha subito che tutti i risultati che ora stabiliremo valgono, con i dovuti aggiustamenti, anche per le serie a termini negativi e per quelle che hanno un resto a termini di segno costante. Chi studia si faccia carico di tutte queste varianti.

DEFINIZIONE. Siano date due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$; se, per ogni n, è $a_n \leq b_n$, si dice che la prima serie è una *minorante* della seconda e che, simmetricamente, la seconda è una *maggiorante* della prima.

TEOREMA 8. *(Criterio del confronto) - Siano date due serie* (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, *a termini non negativi e sia, per ogni* n, $(0 \leq)\ a_n \leq b_n$; *allora, se la serie* (2) *converge, converge anche la* (1) *e, se la* (1) *diverge, diverge anche la* (2). In altre parole: *Se una serie a termini non negativi converge, converge ogni sua minorante che sia ancora a termini non negativi e, se una serie a termini non negativi diverge, diverge ogni sua maggiorante (che è, ovviamente, a termini non negativi).*

DIM. Indichiamo con A_n e con B_n le ridotte delle due serie e supponiamo la (2) convergente. Dall'ipotesi $0 \leq a_n \leq b_n$ segue che, per ogni n, è anche $A_n \leq B_n$. Essendo la (2) a termini non negativi e convergente, si ha che la successione $(B_n)_n$ ha un limite finito B che, per il Teorema sul limite delle funzioni monotone, è uguale al $\sup \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. È dunque, per ogni n, $A_n \leq B_n \leq B$. Ne viene che anche la successione $(A_n)_n$ è superiormente limitata da B. D'altra parte anche la successione $(A_n)_n$ è non - decrescente, essendo non negativi gli a_n. Ne viene che anche la (1) è convergente, sempre per il Teorema sul limite delle funzioni monotone.

Supponiamo ora la (1) divergente; la (2) non può convergere perché, in tal caso, dovrebbe convergere anche la (1) per quanto appena visto, né può essere indeterminata, essendo a termini non negativi; quindi è anch'essa divergente. ∎

ESEMPIO. 1) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente; infatti, essendo per ogni $n > 1$, $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$, si ha che la nostra serie ha un resto che è una minorante (a termini positivi) della serie di Mengoli che sappiamo essere convergente.

TEOREMA 9. *(Criterio del rapporto) - Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini positivi. Se esiste una costante* $k < 1$, *tale che, per ogni* n, *si abbia* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$, *allora la serie è convergente. Se è* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *la serie è divergente.*

DIM. Dall'ipotesi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$, si ha: $a_1 \leq ka_0$; $a_2 \leq ka_1 \leq k^2 a_0$; $a_3 \leq ka_2 \leq k^3 a_0$; … e, in generale,

$$a_n \leq ka_{n-1} \leq \ldots \leq k^n a_0.$$

Si ottiene che la serie data è una minorante della serie geometrica

$$a_0(1 + k + k^2 + k^3 + k^4 + \ldots + k^n + \ldots)$$

che, essendo $0 < k < 1$, è convergente; dunque, per il Criterio del confronto, è anch'essa convergente. La seconda parte della tesi è ovvia, dato che, se è $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, il termine generale della serie non è infinitesimo. ∎

N.B. Si badi che dall'ipotesi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, nulla si può concludere circa il carattere della serie. In vero, questa ipotesi dice solo che la successione $(a_n)_n$ è decrescente (e non si può nemmeno sapere se è infinitesima!).

Nella pratica è molto utile il

COROLLARIO 10. *Sia data una serie a termini positivi* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e si supponga che esista il* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Se questo limite è minore di* 1, *la serie converge, se è maggiore di* 1, *la serie è divergente.*

DIM. Sia $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$. Dunque:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \nu \in \mathbb{N})(\forall\ n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon).$$

Preso un $\varepsilon < 1 - l$ e posto $k = l + \varepsilon$, da quanto sopra scritto si ottiene che, per $n > \nu$, è $\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon = k < 1$. C'è dunque un resto della nostra serie che soddisfa alle ipotesi del Criterio del rapporto; essendo questo resto convergente, converge anche la serie. Se è $l > 1$, si vede con un ragionamento analogo che c'è un resto della serie per cui è $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$; il termine generale non è perciò infinitesimo e la serie diverge. ∎

N.B. Dall'ipotesi $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nulla si può dedurre circa il carattere della serie. In effetti, sia la serie armonica sia la serie di Mengoli soddisfano a questa condizione, ma sappiamo che la prima è divergente, mentre l'altra converge.

ESEMPIO. 2) Si consideri la serie di termine generale $\frac{n!}{n^n}$. Si tratta di una serie a termini positivi per la quale è $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n} \frac{n^n}{n!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$ che tende a $1/e < 1$, al tendere di n a $+\infty$. Dunque la serie converge.

TEOREMA 11. *(Criterio della radice) - Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini positivi (o anche solo* ≥ 0*). Se esiste una costante* $k < 1$, *tale che, per ogni n, si abbia* $\sqrt[n]{a_n} \leq k$, *allora la serie è convergente. Se è* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, *la serie è divergente.*

DIM. Dall'ipotesi $\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$, si ha: $a_n \leq k^n$. Dunque, la serie data è una minorante di una serie geometrica convergente (ha una ragione $k < 1$) e pertanto, per il Criterio del confronto, è anch'essa convergente. La seconda parte della tesi è ovvia, dato che, se è $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, il termine generale della serie non è infinitesimo. ∎

N.B. Si badi che dall'ipotesi $\sqrt[n]{a_n} < 1$, nulla si può concludere circa il carattere della serie. In vero, questa ipotesi dice solo che il suo termine generale è minore di 1 (e non si può nemmeno sapere se è infinitesimo!).

Nella pratica è molto utile il:

COROLLARIO 12. *Sia data una serie a termini non negativi* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e si supponga che esista il* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Se questo limite è minore di* 1, *la serie converge, se è maggiore di* 1, *la serie è divergente.*

DIM. Sia $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$. Dunque:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \nu \in \mathbb{N})(\forall\ n \in \mathbb{N})(n > \nu \Rightarrow l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon).$$

Preso un $\varepsilon < 1 - l$ e posto $k = l + \varepsilon$, da quanto sopra scritto si ottiene che, per $n > \nu$, è $\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon = k < 1$. C'è dunque un resto della nostra serie che soddisfa alle ipotesi del Criterio della radice; essendo convergente tale resto, converge anche la serie. Se è $l > 1$, si vede con un ragionamento analogo che c'è un resto della serie per cui è $\sqrt[n]{a_n} > 1$; il termine generale non è perciò infinitesimo e la serie diverge. ▮

N.B. Dall'ipotesi $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ nulla si può dedurre circa il carattere della serie. In effetti, si vede subito che la serie armonica e la serie di Mengoli soddisfano a questa condizione e sappiamo che una di esse è divergente, mentre l'altra converge.

ESEMPIO. 3) Si consideri la serie di termine generale $\frac{2^n + 1}{3^n + 1}$. Si tratta di una serie a termini positivi per la quale è $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n + 1}{3^n + 1}} = \sqrt[n]{\frac{2^n(1 + 1/2^n)}{3^n(1 + 1/3^n)}} = \frac{2}{3} \sqrt[n]{\frac{1 + 1/2^n}{1 + 1/3^n}}$ che tende a $\frac{2}{3} < 1$, al tendere di n a $+\infty$. Dunque la serie converge.

TEOREMA 13. *La serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ $(s > 0)$, *detta serie armonica generalizzata, converge per* $s > 1$ *e diverge per* $s \leq 1$.

DIM. Per $s = 1$ si ha la serie armonica e per $s < 1$ una sua maggiorante; dunque, per $s \leq 1$, la serie data è divergente. Veniamo al caso $s > 1$. Si ha:

$$S_1 = 1;\ \ S_3 = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) < 1 + 2\,\frac{1}{2^s};$$
$$S_7 = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) < 1 + 2\,\frac{1}{2^s} + 4\,\frac{1}{4^s};\ \ \ldots$$

In generale, è

$$\begin{aligned}
S_{2^{k+1}-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) + \ldots + \\
&+ \left(\frac{1}{(2^k)^s} + \frac{1}{(2^k + 1)^s} + \ldots + \frac{1}{(2^k + 2^k - 1)^s}\right) < 1 + 2\,\frac{1}{2^s} + 4\,\frac{1}{4^s} + \ldots + 2^k\,\frac{1}{(2^k)^s} = \\
&= 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}} + \frac{1}{8^{s-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^k)^{s-1}} = \\
&= 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{(2^{s-1})^2} + \frac{1}{(2^{s-1})^3} + \ldots + \frac{1}{(2^{s-1})^k} < \\
&< \frac{1}{1 - (1/2)^{s-1}} = \frac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1}.
\end{aligned}$$

La successione delle ridotte è (crescente e) superiormente limitata dal numero $\frac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1}$; quindi la serie è convergente. ▮

Sappiamo che la condizione $a_n \to 0$ è necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie. È abbastanza naturale pensare che il carattere della serie dipenda dalla rapidità con cui il suo termine generale tende a zero.

Ricordiamo la nozione di ordine di infinitesimo da noi adottata (Cfr. Cap 6, § 2): Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni che tendono a zero per x che tende ad α, e che non si annullano in tutto un intorno di α, diremo che è $\operatorname{ord}_\alpha f = \operatorname{ord}_\alpha g$ se è $\lim_{n\to\alpha}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mentre diremo che $\operatorname{ord}_\alpha f > \operatorname{ord}_\alpha g$ se è $\lim_{n\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Qui ci interessa il caso $\alpha = +\infty$ ed è n in luogo di x con $f(n) = a_n$. Ricordiamo ancora che, per definizione, è $\operatorname{ord}_{+\infty}\frac{1}{n^r} = r$.

LEMMA 14. *Siano date due serie a termini positivi* (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, *entrambi col termine generale infinitesimo; sia, inoltre* $\operatorname{ord} a_n \geq \operatorname{ord} b_n$. *Allora, se la* (2) *converge, converge anche la* (1) *e, se la* (1) *diverge, diverge anche la* (2).

DIM. Supponiamo la (2) convergente. Essendo $\operatorname{ord} a_n \geq \operatorname{ord} b_n$, esiste finito il $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$ (nullo se è $\operatorname{ord} a_n > \operatorname{ord} b_n$, e non nullo se gli ordini sono uguali). Fissato un ε positivo, esiste un intero ν tale che, per $n > \nu$, è $\frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$ e quindi $a_n < (l + \varepsilon)b_n$. Siccome la (2) converge, converge anche la serie di termine generale $(l + \varepsilon)b_n$; converge quindi anche la (1) che è, almeno da un certo punto in poi, una sua minorante.

Se la (1) diverge, la (2) non può convergere, per quanto ora visto, né può essere indeterminata per l'«*aut* - *aut*»; deve dunque divergere. ∎

Possiamo ora stabilire quello che è forse il più utile criterio di convergenza per le serie a termini positivi:

TEOREMA 15. *(Criterio dell'ordine di infinitesimo) - Sia data una serie a termini positivi* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *col termine generale infinitesimo. Allora, se esiste un* $s > 1$ *tale che* $\operatorname{ord} a_n \geq s$, *la serie converge, se è* $\operatorname{ord} a_n \leq 1$, *la serie diverge.*

DIM. Siccome la serie armonica diverge, divergono, per il Lemma 14, tutte le serie col termine generale positivo e infinitesimo di ordine minore o uguale a 1. La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ ha il termine generale infinitesimo di ordine s e sappiamo che, per $s > 1$, è convergente. Dunque, se una serie ha il termine generale positivo e infinitesimo di ordine maggiore o uguale a s (> 1), essa è convergente, sempre in virtù del Lemma 14. ∎

ESEMPI. 4) La serie di termine generale $a_n = \frac{2\sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$ è convergente, essendo a_n positivo e infinitesimo di ordine $\frac{3}{2}$.

5) La serie di termine generale $a_n = \sqrt{1 - \cos\frac{1}{n}}$ è divergente, essendo $a_n > 0$ e $\operatorname{ord} a_n = 1$.

6) Nulla possiamo dire, per ora, sul carattere della serie di termine generale $a_n = \frac{1}{n \log n}$, dato che l'ordine di infinitesimo è sì maggiore di 1, ma è minore di ogni numero reale mag-

giore di 1. In realtà, come vedremo dopo aver parlato di integrali impropri, la serie è divergente.

Osserviamo ancora che, se una serie di termine generale $a_n > 0$ soddisfa alle ipotesi del criterio del rapporto o di quello della radice, allora essa è, come sopra visto, maggiorata da una serie geometrica, il cui termine generale è infinitesimo di ordine soprareale; è dunque soprareale anche ord a_n. È perciò perfettamente inutile usare questi criteri quando si sa che il termine generale a_n non può essere infinitesimo di ordine soprareale.

§ 6. SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE

Si è già detto che i risultati stabiliti per le serie a termini positivi valgono anche per le serie che hanno un numero finito di termini negativi. Infatti, se una serie ha un numero finito di termini negativi, esiste un suo resto a termini tutti positivi o nulli e sappiamo che un resto ha lo stesso carattere della serie. Occupiamoci dunque delle serie che hanno infiniti termini positivi e infiniti termini negativi. Diremo che una serie siffatta è a termini *misti*.

DEFINIZIONE. Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è detta *assolutamente convergente* se è convergente la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ formata con i valori assoluti dei termini della serie di partenza.

TEOREMA 16 *Ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

DIM.- Sia data una serie a termini misti e assolutamente convergente (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e indichiamo con (2) la serie dei valori assoluti $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. Per ipotesi, la (2) è convergente. Se nella (1) sostituiamo tutti i termini negativi con degli zeri, troviamo una serie (3), a termini ≥ 0, che è una minorante della (2) e che è quindi convergente. Analogamente, se nella (1) sostituiamo tutti i termini positivi con degli zeri e cambiamo i segni a quelli negativi, troviamo una nuova serie (4), a termini ≥ 0, che è ancora una minorante della (2) e che, pertanto, converge. Ora la (1) si ottiene sommando la (3) con l'opposta della (4) e quindi è anch'essa convergente. ∎

Non sussiste l'implicazione opposta. Può cioè accadere che una serie sia convergente, mentre diverge quella dei valori assoluti. Un esempio in tal senso verrà dato tra poco.

DEFINIZIONE. Una serie convergente per cui risulta divergente la corrispondente serie dei valori assoluti è detta *semplicemente convergente*.

I Teoremi sulle serie a termini positivi visti nel Paragrafo precedente diventano, in questo nuovo contesto, criteri per la convergenza assoluta. In particolare:

Una serie che ha il termine generale infinitesimo di ordine maggiore o uguale a un numero reale $s > 1$, è assolutamente convergente.

L'Osservazione (4) fatta alla fine del §1 assume, nel caso delle serie, la forma seguente:

Se le successioni delle ridotte pari e delle ridotte dispari di una serie convergono ad uno stesso limite S, allora S è la somma della serie data.

Da questo fatto, si ricava il seguente

TEOREMA 17. *Sia data la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. *Se è* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ *e se la serie*

$$(a_0 + a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \dots + (a_{2n} + a_{2n+1}) + \dots$$

risulta convergente, allora converge anche la serie data.

DIM. Per ipotesi, è $(S_{2n+1})_n \to S$ e $(a_n)_n \to 0$. Essendo $S_{2n+2} = S_{2n+1} + a_{2n+2}$, si ottiene che è anche $(S_{2n+2})_n \to S$, da cui la tesi per l'osservazione precedente. ∎

Un caso particolare è costituito dalle serie a termini *di segno alternato* per le quali stabiliamo il seguente risultato.

TEOREMA 18 . *(Criterio di Leibniz) - Sia data una serie a termini di segno alternato*

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots + (-1)^n a_n + \dots, \text{ con } a_n > 0;$$

se è $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ *e se è* $a_{n+1} \leq a_n$, *per ogni n, allora la serie è convergente.*

DIM. Dalla disuguaglianza $a_{n+1} \leq a_n$, si ottiene:

$$S_{2n+2} = S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq S_{2n} \quad \text{e} \quad S_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq S_{2n-1}.$$

Dunque, la successione delle ridotte pari è non - crescente, mentre quella delle ridotte dispari è non - decrescente. Inoltre, comunque si fissino un numero pari p e un numero dispari d, posto $m = d + p + 2$ (num. dispari!), si ha $S_d \leq S_m < S_{m-1} \leq S_p \leq S_0$. La successione delle ridotte dispari è superiormente limitata da S_0; esiste perciò finito il $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = S$. Avendosi poi $S_{2n+2} = S_{2n+1} + a_{2n+2}$, si ha anche $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+2} = S$, dato che a_{2n+2} tende a 0. ∎

Possiamo ora dare un esempio di serie semplicemente convergente:

ESEMPIO. 1) La serie (di Leibniz)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

è convergente, per il Criterio di Leibniz, ma *non è* assolutamente convergente, dato che la serie dei valori assoluti è la serie armonica.

Più in generale, si vede che è semplicemente convergente la serie di termine generale $\frac{(-1)^n}{n^s}$, anche per $s < 1$.

Si tenga ben presente che è ord $\frac{(-1)^n}{n^s} = s$ e che, quindi:

Una serie a termini misti può convergere anche se ha il termine generale infinitesimo di ordine minore o uguale a 1.

ESEMPIO. 2) Si consideri la serie:

$$1 - \sin\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \sin\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \sin\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \dots - \sin\frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \dots$$

Questa, pur essendo una serie a termini di segno alternato, non soddisfa alle ipotesi del Criterio di Leibniz. Ma, d'altra parte, si ha subito $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$; inoltre la serie:

$$1 + \left(-\sin\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\sin\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\sin\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(-\sin\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) + \dots$$

è una serie convergente dato che il suo termine generale è, per $n > 0$, dato da $\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$ ed è quindi infinitesimo di ordine 3. La serie converge per il Teorema 17; la convergenza non è però assoluta, dato che il termine generale della serie è infinitesimo di ordine 1.

Ricordiamo un importante risultato sui limiti (cfr. Cap. 5, § 6) di cui non diamo la dimostrazione, ma che può essere utile in taluni casi:

TEOREMA 19. *(Formula di Stirling) - Si ha:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1. \blacksquare$$

ESEMPIO. 3) Si consideri la serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$. È una serie a termini positivi e si ha:

$$\sqrt[n]{n!} \approx \sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \frac{n}{e} \times \sqrt[2n]{2\pi n} \approx \frac{n}{e},$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che $\sqrt[2n]{2\pi n} = e^{[\log(2\pi n)/2n]}$ tende a 1 al tendere di n a $+\infty$. È dunque $a_n \sim \frac{1}{n^2}$, da cui ord $a_n = 2$; la serie converge.

§ 7. SERIE NUMERICHE NEL CAMPO COMPLESSO

Le nozioni di successione e di serie si estendono in modo del tutto naturale al campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Ricordiamo, intanto la

DEFINIZIONE. Dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, si definisce loro *distanza* il numero *reale non negativo*

$$d(z_1,z_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Inoltre, dato il numero complesso $z = x + yi$, si chiama suo *modulo* il numero *reale non negativo*

$$|z| := d(z,0) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si ha subito:

$$d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|.$$

DEFINIZIONE. Data una successione $(z_n)_n$ di numeri complessi, si dice che essa *tende* o *converge* a un numero $z^* \in \mathbb{C}$ se

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \nu \in \mathbb{N})(\forall\ n \in \mathbb{N})(\ n > \nu \Rightarrow |z_n - z^*| < \varepsilon).$$

In tal caso, si scrive $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z^*$ o $z_n \to z^*$.

Osserviamo che, se è $z_n = x_n + y_n i$ e $z^* = x^* + y^* i$, si ha $z_n \to z^*$ se e solo se è $x_n \to x^*$ e $y_n \to y^*$. Da ciò segue immediatamente che anche per le successioni in $\mathbb{C}$ sussistono le Proposizioni (1), (2), (2') e (4) del Teorema 1. Perdono invece significato le Proposizioni (3) e (5) del medesimo Teorema dato che, come è ben noto, l'insieme $\mathbb{C}$ non è ordinato. La Proposizione 1.3 assume la seguente forma più debole:

Se una successione di numeri complessi converge a un limite diverso da zero, allora esiste una sua coda formata da elementi diversi da zero.

DEFINIZIONE. Data la successione $(z_n)_n$ di numeri complessi, si ponga:

$$S_0 := z_0 \text{ e, per ogni } n > 0,\ S_n := z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1}.$$

La coppia $((z_n)_n, (S_n)_n)$ è detta *serie* di numeri complessi. La si indica scrivendo $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$.

Una serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ è detta *convergente* se la successione $(S_n)_n$ delle sue *ridotte* (o *somme parziali*) ha un limite finito. Se è $S_n \to S$, si dice che S è la *somma* della serie; in tal caso, si scrive $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n = S$.

TEOREMA 20. *Data la serie* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n i)$, *si ha* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n i) = x^* + y^* i$ *se e solo se è* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n = x^*$ *e* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} y_n = y^*$. ∎

DEFINIZIONE. Una serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ è detta *assolutamente convergente* se è convergente la serie a termini reali non negativi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |z_n|$.

TEOREMA 21. *Ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

DIM. Supponiamo che la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n i)$ sia assolutamente convergente. È dunque convergente la serie a termini reali non negativi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$. Convergono allora le due serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |y_n|$ che sono due sue minoranti a termini non negativi. Dal Teorema 16 sappiamo che sono convergenti anche le serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} y_n$; converge perciò anche la serie di partenza. ∎

Sappiamo già dal caso delle serie a termini reali che non sussiste l'implicazione opposta.

È ovvio che, per studiare la convergenza assoluta di una serie a termini complessi, ci si riconduce allo studio di una serie a termini reali non negativi per la quale valgono naturalmente tutti i teoremi stabiliti nei paragrafi 4 e 5.

Quanto alla convergenza *semplice* (ossia *non assoluta*) delle serie a termini complessi, ci limitiamo a segnalare il seguente risultato, del quale omettiamo la dimostrazione, che generalizza il criterio di Leibniz (Teor. 18):

TEOREMA 22 (di *Brunacci, Abel, Dirichlet*) - *Sia data la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sigma^n$, con $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $|\sigma| = 1$, $a_n \in \mathbb{R}$. *Se* $(a_n)_n$ *è non - crescente e tendente a* 0, *allora la serie data è convergente.* ∎

ESEMPI. 1) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n$, con $\vartheta \in [-\pi, \pi[$, converge per ogni $\vartheta \neq 0$.

2) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ converge assolutamente per ogni z con $|z| < 1$ e converge semplicemente se è $|z| = 1$, ma con $z \neq 1$.

3) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge assolutamente per ogni z con $|z| < 1$, mentre non converge se è $|z| \geq 1$.

4) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (n!)z^n$ converge soltanto in $z = 0$.

§ 8. E S E R C I Z I

1) Si studi, in dipendenza dal parametro reale x, il carattere delle seguenti serie:

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty}(1+3x)^n; \quad b) \sum_{n=0}^{+\infty}(3-2\log x)^n; \quad c) \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2-\frac{1}{|\log x|}\right)^n \quad d) \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

[$\Re$. Le prime 3 sono serie del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty}(f(x))^n$; per ogni x appartenente al dominio della f, si ha una serie geometrica che converge se è $|f(x)| < 1$: *a*) $E = \{x : -2/3 < x < 0\}$; *b*) $E = \{x : e < x < e^2\}$; *c*) $E = \{x : e^{-1} < x < e^{-1/3}\} \cup \{x : e^{1/3} < x < e\}$; *d*) si ha $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{n+1}$ che tende a 0 per ogni x; la serie è dunque convergente per ogni x reale.]

2) Si studi il carattere delle seguenti serie:

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}; \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}; \quad c) \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}; \quad d) \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e}{n}\right)^n; \quad e) \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^n+\cos^2 n}{1+\pi^n}.$$

[$\Re$. Sono serie a termini positivi. *a*) Diverge (Crit. rapporto); *b*) converge (Crit. radice); *c*) diverge (Crit. rapporto); *d*) converge (Crit. radice); *e*) converge (il termine generale è strettamente equivalente a $(e/\pi)^n$ che tende a zero con ordine soprareale).]

3) Si studi il carattere delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n+1};\quad b)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^\alpha}{2^n}\ (\alpha\in\mathbb{R});\quad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+\mathrm{arctg}\,n}{n^2+n+1};\quad d)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n+1};$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\sin\frac{1}{n}\right)^3;\quad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right);\quad g)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log(1+1/n)}{\sqrt{n}};\quad h)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}}.$$

[$\Re$. Sono serie a termini positivi, tranne l'ultima che è a termini negativi. Criterio dell'ordine di infinitesimo. *a*) Converge (ord a_n soprareale); *b*) converge per ogni α (ord a_n soprareale); *c*) converge (ord $a_n = 3/2$); *d*) diverge (ord $a_n = 1/2$); *e*) converge (ord $a_n = 2$); *f*) converge (ord $a_n = 2$); *g*) converge (ord $a_n = 3/2$); *h*) converge (ord $a_n = 3/2$; lo si vede moltiplicando sopra e sotto per $n + \sqrt{n^2+1}$).]

4) Si studi il carattere delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\quad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

[$\Re$. Convergono; sono tutte serie di Leibniz. Convergono tutte semplicemente, perché, per tutte 3, è ord $a_n \le 1$.]

5) Si studi il carattere delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}^{-1};\quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\quad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+n+1}\right)^n;$$

$$d)\ \sum_{n=0}^{+\infty}n[\mathrm{arctg}(n+1)-\mathrm{arctg}\,n];\quad e)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}\log\frac{1+n+n^3}{1+n^3};\quad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\right)$$

[$\Re$. Sono serie a termini positivi. *a*) Converge (Crit. del rapporto); *b*) converge (Crit. dell'ordine di infinitesimo); *c*) converge (Crit. della radice); *d*) diverge (Crit. dell'ordine di infinitesimo); *e*) converge (Crit. dell'ordine di infinitesimo); *f*) converge (Crit. dell'ordine di infinitesimo; sostituendo $1/n$ con x, si ottiene, al posto di a_n, la funzione $f(x) = x^x - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ che è infinitesima di ordine 2 per x che tende a 0).]

6) Si studino le due seguenti serie:

$a)$ $1 + x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5 + \ldots + x^{3n} + x^{3n+1} - x^{3n+2} + \ldots$

$b)$ $1 - a + \frac{1}{2} - a^2 + \frac{1}{3} - a^3 + \ldots + \frac{1}{n} - a^n + \ldots \quad (0 < a < 1).$

[$\Re$. *a*) È incastro delle tre serie geometriche $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$; $x\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ e $-x^2\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$; tutte 3 convergono per $|x| < 1$; la somma della serie è $\frac{1+x-x^2}{1-x}$; *b*) è incastro della serie armonica con una serie geometrica convergente ($0 < a < 1$) e quindi è divergente.]

7) Si studi il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos(n\pi)$.

[$\Re$. Diverge. *Non* è una serie di Leibniz, malgrado il fattore $(-1)^n$; è la serie armonica!]

8) Si studi il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n n}{n^2 + 1}$.

[$\Re$. È incastro delle due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$. La prima è a termini positivi e infinitesimi di ordine 2: converge. La seconda è una serie di Leibniz col termine generale infinitesimo di ordine 1: converge semplicemente. La serie data è semplicemente convergente.]

9) Si studi il carattere della serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{1}{n} + \ldots$$

[$\Re$. È una serie a termini di segno alternato e infinitesimi di ordine 1: non converge assolutamente. Non è una serie di Leibniz, essendo $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{n}$. Associando i termini a 2 a 2, si ottiene una serie di termine generale

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{1}{n} = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n\sqrt{n^2+1}} = \frac{-1}{n\sqrt{n^2+1}(n + \sqrt{n^2+1})}$$

che è negativo e infinitesimo di ordine 3; questa nuova serie è dunque convergente. Per il Teorema 17, si conclude che è (semplicemente) convergente anche la serie data.]

10) Si studino le seguenti serie di numeri complessi:

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right)^n; \quad b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}; \quad c) \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(3i)^n}{1+4^n} + \frac{1+2^n}{(3i)^n}\right].$$

[$\Re$. *a*) È una serie geometrica; converge assolutamente, essendo $\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right| = \frac{\sqrt{13}}{6} < 1$; *b*) converge assolutamente; *c*) converge assolutamente; pensiamola come somma di due serie Σa_n e Σb_n; a ciascuna di esse basta applicare il Criterio della radice.]

11) Si provi la convergenza della serie

$$1 - \log 2 + \frac{1}{2} - \log\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \log\frac{4}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} + \ldots$$

La somma di questa serie è la costante γ di Eulero - Mascheroni. (Si ha $\gamma = 0{,}5772156649\ldots$).
Si provi poi che, detta H_n la ridotta n - ima della serie armonica, si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\log(n+1)} = 1$.

[$\Re$. Associando i termini a 2 a 2, si ottiene una serie convergente, essendo il suo termine generale $a_n = \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}$ infinitesimo di ordine 2; la serie data converge per il Teor. 17. Essendo $H_n - \log(n+1) - \gamma \to 0$, si ottiene poi subito anche la seconda parte della tesi.]