Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2016-2017, sessione invernale, I appello
Corso prof. Pierpaolo Omari

COGNOME ______	NOME ______
N. Matricola ______	Anno di corso ______
Corso di Studi: Ingegneria Industriale ○	Ingegneria Navale ○

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i+2n}{9^n}(x+1)^n$, con $x \in \mathbb{R}$.

(*i*) Si determini l'insieme di convergenza puntuale della serie.

• criterio del rapporto: $\dfrac{|i+2n+2|}{9^{n+1}} \dfrac{|x+1|^{n+1}}{|x+1|^n} \dfrac{9^n}{|i+2n|} =$

$= \left|1 + \dfrac{2}{i+2n}\right| \dfrac{|x+1|}{9} \longrightarrow \dfrac{|x+1|}{9}$, $n \to +\infty$

• $|x+1| < 9$: la serie converge ; $|x+1| > 9$: la serie non converge

$\Rightarrow R = 9$

• $x = 8$: $\sum_{n=0}^{+\infty} (i+2n)$ non conv. ; $x = -10$: $\sum_{n=0}^{+\infty} (i+2n)(-1)^n$ non conv.

• L'insieme di convergenza è $]-10, 8[=]-1-R, -1+R[$.

(*ii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie converge uniformemente in $[-2, 1]$.

$[-2,1]$ è un intervallo compatto contenuto in $]-1-R, -1+R[$ e quindi dalla teoria delle serie di potenze segue la convergenza uniforme.

(*iii*) Si determini l'espressione esplicita della somma.

• $i \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x+1}{9}\right)^n = i \dfrac{1}{1-\frac{x+1}{9}} = \dfrac{9i}{8-x}$, essendo $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \dfrac{1}{1-t}$

• $2 \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{x+1}{9}\right)^n = 2 \dfrac{x+1}{9} \dfrac{1}{\left(1-\frac{x+1}{9}\right)^2} = \dfrac{18(x+1)}{(8-x)^2}$, essendo

$\sum_{n=0}^{+\infty} n t^n = t \sum_{n=0}^{+\infty} n t^{n-1} = t \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{1-t}\right) = \dfrac{t}{(1-t)^2}$

• $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{i+2n}{9^n}(x+1)^n = \dfrac{9i}{8-x} + \dfrac{18(x+1)}{(8-x)^2}$, se $|x+1| < 9$

ESERCIZIO N. 2. Posto $g(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2 + 1$, si consideri la funzione $f(x, y) = \log g(x, y)$.

(*i*) Si provi che $2x^2 - xy + 3y^2 \geq x^2 + y^2$, per ogni $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$.

- $2x^2 - xy + 3y^2 \geq x^2 + y^2 \iff x^2 + 2y^2 \geq xy$
- $x^2 + 2y^2 \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq xy$, essendo $0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

(*ii*) Si determini il dominio di f.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$, essendo $g(x,y) \geq x^2 + y^2 + 1 \geq 1$

(*iii*) Si determinino i punti critici di g e se ne studi la natura.

- $\nabla g(x,y) = (4x - y, 6y - x)^T$ $\quad Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ -x + 6y = 0 \end{cases} \iff (x,y)^T = (0,0)^T$
- $Hg(0,0)$ def positiva
- $(0,0)^T$ pto di minimo relativo, anzi di minimo assoluto, di g, essendo $g(x,y) \geq x^2 + y^2 + 1 \geq 1 = g(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$.

(*iv*) Si determinino, giustificando la risposta, $\inf f$ e $\sup f$.

$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty} f(x,y) \geq \lim_{\sqrt{x^2+y^2}} \log(x^2 + y^2 + 1) = +\infty$ e quindi

$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ e $\min_{\mathbb{R}^2} f = f(0,0) = 0$

(*v*) Si stabilisca quali insiemi di livello di f non sono curve regolari in forma implicita.

- $k < 0$: $L_k(f) = \emptyset$
- $k = 0$: $L_0(f) = \{(0,0)^T\}$ e $\nabla f(0,0) = \underline{0}$

$\Rightarrow$ $L_k(f)$ non sono curve regolari in f. i. $\forall k \leq 0$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri l'insieme $E = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : |y| \leq \frac{1}{1+x^2},\ |z| \leq \frac{|x|}{1+x^2}\right\}$.

(*i*) Si calcoli l'area della superficie piana $\Sigma = E \cap \{(x,y,z)^T : z = 0\}$.

- $\Sigma = \{(x,y)^T : -\frac{1}{1+x^2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}\}$
- posto $A_n = \{(x,y)^T : -\frac{1}{1+x^2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2},\ -n \leq x \leq n\}$, si ha

$$\iint_{A_n} 1\,dx\,dy = \int_{-n}^{n}\left(\int_{-\frac{1}{1+x^2}}^{\frac{1}{1+x^2}} 1\,dy\right)dx = 4\int_0^n \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$= 4 \arctan n \to 2\pi,\quad n \to +\infty$$

- $A(\Sigma) = 2\pi$

(*ii*) Si calcoli il volume di E.

- $E = \{(x,y,z)^T : \frac{-1}{1+x^2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2},\ \frac{-|x|}{1+x^2} \leq z \leq \frac{|x|}{1+x^2}\}$
- posto $B_n = E \cap \{(x,y,z)^T : -n \leq x \leq n\}$, si ha

$$\iiint_{B_n} 1\,dx\,dy\,dz = \int_{-n}^{n}\left(\int_{-\frac{1}{1+x^2}}^{\frac{1}{1+x^2}}\left(\int_{-\frac{|x|}{1+x^2}}^{\frac{|x|}{1+x^2}} 1\,dz\right)dy\right)dx$$
$$= 4\int_0^n\left(\int_0^{\frac{1}{1+x^2}} \frac{2x}{1+x^2}\,dy\right)dx = 4\int_0^n \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx$$
$$= 4\left[\frac{-1}{1+x^2}\right]_0^n = 4\left(1 - \frac{1}{1+n^2}\right) \to 4,\quad n \to +\infty$$

- $V(E) = 4$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$g(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*i*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se g è conservativo in $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, se ne calcoli un potenziale f.

- $g(x,y) = (3x-2y+1, \; -2x+y-1)^T$
- $\mathrm{rot}\, g(x,y) = (-2+2)\, \underline{e}_3 = \underline{0}$, $\mathbb{R}^2$ è stellato

$\Rightarrow g$ conservativo in $\mathbb{R}^2$

- $f_x(x,y) = 3x-2y+1 \Rightarrow f(x,y) = \int (3x-2y+1)\,dx + k(y)$

$= \frac{3}{2}x^2 - 2xy + x + k(y)$, $\quad f_y(x,y) = -2x + k'(y) = -2x+y-1$

$\Rightarrow k(y) = \frac{1}{2}y^2 - y \quad$ e $\quad f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2 + x - y$

(*ii*) Si calcoli $\displaystyle\int_\gamma \langle g, \tau\rangle\, ds$, dove $\gamma(t) = (\sin t + t\cos t, t\sin t + \cos t)^T$, $t \in [0,\pi]$.

$$\int_\gamma \langle g, \tau\rangle\, ds = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = f(-\pi,-1) - f(0,1) = \frac{3}{2}\pi^2 - 3\pi + 2$$

(*iii*) Si determini la curva $\gamma(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))^T$ di massima discesa per f uscente dal punto $(1,0)^T$.

- $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$: $\begin{cases} \gamma' = -\nabla f(\gamma) \\ \gamma(0) = (1,0)^T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -3x+2y-1 \\ y' = 2x-y+1 \\ x(0) = 1, \; y(0) = 0. \end{cases}$

- $x'' + 4x' - x = 1$
- $x'' + 4x' - x = 0$, $\quad \lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0$, $\quad \lambda_1 = -2-\sqrt{5} \quad \lambda_2 = -2+\sqrt{5}$
- $\begin{cases} x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} - 1 \\ y(t) = \frac{1}{2}(3x(t) + x'(t) + 1) \end{cases} \qquad x'(t) = \lambda_1 A e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B e^{\lambda_2 t}$

$\begin{cases} x(0) = A + B - 1 = 1 \\ y(0) = \frac{1}{2}(3(A+B-1) + \lambda_1 A + \lambda_2 B + 1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A + B = 2 \\ \lambda_1 A + \lambda_2 B = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} A = -\dfrac{4+2\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} = 1 \\ B = \dfrac{4+2\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} - 1 \\ y(t) = \frac{1}{2}\left((3+\lambda_1)e^{\lambda_1 t} + (3+\lambda_2)e^{\lambda_2 t} - 2\right) \end{cases}$