Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2016-2017, sessione invernale, III appello
Corso prof. P. Omari

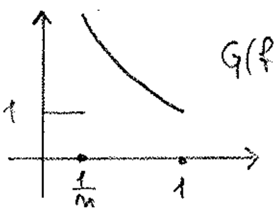
COGNOME ______________________	NOME ______________________
N. Matricola ______________________	Anno di corso ______________________
Corso di Studi: Ingegneria Industriale ○	Ingegneria Navale ○

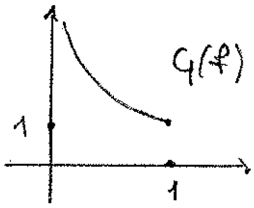
ESERCIZIO N. 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si definisca $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, ponendo $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$

(*i*) Si determini il limite puntuale f della successione $(f_n)_n$ nell'intervallo $[0,1]$.

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

(*ii*) Si traccino i grafici di f_n e di f.





(*iii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

- $$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & 0 < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

- $$\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = +\infty \not\to 0, \quad n \to +\infty$$

(*iv*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$.

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \left[2\sqrt{x} - x\right]_0^{\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to +\infty$$

ESERCIZIO N. 2. Si definisca $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ponendo $f(x, y, z) = 2x^2 - xy^2 + 2y^2 + z^2$.

(*i*) Si calcoli $\nabla f(x, y, z)$.

$$\nabla f(x,y,z) = (4x - y^2,\ -2xy + 4y,\ 2z)^T$$

(*ii*) Si calcoli $Hf(x, y, z)$.

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & -2y & 0 \\ -2y & -2x+4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(*iii*) Si deteminino i punti critici di f.

$$\begin{cases} 4x - y^2 = 0 \\ -2xy + 4y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{8} \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{8} \\ z = 0 \end{cases}$$

(*iv*) Si calcolino gli autovalori della matrice Hessiana valutata nei punti critici.

- $Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 2$

- $Hf(2, \pm\sqrt{8}, 0) = \begin{pmatrix} 4 & \mp 2\sqrt{8} & 0 \\ \mp 2\sqrt{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = 2$

(*v*) Si determini la natura dei punti critici.

$Hf(0,0,0)$ def. pos. $\Rightarrow (0,0,0)^T$ pto di min. rel.

$Hf(2,\pm\sqrt{8},0)$ indef. $\Rightarrow (2,\pm\sqrt{8},0)^T$ pti di sella

(*vi*) Si determinino $\inf_{\mathbb{R}^3} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^3} f$.

$$f(x,0,0) = 4x^2 - x^3 \begin{array}{l} \to +\infty, \quad x \to +\infty \\ \to -\infty, \quad x \to +\infty \end{array} \Rightarrow \inf f = -\infty,\ \sup f = +\infty$$

(*vii*) Si determinino i punti nei quali le superfici di livello di f sono dotate di piano tangente.

Le sup. di livello di f sono dotate di piano tangente nei pti $(x,y,z)^T$ tali che $\nabla f(x,y,z) \neq \underline{0}$, cioè $(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^T, (2, \pm\sqrt{8}, 0)^T\}$.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{x}{2y} \\ y(0) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

determinando il massimo intervallo su cui la soluzione è definita.

RISULTATO

$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}$, $\operatorname{dom} y(\cdot) =]-\frac{1}{2}, +\infty[$

SVOLGIMENTO

- $\begin{cases} y' = y - \frac{x}{2y} \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2yy' = 2y^2 - x \\ y(0) = \frac{1}{2}, \ y(x) > 0 \end{cases}$ (eq. di Bernoulli)

- cambio di variabile : $u(\cdot) = y^2(\cdot)$

$\begin{cases} u' = 2u - x \\ u(0) = \frac{1}{4} \end{cases}$

- $u' = 2u - x$

  $u' = 2u$: $u_0(x) = c e^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$

  $u' = 2u - x$: $\bar{u}(x) = ax + b$, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$

- $u(x) = c e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$
- $u(0) = \frac{1}{4} \iff c = 0$

$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

- $u(x) > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$

- $y(x) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}}$, $\operatorname{dom} y(\cdot) =]-\frac{1}{2}, +\infty[$

ESERCIZIO N. 4. Si ponga $D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4\}$ e si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, definito da $g(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^T$.

(*i*) Si calcolino:

• la matrice Jacobiana di g

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

• il rotore di g

$\operatorname{rot} g(x,y) = \underline{0}$, essendo Jg simmetrica

• la divergenza di g

$$\operatorname{div} g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(*ii*) Si calcolino:

• $\int_{+\mathrm{fr}D} \langle g, \tau \rangle \, ds = \iint_D \langle \operatorname{rot} g(x,y), \underline{e}_3 \rangle \, dx\,dy = 0$

• $\int_{+\mathrm{fr}D} \langle g, \nu \rangle \, ds = \iint_D \operatorname{div} g(x,y)\, dx\,dy = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \frac{1}{\rho} \cdot \rho \, d\rho \right) d\vartheta$$

$$= 2\pi$$

(*iii*) Si provi che g è conservativo in D *(si noti che non è applicabile il teorema di Poincaré)*.

Poiché $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx = \sqrt{x^2+y^2} = \int \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy$,

si conclude che $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ è un potenziale di g in D.