Università degli Studi di Trieste – Ingegneria. Trieste, 5 giugno 2017 

**Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi**
**A.a. 2016-2017, sessione estiva, I appello**
**Corso prof. Pierpaolo Omari**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **COGNOME** ______ | | **NOME** ______ | |
| **N. Matricola** ______ | | **Anno di corso** ______ | |
| **Corso di Studi:** | Ingegneria Industriale ○ | | Ingegneria Navale ○ |

**ESERCIZIO N. 1.** Si consideri la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2i}{n!\, z^{2n}}$, con $z \in \mathbb{C}$.

(*i*) Si determini l'insieme $E$ di convergenza puntuale della serie.

- per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si ha

$$\left|\frac{2i}{(n+1)!\, z^{2n+2}}\right| \cdot \left|\frac{n!\, z^{2n}}{2i}\right| = \frac{1}{(n+1)\,|z|^2} \to 0, \text{ se } n \to +\infty.$$

- per il criterio del rapporto la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} =: E$.

(*ii*) Si stabilisca se l'insieme $E$ è

- aperto: sì
- chiuso: no
- limitato: no
- convesso: no
- stellato: no
- connesso per archi: sì

(*iii*) Detta $f(z)$ la somma della serie, se ne determini l'espressione esplicita.

per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2i}{n!\, z^{2n}} = 2i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n = 2i \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n - 1\right)$$

$$= 2i \left(e^{\frac{1}{z^2}} - 1\right) =: f(z)$$

(*iv*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se esiste $\lim_{z\to 0} f(z)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ z = x \in \mathbb{R}: & \lim_{x\to 0} \left|2i\left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1\right)\right| = +\infty \\ \bullet\ z = iy \in i\mathbb{R}: & \lim_{y\to 0} \left|2i\left(e^{-\frac{1}{y^2}} - 1\right)\right| = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{z\to 0} f(z)$$

**ESERCIZIO N. 2.** Posto $\Sigma = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 - xy + y^2 + z^2 = 1\}$, si consideri la funzione $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x + y - z$.

(*i*) Si provi che $\Sigma$ è una superficie regolare in forma implicita.

Posto $\varphi(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 + z^2 - 1$, si ha

- $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3)$
- $\Sigma \neq \emptyset$ $\quad ((0,0,1)^T \in \Sigma)$
- $\nabla\varphi(x,y,z) = (2x-y, -x+2y, 2z)^T = \underline{0} \iff (x,y,z)^T = \underline{0} \notin \Sigma$

(*ii*) Si provi che esistono $\min\limits_{\Sigma} f$ e $\max\limits_{\Sigma} f$.

- $\Sigma = \{(x,y,z)^T : (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 + z^2 = 1\}$ è limitato ed è chiuso, cioè $\Sigma$ è compatto
- $f$ è continua

$\Rightarrow \exists \min\limits_{\Sigma} f, \max\limits_{\Sigma} f$ per il teorema di Weierstrass

(*iii*) Si determinino $\min\limits_{\Sigma} f$ e $\max\limits_{\Sigma} f$.

- per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla\varphi(x,y,z) \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda(2x-y) \\ 1 = \lambda(-x+2y) \\ -1 = \lambda 2z \\ x^2 - xy + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -x + 2y \\ -2z = 2x - y \\ x^2 - xy + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = -\frac{1}{2}x \\ \frac{5}{4}x^2 = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ z = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ z = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

- $\min\limits_{\Sigma} f = f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$ ; $\max\limits_{\Sigma} f = f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$

COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola ________

**ESERCIZIO N. 3.** Si ponga $D = \{(x,z)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + z^2 \le 3,\ x \ge 0\}$.

$(i)$ Si calcoli l'area di $D$.

$$m_2(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_0^3 \left( \int_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}} 1\,dy \right) dx = 2\int_0^3 \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

$$= 2\int_{-1}^{2} \sqrt{4-t^2}\,dt = 2\left[t\sqrt{4-t^2}\right]_{-1}^{2} - 2\int_{-1}^{2} \frac{4-t^2-4}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$$

$$= 2\sqrt{3} - 2\int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt + 4\int_{-1}^{2}\frac{2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$$

$$= 2\sqrt{3} - 2\int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt + 4\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2}{\sqrt{4-u^2}}\,du$$

$$m_2(D) = \sqrt{3} + 4\left(\arcsin 1 - \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi$$

$(ii)$ Si calcoli il volume del solido $E$ ottenuto facendo ruotare $D$ intorno all'asse $z$ di $2\pi$.

Per il teorema di Pappo-Guldino, si ha

$$m_3(E) = 2\pi \iint_D x\,dx\,dy = 2\pi\int_0^3 2x\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

$$= -2\pi\int_0^3 -2(x-1)\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx + 2\pi\int_0^3 2\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

$$= -2\pi\int_{-1}^{2} -2t\sqrt{4-t^2}\,dt + 2\pi\cdot m_2(D)$$

$$= -2\pi\int_3^0 \sqrt{u}\,du + 2\pi\cdot m_2(D)$$

$$= 2\pi\,\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_0^3 + 2\pi\cdot m_2(D)$$

$$= 4\frac{\pi}{3}3\sqrt{3} + 2\pi\sqrt{3} + \frac{16}{3}\pi^2 = 6\pi\sqrt{3} + \frac{16}{3}\pi^2$$

**ESERCIZIO N. 4.** Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$g(x,y) = (6e^{x-1} + 2xy + y^2, x^2 + 2xy - 4\arctan y)^T.$$

(*i*) Si calcoli la matrice Jacobiana $Jg(x,y)$ di $g$.

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} 6e^{x-1}+2y & 2x+2y \\ 2x+2y & 2x-\frac{4}{1+y^2} \end{pmatrix}$$

(*ii*) Posto $A = Jg(1,1)$, si provi che il campo vettoriale $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da $h(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, è conservativo e se ne determini un potenziale $f$.

- $Jg(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(x,y) = (8x+4y, 4x)^T$

- $\left.\begin{array}{l} \text{rot}\, h(x,y) = (4-4)\underline{e}_3 = \underline{0} \\ \mathbb{R}^2 \text{ stellato} \end{array}\right\} \Rightarrow h \text{ conservativo}$

- un potenziale è $f(x,y) = 4x^2 + 4xy$

(*iii*) Si determini la curva $\gamma(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))^T$ soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} \gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (0,1)^T \end{cases}$.

- $\begin{cases} \gamma'(t) = h(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (0,1)^T \end{cases} \iff \begin{cases} x'(t) = 8x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = 4x(t) \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \end{cases}$

- $x'' = 8x' + 4y' = 8x' + 16x \iff x'' - 8x' - 16x = 0$

  $\lambda^2 - 8\lambda - 16 = 0 \iff \lambda_1 = 4(1+\sqrt{2}),\ \lambda_2 = 4(1-\sqrt{2})$

  $x(t) = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}$ ; $x(0) = 0 \iff a + b = 0$

  $y(t) = \frac{1}{4}(a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - 8a e^{\lambda_1 t} - 8b e^{\lambda_2 t})$; $y(0) = 1 \iff$

  $4 = x'(0) = a\lambda_1 + b\lambda_2 = a(\lambda_1 - \lambda_2) \iff a = \frac{4}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ; $b = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

- $\begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(e^{4(1+\sqrt{2})t} - e^{4(1-\sqrt{2})t}\right) \\ y(t) = \frac{\sqrt{2}}{16}\left(4(1+\sqrt{2})e^{4(1+\sqrt{2})t} - 4(1-\sqrt{2})e^{4(1-\sqrt{2})t}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(4(1+\sqrt{2})e^{4(1+\sqrt{2})t} - 4(1-\sqrt{2})e^{4(1-\sqrt{2})t}\right) \end{cases}$