Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2016-2017, sessione estiva, II appello
Corso prof. P. Omari

COGNOME ____________		**NOME** ____________	
N. Matricola ____________		**Anno di corso** ____________	
Corso di Studi:	**Ingegneria Industriale** ○	**Ingegneria Navale** ○	

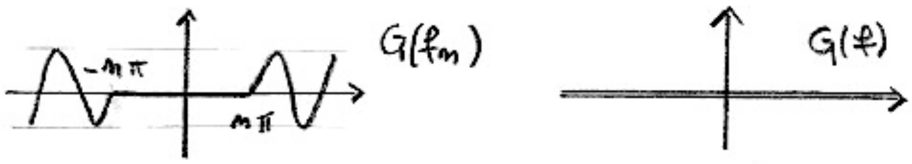
ESERCIZIO N. 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si definisca $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ponendo $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| < n\pi, \\ \sin(2x), & \text{se } |x| \geq n\pi. \end{cases}$

(*i*) Si determini il limite puntuale f della successione $(f_n)_n$ su $\mathbb{R}$.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, infatti se

$n > \frac{|x|}{\pi}$, $f_n(x) = 0$.

(*ii*) Si traccino i grafici di f_n e di f.



(*iii*) Si calcoli, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ e si stabilisca se $(f_n)_n$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$.

$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \max_{\mathbb{R}} |\sin(2x)| = 1 \not\to 0$, se $n \to +\infty$.

Quindi $(f_n)_n$ non converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$.

(*iv*) Si calcoli, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $\sup_{[-1,10]} |f_n(x) - f(x)|$ e si stabilisca se $(f_n)_n$ converge uniformemente a f sull'intervallo $[-1, 10]$.

Se $n > \frac{10}{\pi}$, allora $[-1,10] \subset [-n\pi, n\pi]$ e quindi $f_n(x) = 0$

in $[-1, 10]$. Quindi $\sup_{[-1,10]} |f_n(x) - f(x)| = 0 \to 0$ se

$n \to +\infty$ e $(f_n)_n$ converge uniformemente a f in $[-1, 10]$.

ESERCIZIO N. 2. Si definisca $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ponendo $f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + y^2 + z^2$.

(*i*) Si calcoli $\nabla f(x, y, z)$.

$$\nabla f(x,y,z) = (x^2 - y^2,\ 2y - 2xy,\ 2z)^T$$

(*ii*) Si calcoli $Hf(x, y, z)$.

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ -2y & 2-2x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(*iii*) Si determinino i punti critici di f.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2y(1-x) = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y(1-x) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -y \\ y(1-x) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

(*iv*) Si calcolino gli autovalori della matrice Hessiana valutata nei punti critici.

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} : \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$Hf(1,1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} : \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{5},\ \lambda_3 = 1 + \sqrt{5}$$

$$Hf(1,-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{5},\ \lambda_3 = 1 + \sqrt{5}$$

(*v*) Si provi che f cambia segno in ogni intorno di $(0, 0, 0)^T$.

$f(x,0,0) = \frac{1}{3}x^3$ cambia segno in ogni intorno di 0 e quindi f cambia segno in ogni intorno di $\underline{0}$.

(*vi*) Si determini la natura dei punti critici.

- $(0,0,0)^T$ non è pto di max né di min;
- $(1,1,0)^T$ e $(1,-1,0)^T$ sono pti di sella.

(*vii*) Si determinino $\inf_{\mathbb{R}^3} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^3} f$.

$\inf_{\mathbb{R}^3} f = -\infty$; $\sup_{\mathbb{R}^3} f = +\infty$ (segue dal punto (v))

(*viii*) Si stabilisca quali insiemi di livello di f sono superfici regolari in forma implicita.

$L_k(f)$ non è sup. reg. in forma implicita se e solo se $K = f(0,0,0) = 0$ $\vee$ $K = f(1,1,0) = f(1,-1,0) = \frac{1}{3}$.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga $E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le e^{-x^2},\ 0 \le z < x\}$.

(i) Si stabilisca, giustificando la risposta, se E è un insieme chiuso.

$\underline{0} \in \operatorname{fr} E$, ma $\underline{0} \notin E$ e quindi E non è chiuso

(ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se E è un insieme limitato.

$(x,0,0)^T \in E$ per ogni $x > 0$ e quindi E non è limitato

(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se E è un insieme misurabile in $\mathbb{R}^3$, almeno in senso generalizzato.

Posto per ogni n

$$A_n = \{(x,y,z)^T : 0 < x \le n,\ 0 \le y \le e^{-x^2},\ 0 \le z < x\}$$

si ha

$$\iiint_{A_n} 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^n \left(\int_0^{e^{-x^2}} \left(\int_0^x 1\, dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^n \left(\int_0^{e^{-x^2}} x\, dy \right) dx = -\frac{1}{2} \int_0^n -2x e^{-x^2} dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n^2} \to \frac{1}{2}, \quad \text{se } n \to +\infty$$

Quindi E è misurabile in s.g. con

$$m_3(E) = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = 1 - x^2(t) \\ y'(t) = y(t) + t^2 x(t) \\ x(1) = 1, y(1) = 0. \end{cases}$

(i) Si risolva il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = 1 - x^2(t) \\ x(1) = 1. \end{cases}$

La funzione costante $x(t) = 1$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy.

(ii) Si risolva il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = 1 - x^2(t) \\ y'(t) = y(t) + t^2 x(t) \\ x(1) = 1, y(1) = 0. \end{cases}$

Essendo $x(t) = 1$ per ogni t, il problema è equivalente a $\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

- $y'(t) = y(t)$ ha come soluzioni generale $y_0(t) = Ae^t$, $A \in \mathbb{R}$.
- $y'(t) = y(t) + t^2$ ha come soluzione particolare $\bar{y}(t) = at^2 + bt + c$. Imponendo che $\bar{y}(t)$ sia soluzione si ottiene $a = -1$, $b = -2$, $c = -2$.
- Quindi la soluzione generale di $y'(t) = y(t) + t^2$ è $y(t) = Ae^t - t^2 - 2t - 2$. Imponendo la condizione iniziale si trova $A = 5$ e quindi $y(t) = 5e^t - t^2 - 2t - 2$.

(iii) Posto $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$, si calcolino $\lim_{t \to -\infty} \|\gamma(t)\|$ e $\lim_{t \to +\infty} \|\gamma(t)\|$.

$\|\gamma(t)\| = \sqrt{1 + (5e^t - t^2 - 2t - 2)^2} \to +\infty$,

se $t \to +\infty$ e se $t \to -\infty$.