Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2016-2017, sessione invernale, II appello
Corso prof. P. Omari

COGNOME ________________ **NOME** ________________

N. Matricola ________________ **Anno di corso** ________________

Corso di Studi: **Ingegneria Industriale** ○ **Ingegneria Navale** ○

ESERCIZIO N. 1. Si ponga $f(x) = \dfrac{1}{1+2x^4}$.

(*i*) Si determini lo sviluppo in serie di Taylor-Maclaurin di f.

- $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ se e solo se $|t|<1$;
- $\dfrac{1}{1+2x^4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-2x^4)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^n x^{4n}$ se e solo se $2x^4<1$

(*ii*) Si determini il raggio di convergenza dello sviluppo.

$R = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

(*iii*) Si determini l'insieme di convergenza dello sviluppo.

$\left]-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right[$

(*iv*) Si approssimi $\displaystyle\int_0^{1/4} f(x)\,dx$, con un errore inferiore a 10^{-3}.

- $$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1+2x^4}\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^n x^{4n}\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^n \int_0^{\frac{1}{4}} x^{4n}\,dx$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^n \frac{1}{4n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{4n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \cdot \frac{1}{2^{7n+2}} ;$$
- per il criterio di Leibniz : $|s_N - s| < a_{N+1}$ $\Rightarrow$

$$\left|s_N - \int_0^{\frac{1}{4}} f(x)\,dx\right| < \frac{1}{4N+1} \cdot \frac{1}{2^{7N+2}} ;$$

$$N=1 : \frac{1}{4N+1}\,\frac{1}{2^{7N+2}} = \frac{1}{2560} < 10^{-3} \Rightarrow s_1 = \frac{1}{4}$$

ESERCIZIO N. 2.

(*i*) Si provi che $\varphi : K = \{(u,v)^T : u^2 + v^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}^3$, con $\varphi(u,v) = (u+v, u-v, 1)^T$, è una superficie regolare semplice.

• φ è di classe C^1, $\varphi_u = (1,1,0)^T$, $\varphi_v = (1,-1,0)^T$;

• $\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\,\underline{e}_3 \neq \underline{0}$ in K ;

• $\varphi(u_1,v_1) = \varphi(u_2,v_2) \Rightarrow \begin{cases} u_1+v_1 = u_2+v_2 \\ u_1-v_1 = u_2-v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}$

(*ii*) Si provi che $\gamma : I = [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$ è una curva regolare semplice.

• γ è di classe C^1, $\gamma'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)^T$;

• $\gamma'(t) \neq \underline{0}$ in I

• $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$

(*iii*) Posto $V = \text{sost}(\varphi) \cup \text{sost}(\gamma)$, si stabilisca se

• V è compatto: sì, essendo $\varphi(K)$ e $\gamma(I)$ compatti, per il teorema di compattezza.

• V è connesso: sì, essendo $\varphi(K)$ e $\gamma(I)$ connessi, per il teorema di connessione, e $(\cos 1, \sin 1, 1)^T \in \varphi(K) \cap \gamma(I) \neq \emptyset$.

(*iv*) Posto $f(x,y,z) = 1 + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, si determino gli estremi assoluti di f su V.

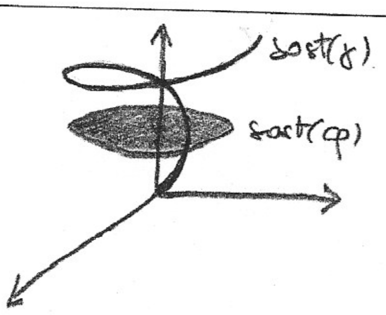
• $f|_{\text{sost}(\varphi)}$: $f(\varphi(u,v)) = 1 + \sqrt{2(u^2+v^2)+1}$ in K,

$\max\limits_{\text{sost}(\varphi)} f = f\circ\varphi|_{\text{fr}K} = 1+\sqrt{3}$, $\min\limits_{\text{sost}(\varphi)} f = f(\varphi(0,0)) = 2$;

• $f|_{\text{sost}(\gamma)}$: $f(\gamma(t)) = 1 + \sqrt{2}\cdot t$ in I,

$\max\limits_{\text{sost}(\gamma)} f = (f\circ\gamma)(3\pi) = 1 + 3\sqrt{2}\,\pi$, $\min\limits_{\text{sost}(\gamma)} f = (f\circ\gamma)(0) = 1$;

• $f|_V$: $\max\limits_V f = 1 + 3\sqrt{2}\,\pi$, $\min\limits_V f = 1$



COGNOME e NOME ____________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il solido

$$E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \le \sqrt{x^2+y^2}\},$$

avente densità di massa $\mu(x,y,z) = 1 - z$.

(*i*) Si determinino la quota minima e la quota massima di E.

- $\max_E z = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\min_E z = -1$

(*ii*) Si provi che E è sezionabile rispetto all'asse z e se ne determinino le sezioni S_z.

- $-1 \le z \le 0$: $S_z = \{(x,y,z)^T : x^2+y^2 \le 1-z^2\}$,
- $0 \le z \le \frac{1}{\sqrt{2}}$: $S_z = \{(x,y,z)^T : z^2 \le x^2+y^2 \le 1-z^2\}$;
- le sezioni sono 2-misurabili $\Rightarrow$ E è sezionabile

(*iii*) Si calcoli la massa di E.

$$m(E) = \iiint_E (1-z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \int_{-1}^{0}\left(\iint_{S_z}(1-z)\,dx\,dy\right)dz + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\iint_{S_z}(1-z)\,dx\,dy\right)dz$$
$$= \int_{-1}^{0}\pi(1-z)(1-z^2)\,dz + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi(1-z)(1-2z^2)\,dz$$
$$= \pi\left[z - \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \pi\left[z - \frac{2}{3}z^3 - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}z^4\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$= \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{8} + \frac{11}{12}\right)$$
$$= \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{19}{24}\right)$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo vettoriale g, definito da

$$g(x,y) = (e^x + \log y, \log x + e^y)^T.$$

(*i*) Si determini il dominio E di g.

$E =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

(*ii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se g è conservativo in E.

$\text{rot}\, g(x,y) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \underline{e_3} \neq \underline{0}$ in E $\Longrightarrow$

g non è conservativo in E

(*iii*) Si calcoli la matrice Jacobiana A di g nel punto $(1,1)^T$.

$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{x} & e^y \end{pmatrix}$;

$A = Jg(1,1) = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 1 & e \end{pmatrix}$

(*iv*) Si determini la curva $\gamma(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))^T$ soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} \gamma'(t) = A(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (0,1)^T \end{cases}$.

$\begin{cases} x' = ex + y \\ y' = x + ey \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1 \end{cases}$

- $x'' - 2e x' + (e^2 - 1)x = 0$

$\lambda^2 - 2e\lambda + (e^2 - 1) = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = e \pm 1$

$\begin{cases} x(t) = A e^{(e+1)t} + B e^{(e-1)t} \\ y(t) = x'(t) - e x(t) \end{cases}$ $\quad x'(t) = (e+1)Ae^{(e+1)t} + (e-1)Be^{(e-1)t}$

$\begin{cases} x(0) = A + B = 0 \\ y(0) = (e+1)A + (e-1)B = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} B = -A \\ 2A = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} e^{(e+1)t} - \frac{1}{2} e^{(e-1)t} \\ y(t) = \frac{1}{2} e^{(e+1)t} + \frac{1}{2} e^{(e-1)t} \end{cases}$

(*v*) Si calcoli $\lim_{t\to-\infty} \gamma(t)$.

$\lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = (0,0)^T$.