Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2016-2017, sessione autunnale, I appello
Corso prof. P. Omari

COGNOME ______		NOME ______	
N. Matricola ______		Anno di corso ______	
Corso di Studi:	Ingegneria Industriale ○	Ingegneria Navale ○	

ESERCIZIO N. 1. Si ponga $f(x) = \ln(1 + 3x^3)$.

(*i*) Si determini lo sviluppo in serie di Taylor-Maclaurin di f.

- $\log(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}$, per $t \in]-1,1]$;
- $\log(1+3x^3) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n x^{3n}}{n}$, per $x \in]-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}]$.

(*ii*) Si determini l'insieme di convergenza dello sviluppo.

$]-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}[$

(*iv*) Si approssimi $\int_0^{1/3} f(x)\,dx$, con un errore inferiore a 10^{-3}.

- $\int_0^{\frac{1}{3}} \log(1+3x^3)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n} \int_0^{\frac{1}{3}} x^{3n}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n(3n+1)} \left(\frac{1}{3}\right)^{3n+1}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(3n+1)3^{2n+1}}$: serie di Leibniz;

- $\left| \int_0^{\frac{1}{3}} \log(1+3x^2)\,dx - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n(3n+1)3^{2n+1}} \right| < 10^{-3}$ se

$\frac{1}{(N+1)(3N+4)3^{2N+3}} < 10^{-3} \iff N \geq 1$

ESERCIZIO N. 2. Posto $E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2\}$, si consideri la funzione $f : E \to \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$.

(i) Si calcoli $\nabla f(x, y)$.

$$\nabla f(x,y) = \left(2x - 3(x-1)^2 y^2,\ 2(1-x)^3 y\right)^T$$

(ii) Si calcoli $Hf(x, y)$.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 - 6(x-1)y^2 & -6(x-1)^2 y \\ -6(x-1)^2 y & 2(1-x)^3 \end{pmatrix}$$

(iii) Si determinino gli estremi relativi di f nell'interno di E.

no!

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} 2x - 3(x-1)^2 y^2 = 0 \\ 2(1-x)^3 y = 0 \end{cases} \iff \cancel{\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ definita positiva } \Rightarrow$$

$(0,0)^T$ pto di minimo relativo

(iv) Si determinino gli estremi relativi e assoluti di f sulla frontiera di E.

$$f(x,y)\big|_{\text{fr}\,E} = f(2,y) = 4 - y^2\ ; \quad \max_{\text{fr}\,E} f = 4\ ;$$

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} f(2,y) = -\infty\ .$$

(v) Si determinino $\inf_E f$ e $\sup_E f$, specificando se sono minimo o massimo.

- $\inf_E f \leq \inf_{\text{fr}\,E} f = -\infty$;

- $\sup_E f = +\infty$, essendo $\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty$.

(vi) Si stabilisca quali insiemi di livello di f sono curve regolari in forma implicita.

$L_k(f) \neq \emptyset$ per ogni $k \in \mathbb{R}$; $f(0,0) = 0$, $\nabla f(0,0) = \underline{0} \Rightarrow$

$L_0(f)$ non è regolare; $L_k(f)$ è regolare per ogni $k \neq 0$.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli l'area della superficie cartesiana

$$\Sigma = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : (x,y)^T \in E,\ z = 1 + x^2 + y^2\},$$

con $E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le x \le y\}$.

RISULTATO

$$\frac{\pi}{48}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$$

SVOLGIMENTO

- $A(\Sigma) = \iint_E \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dx\, dy$

$$= \iint_K \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\vartheta$$

con $K = \{(\rho, \vartheta)^T : 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}\}$.

- $\iint_K \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^2 \frac{1}{8} \sqrt{1+4\rho^2}\, 8\rho\, d\rho \right) d\vartheta$

$$= \frac{\pi}{32} \left[\frac{2}{3} (1+4\rho^2)^{3/2} \right]_1^2 = \frac{\pi}{32} \frac{2}{3} \left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{48} \left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo vettoriale lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definito da

$$g(x, y, z) = (y - z, x - z, z)^T.$$

(i) Si stabilisca, giustificando la risposta, se g è conservativo in $\mathbb{R}^3$.

• $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; poiché A non è simmetrica, g non è conservativo

Altrimenti:

$\mathrm{rot}\, g = \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \neq \underline{0}$

(ii) Si determini la linea di campo $\gamma(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))^T$ passante per il punto $(0, 0, 1)^T$ (*cioè la soluzione del problema di Cauchy* $\begin{cases} \gamma'(t) = g(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (0,0,1)^T \end{cases}$.)

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) - z(t) \\ z'(t) = z(t) \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x'(t) = y(t) - e^t \\ y'(t) = x(t) - e^t \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0 \\ z(t) = e^t \end{cases}$$

• $x''(t) = y'(t) - e^t = x(t) - 2e^t \iff x'' - x = -2e^t$

$x(t) = Ae^t + Be^{-t} + \bar{x}(t)$, $\quad \bar{x}(t) = -te^t$

• $\begin{cases} x(t) = Ae^t + Be^{-t} - te^t \\ y(t) = Ae^t - Be^{-t} + e^t - e^t - te^t \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 0 \end{cases} \iff A = B = 0$

• $\begin{cases} x(t) = -te^t \\ y(t) = -te^t \\ z(t) = e^t \end{cases}$