Università degli Studi di Trieste – Ingegneria. Trieste, 6 luglio 2015

Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2014-2015, sessione estiva, III appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______		NOME ______	
N. Matricola ______		Anno di corso ______	
Corso di Studi:	Ingegneria Industriale ○	Ingegneria Navale ○	

ESERCIZIO N. 1. Si definisca, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$, ponendo $f_n(x) = \dfrac{2^n}{x + i\,3^n}$.

(*i*) Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ fissato, si studi la funzione $|f_n|$.

- $|f_n(x)| = \dfrac{2^n}{\sqrt{x^2 + 3^{2n}}}$
- f_n decrescente
- $|f_n(0)| = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
- $\lim_{x \to +\infty} |f_n(x)| = 0$

(*ii*) Si determini, giustificando la risposta, l'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Per ogni $x \geq 0$ fissato, $|f_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$, per ogni $n \geq 1$.
Per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è assolutamente convergente e dunque convergente.

(*iii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in $[0, +\infty[$.

Per ogni $n \geq 1$, $\sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \left(\frac{2}{3}\right)^n =: M_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$.

Il criterio di Weierstrass garantisce che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in $[0, +\infty[$.

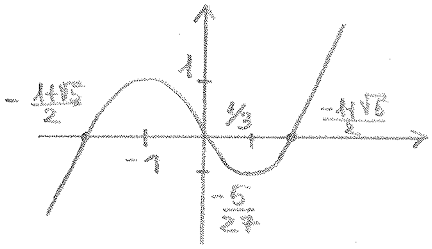
(*iv*) Si calcoli $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0)$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{i}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) = \frac{1}{i}\,2 = -2i$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{x-y} (3t^2 + 2t - 1)\, dt$.

(i) Si studi la funzione $\varphi(t) = t^3 + t^2 - t$.

- $\varphi(t) \geq 0 \iff t(t^2+t-1) \geq 0 \iff -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq t \leq 0 \;\vee\; t \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- $\lim_{t \to \pm\infty} \varphi(t) = \pm\infty$
- $\varphi'(t) = 3t^2 + 2t - 1$
- $\varphi'(t) \geq 0 \iff t \leq -1 \vee t \geq \frac{1}{3}$



(ii) Si determinino i segni di f.

$f(x,y) = 3(x-y)^3 + (x-y)^2 - (x-y) = \varphi(x-y) \geq 0 \iff$

$-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq x-y \leq 0 \quad \vee \quad x-y \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \iff$

$x \leq y \leq x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad y \leq x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(iii) Si determino gli estremi relativi e assoluti di f.

- i pti della retta $x-y=-1 \iff y = x+1$ sono pti di max. rel.
- i pti della retta $x-y = \frac{1}{3} \iff y = x - \frac{1}{3}$ sono pti di min. rel.
- $\sup f = +\infty$
- $\inf f = -\infty$
- 1 è max. rel.
- $-\frac{5}{27}$ è min. rel.

(iv) Si descrivano le curve di livello $L_k(f) = \{(x,y)^T : f(x,y) = k\}$ per $k \in \{-1, 0, 1\}$.

- $L_{-1}(f) = \{(x,y)^T : f(x,y) = -1\} = \{(x,y)^T : \varphi(x-y) = -1\}$
  $= \{(x,y)^T : x-y = t_1,\ \text{con } \varphi(t_1) = -1\}$ è una retta;
- $L_0(f) = \{(x,y)^T : f(x,y) = 0\} = \{(x,y)^T : \varphi(x-y) = 0\}$
  $= \{(x,y)^T : x-y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x-y = 0 \vee x-y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$ è una terna di rette;
- $L_{\frac{1}{3}}(f) = \{(x,y)^T : f(x,y) = 1\} = \{(x,y)^T : \varphi(x-y) = 1\} =$
  $= \{(x,y)^T : x-y = -1 \vee x-y = t_2,\ \text{con } \varphi(t_2) = 1\}$ è una coppia di rette.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si definiscano, per ogni $\alpha \in]0, +\infty[$, le funzioni $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}$, ponendo

$$\Phi(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha, \qquad \Psi(x,y) = (x^2+y^2)^{-\alpha}.$$

(*i*) Si determini l'insieme D dei punti $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$ tali che $\Phi(x,y) \le \Psi(x,y)$.

- Per ogni $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$,

$$\Phi(x,y) \le \Psi(x,y) \iff (x^2+y^2)^\alpha \le (x^2+y^2)^{-\alpha}$$
$$\iff (x^2+y^2)^{2\alpha} \le 1 \iff x^2+y^2 \le 1.$$

- $D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \le 1\}$.

(*ii*) Si determinino gli $\alpha \in]0, +\infty[$ tali che il volume in senso generalizzato dell'insieme

$$E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : (x,y)^T \in D,\ \Phi(x,y) \le z \le \Psi(x,y)\}$$

è finito.

- $\iiint_E 1 \, dx\,dy\,dz = \lim_{n\to+\infty} \iiint_{A_n} 1\,dx\,dy\,dz$ con

$$A_n = \{(x,y,z)^T : \tfrac{1}{n^2} \le x^2+y^2 \le 1,\ \Phi(x,y) \le z \le \Psi(x,y)\}.$$

- $$\iiint_{A_n} 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_{\rho^{2\alpha}}^{\rho^{-2\alpha}} \rho\,dz\right)d\rho\right)d\theta =$$
$$= 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\rho^{1-2\alpha} - \rho^{1+2\alpha}\right)d\rho.$$

- $\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \rho^{1-2\alpha}\,d\rho \in \mathbb{R} \iff 1-2\alpha > -1 \iff \alpha < 1$

- per ogni $0<\alpha<1$,

$$\lim_{n\to+\infty} 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\rho^{1-2\alpha}-\rho^{1+2\alpha}\right)d\rho = \lim_{n\to+\infty} 2\pi\left[\frac{1}{2-2\alpha}\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^{2-2\alpha}\right) - \frac{1}{2+2\alpha}\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^{2+2\alpha}\right)\right]$$
$$= \pi\cdot\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1+\alpha}\right) = \frac{2\alpha\pi}{1-\alpha^2}$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Si determini e si descriva il sostegno della curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ortogonale alle linee di livello di f e tale che $\gamma(0) = (1, 1)^T$.

RISULTATO

- $\gamma(t) = (e^{3t}, e^{3t})^T, \quad t \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{sost}(\gamma) = \{(x,y)^T : x = y,\ x \geq 0\}$ semiretta

SVOLGIMENTO

- $\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y)^T$ • $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$
- $\begin{cases} \gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (1,1)^T \end{cases} \iff \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \\ x(0) = 1 = y(0) \end{cases}$

- $x'' = 2x' + y' = 2x' + x + 2y = 4x' - 3x$

$x'' - 4x' + 3x = 0 \qquad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm 1$

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{t} + Be^{3t} \\ y(t) = x'(t) - 2x(t) = -Ae^{t} + Be^{3t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = A + B = 1 \\ y(0) = -A + 3B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

- $\gamma(t) = (e^{3t}, e^{3t})^T, \quad t \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{sost}(\gamma) = \{(x,y)^T : x = y,\ x \geq 0\}$