Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2015-2016, sessione estiva, I appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______________________ NOME ______________________

N. Matricola ______________________ Anno di corso ______________________

Corso di Studi: Ingegneria Industriale ○ Ingegneria Navale ○

ESERCIZIO N. 1. Si ponga, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{n}{i\,n + \log x}$.

(*i*) Si determini il dominio comune E delle funzioni f_n.

$\operatorname{dom} f_n =]0, +\infty[$ per ogni n $\Rightarrow$ $E =]0, +\infty[$

(*ii*) Si studi la convergenza puntuale della successione $(f_n)_n$ in E.

$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{i}$ per ogni $x > 0$

(*iii*) Si studi la convergenza uniforme della successione $(f_n)_n$ in $[1, e]$.

- $\left| f_n(x) - \frac{1}{i} \right| = \dfrac{|\log x|}{\sqrt{n^2 + (\log x)^2}}$ per ogni $x > 0$

- $\sup_{[1,e]} \left| f_n(x) - \frac{1}{i} \right| \leq \dfrac{\log e}{n} = \dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow$ $(f_n)_n$ converge uniformemente in $[1, e]$

(*iv*) Si studi la convergenza uniforme della successione $(f_n)_n$ in $[e, +\infty[$.

- $\lim_{x \to +\infty} \left| f_n(x) - \frac{1}{i} \right| = \left| \frac{1}{i} \right| = 1$

- $\sup_{[1,+\infty[} \left| f_n(x) - \frac{1}{i} \right| \geq 1$

$\Rightarrow$ $(f_n)_n$ non converge uniformemente in $[1, +\infty[$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x,y) = \exp(2x^2 + y^3 + xy)$.

(*i*) Si calcoli il gradiente di f.

$$\nabla f(x,y) = f(x,y) \cdot (4x + y,\ 3y^2 + x)^T$$

(*ii*) Si determinino i punti critici di f.

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} 4x + y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{1}{48} \\ y = \frac{1}{12} \end{cases}$$

(*iii*) Si calcoli la matrice Hessiana di f.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \cdot ((4x+y)^2 + 4) & f(x,y) \cdot ((4x+y)(3y^2+x) + 1) \\ f(x,y) \cdot ((4x+y)(3y^2+x) + 1) & f(x,y) \cdot ((3y^2+x)^2 + 6y) \end{pmatrix}$$

(*iv*) Si studi la natura dei punti critici di f.

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ indefinita $\Rightarrow$ $(0,0)^T$ pto di sella

$Hf\left(-\frac{1}{48}, \frac{1}{12}\right) = f\left(-\frac{1}{48}, \frac{1}{12}\right) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ definita pos. $\Rightarrow$ $\left(-\frac{1}{48}, \frac{1}{12}\right)^T$ pto di minimo

(*v*) Si determinino, giustificando la risposta, $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f$.

- $\lim_{y \to +\infty} f(0,y) = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$
- $\lim_{y \to -\infty} f(0,y) = 0 \wedge f(x,y) > 0 \ \forall (x,y)^T \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} f = 0$

(*vi*) Si determini la retta normale al grafico di f nel punto $(0,0,f(0,0))^T$.

$\nabla f(0,0) = \underline{0} \wedge f(0,0) = 1 \Rightarrow z = 1$ è il piano tangente

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (asse z) è la retta normale

(*vii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, quali insiemi di livello di f sono curve regolari in forma implicita.

- $(0,0)^T$ è pto critico $\wedge f(0,0) = 1 \Rightarrow L_1$ non è regolare
- $\left(-\frac{1}{48}, \frac{1}{12}\right)^T$ è pto critico $\wedge f\left(-\frac{1}{48}, \frac{1}{12}\right) = e^{-\frac{1}{2^4 3^3}} \Rightarrow$

$L_{e^{-\frac{1}{2^4 3^3}}}$ non è regolare

COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il solido $E = \{(x,y,z)^T : 1 \le x^2+y^2 \le 4 \wedge 1 \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}\}$.

(*i*) Si calcoli il volume di E.

Posto $A = \{(x,y)^T : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$ e

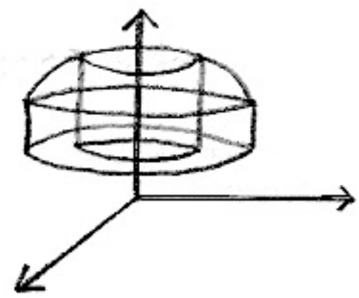
$B = \{(\rho,\vartheta)^T : 1 \le \rho \le 2 \wedge 0 \le \vartheta \le 2\pi\}$,

si ha

$$m_3(E) = \iiint_E 1\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left(\int_1^{\sqrt{9-x^2-y^2}} 1\,dz\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_B \left(\sqrt{9-\rho^2}-1\right)\rho\,d\rho\,d\vartheta = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 \left(\sqrt{9-\rho^2}-1\right)\rho\,d\rho\right) d\vartheta$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left(8^{3/2}-5^{3/2}\right) - 3\pi$$



(*ii*) Si calcoli l'area della frontiera di E.

Si ha

$$A(\operatorname{fr} E) = \pi(4-1) + 4\pi(\sqrt{5}-1) + 2\pi(\sqrt{8}-1) +$$

$$+ \iint_A \sqrt{1+\|\nabla\sqrt{9-x^2-y^2}\|^2}\,dx\,dy,$$

con

$$\iint_A \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{9-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \iint_B \sqrt{1+\frac{\rho^2}{9-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 \frac{3\rho}{\sqrt{9-\rho^2}}\,d\rho\right) d\vartheta = 6\pi\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$g(x,y) = (1 - 2y + x, y - 2x + 1)^T.$$

(i) Si provi che g è conservativo.

$\frac{\partial}{\partial x}(y - 2x + 1) = -2 = \frac{\partial}{\partial y}(1 - 2y + x) \;\wedge\; \mathbb{R}^2$ è stellato

$\Rightarrow$ g è conservativo in $\mathbb{R}^2$

(ii) Si determini un potenziale f di g.

• $f(x,y) = \int (x - 2y + 1)\, dx = \frac{1}{2}x^2 - 2xy + x + c(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + c'(y) = -2x + y + 1 \iff c(y) = \frac{1}{2}y^2 + y + K$

• $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2xy + x + y$ è un potenziale

(iii) Si determini la curva $\gamma(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))^T$ di massima discesa uscente dall'origine *(cioè la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \gamma'(t) = -\nabla f(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (0,0)^T. \end{cases}\Bigg)$$

$\begin{cases} \gamma' = -\nabla f(\gamma) \\ \gamma(0) = (0,0)^T \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -x + 2y - 1 \\ y' = 2x - y - 1 \\ x(0) = 0 = y(0) \end{cases}$

• $x'' = -x' + 2y' = -x' + 4x - 2y - 2 = -2x' + 3x - 3$

• $x'' + 2x' + 3x = -3$ ha sol. generale

$x(t) = Ae^{3t} + Be^{t} + 1$, con $A, B \in \mathbb{R}$.

• $\begin{cases} x(t) = Ae^{-3t} + Be^{t} + 1 \\ y(t) = -Ae^{-3t} + Be^{t} + 1 \end{cases}$ è sol. generale del sistema.

Imponendo le cond. iniziali si ottiene $A = 0$, $B = -1$ e quindi

$\begin{cases} x(t) = -e^{t} + 1 \\ y(t) = -e^{t} + 1 \end{cases}$