Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2015-2016, sessione estiva, II appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______	**NOME** ______
N. Matricola ______	**Anno di corso** ______
Corso di Studi: Ingegneria Industriale ○	Ingegneria Navale ○

ESERCIZIO N. 1. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$ e $f''(z) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

(*i*) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si determinino $f^{(2n)}(0)$ e $f^{(2n+1)}(0)$.

- $f'''(z) = f'(z), \dots, f^{(2n+1)}(z) = f^{(2n-1)}(z) = f'(z) \Rightarrow f^{(2n+1)}(0) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $f^{IV}(z) = f''(z) = f(z), \dots, f^{(2n+2)}(z) = f^{(2n)}(z) = f(z) \Rightarrow f^{(2n)}(0) = 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(*ii*) Si determini lo sviluppo in serie di Taylor-Maclaurin di f.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n)!} z^{2n}$$

(*iii*) Si determini l'insieme di convergenza dello sviluppo.

$\mathbb{C}$

(*iv*) Si determini l'espressione esplicita della somma.

$f(z) = 2 \cosh z$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x,y) = \int_0^1 \arctan(x^2+y^2+t)\,dt$.

(*i*) Si provi che $\min_{\mathbb{R}^2} f = \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}$. Per ogni $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$f(x,y) = \int_0^1 \arctan(x^2+y^2+t)\,dt \geq \int_0^1 \arctan t\,dt = f(0,0),$$

$$f(0,0) = \left[t \arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\log(1+t^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2} \implies \min f = f(0,0) = \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}.$$

(*ii*) Si provi che $\sup_{\mathbb{R}^2} f = \frac{\pi}{2}$. Per ogni $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ si ha $f(x,y) < \frac{\pi}{2}$

Inoltre $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k > 0)(\forall (x,y)^T)(\forall t \in [0,1])$

$$\Big(x^2+y^2+t > k \implies \arctan(x^2+y^2+t) > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

$$\implies \int_0^1 \arctan(x^2+y^2+t)\,dt > \frac{\pi}{2} - \varepsilon \Big)$$

Quindi $\sup f = \frac{\pi}{2}$.

(*iii*) Si calcoli il gradiente di f.

$$\nabla f(x,y) = \left(\int_0^1 \frac{2x}{1+(x^2+y^2+t)^2}\,dt,\ \int_0^1 \frac{2y}{1+(x^2+y^2+t)^2}\,dt \right)^T$$

(*iv*) Si determinino i punti critici di f.

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff (x,y)^T = (0,0)^T, \quad \text{essendo}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+(x^2+y^2+t)^2}\,dt > 0.$$

(*v*) Si stabilisca quali insiemi di livello di f sono curve regolari in forma implicita.

- $k < 0 \vee k \geq \frac{\pi}{2}$: $L_k = \emptyset \implies L_k$ non è regolare
- $k = \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}$: $\underline{0} \in L_k \implies L_k$ non è regolare
- $\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2} < k < \frac{\pi}{2}$: L_k è regolare

COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri l'insieme $E = \{(x, y, z)^T : |y| < xe^{-x} \wedge 0 < z \leq x\}$.

(*i*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se E è chiuso.

E non è chiuso, in quanto $\underline{0} \in \mathrm{cl}\, E$, ma $\underline{0} \notin E$

(*ii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se E è limitato.

E non è limitato, in quanto la semiretta

$\{(x, 0, x)^T, x > 0\} \subset E$.

(*iii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se E è misurabile (almeno in senso generalizzato).

Posto per ogni n

$$A_n = \{(x,y,z)^T : 0 < x < n,\ |y| < xe^{-x},\ 0 < z \leq x\}$$

si ha

$$\iiint_{A_n} 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^n \left(\int_{-xe^{-x}}^{xe^{-x}} \left(\int_0^x 1\, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^n 2x^2 e^{-x}\, dx$$

$$= \left[-2x^2 e^{-x}\right]_0^n + \left[-4x e^{-x}\right]_0^n - \int_0^n 4 e^{-x} dx$$

$$= 4 - 4e^{-n} - 4n e^{-n} - 2n^2 e^{-n}$$

e quindi

$$4 = \lim_{n \to +\infty} \iiint_{A_n} 1\, dx\, dy\, dz = \iiint_E 1\, dx\, dy\, dz = m_3(E).$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definito da

$$g(x, y, z) = (x + y + z, -z, y)^T.$$

(*i*) Si calcoli la divergenza di g.

$\operatorname{div} g(x,y,z) = 1 - 1 + 1 = 1$ in $\mathbb{R}^3$

(*ii*) Si calcoli il flusso di g attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z)^T : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1\}$.

Per il teorema della divergenza, si ha

$$\iint_\Sigma \langle g, \nu \rangle \, d\sigma = \iiint_E 1 \, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \right) d\varphi \right) d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}\pi = m_3(E), \quad \text{con}$$

$$E = \left\{ (x,y,z)^T : x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} < 1 \right\}.$$

(*iii*) Si determini la linea di campo $\gamma(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))^T$ passante per il punto $(0, 1, 0)^T$

$$\begin{cases} \gamma'(t) = g(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (0,1,0)^T \end{cases} \iff \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = -z(t) \\ z'(t) = y(t) \\ x(0) = 0 = z(0), \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} y' = -z \\ z' = y \\ y(0) = 1, \quad z(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(t) = \cos t \\ z(t) = \sin t \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x' = x + y + z \\ x(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x + \cos t + \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$\iff x(t) = e^t - \cos t$$

Quindi

$$\gamma(t) = (e^t - \cos t, \cos t, \sin t)^T$$