Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2014-2015, sessione invernale, II appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______________	**NOME** ______________
N. Matricola ______________	**Anno di corso** ______________
Corso di Studi: Ingegneria Industriale ○	Ingegneria Navale ○

ESERCIZIO N. 1. Si definisca $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ponendo $f(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{iz} - 1}{z} & \text{se } z \neq 0, \\ i & \text{se } z = 0. \end{cases}$

(*i*) Si determini lo sviluppo di Taylor-Maclaurin di f.

- $e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} z^{n-1}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $f(0) = i$
- $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} z^{n-1}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(*ii*) Si determini l'insieme di convergenza dello sviluppo.

$\mathbb{C}$

(*iii*) Si determini lo sviluppo di Taylor-Maclaurin e l'espressione esplicita della funzione $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $g(z) = zf'(z) + f(z)$.

$$g(z) = z \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} i^n z^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} z^{n-1} =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n!} + \frac{1}{n!} \right) i^n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n z^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{n-1}}{(n-1)!} = i e^{iz}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(*iv*) Si determini lo sviluppo di Taylor-Maclaurin della funzione olomorfa $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $zh'(z) + h(z) = f(z)$.

Posto $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, si ha:

$$z h'(z) + h(z) = f(z) \iff z \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1}}{(n+1)!} z^n$$
$$\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1}}{(n+1)!} z^n \iff a_n = \frac{i^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque: $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

ESERCIZIO N. 2. Si definisca $\varphi : K = [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ ponendo $\varphi(u,v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, v)^T$.

(*i*) Si provi che $\Sigma = \varphi(K)$ è il sostegno di una superficie regolare semplice, verificando che

• $\varphi_u \times \varphi_v \neq \underline{0}$ in K:

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e^u \cos v & e^u \sin v & 0 \\ -e^u \sin v & e^u \cos v & 1 \end{vmatrix} = (e^u \sin v, -e^u \cos v, \underbrace{e^{2u}}_{>0})^T \neq \underline{0},$$

$\forall (u,v)^T \in K$.

• φ è iniettiva: $\forall (u_1,v_1)^T, (u_2,v_2)^T \in K$ si ha $\varphi(u_1,v_1) = \varphi(u_2,v_2) \Leftrightarrow$

$(e^{u_1} \cos v_1, e^{u_1} \sin v_1, v_1)^T = (e^{u_2} \cos v_2, e^{u_2} \sin v_2, v_2)^T \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} e^{u_1} \cos v_1 = e^{u_2} \cos v_1 \\ e^{u_1} \sin v_1 = e^{u_2} \sin v_1 \\ v_1 = v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2u_1} = e^{2u_2} \\ v_1 = v_2 \end{cases} \Leftrightarrow (u_1,v_1)^T = (u_2,v_2)^T$$

(*ii*) Si determinino i punti di minima e di massima distanza di Σ da $\underline{0}$.

Posto $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, studiare $f|_\Sigma$ equivale a studiare $\psi = f \circ \varphi$ in K.

Si ha • $\psi(u,v) = \sqrt{e^{2u}+v^2}$

• ψ è continua su K compatto $\Rightarrow \exists \max_K \psi$ e $\min_K \psi$

• $\nabla \psi \neq \underline{0}$ in int $K \Rightarrow \max_K \psi = \max_{\mathrm{fr} K} \psi$ e

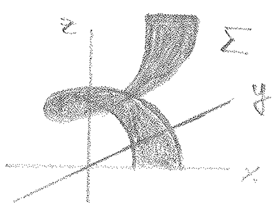
$\min_K \psi = \min_{\mathrm{fr} K} \psi$

• $\max_{\mathrm{fr} K} \psi = \psi(1,2\pi) = \sqrt{e^2+4\pi^2} = \max f|_\Sigma = f(e,0,2\pi)$

• $\min_{\mathrm{fr} K} \psi = \psi(0,0) = 1 = \min f|_\Sigma = f(1,0,0)$

• $(e,0,2\pi)^T$ pto di max distanza di Σ da $\underline{0}$.

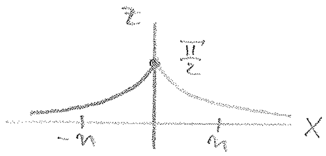
$(1,0,0)^T$ pto di min distanza di Σ da $\underline{0}$.



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga $D = \left\{(x,z)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \le z \le \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}$.

(*i*) Si stabilisca se D è misurabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}^2$.



• Posto $A_n = \{(x,z)^T : |x| \le n \wedge 0 \le z \le \arctan(\frac{1}{x^2})\}$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$, si ha:

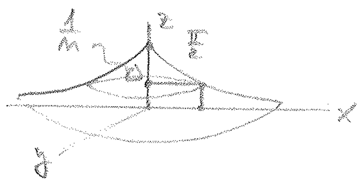
$$\iint_{A_n} 1\,dx\,dy = 2\int_0^n \left(\int_0^{\arctan(\frac{1}{x^2})} 1\,dz\right)dx = 2\int_0^n \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)dx \to 2\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Poiché $\operatorname{ord}_{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \operatorname{ord}_{+\infty} \frac{1}{x^2} = 2$, $\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)dx \in \mathbb{R}$ e quindi D è misurabile in senso generalizzato, con $m_2(D) = 2\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$.

• $\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx =$

$= \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(*ii*) Si stabilisca se il solido E, ottenuto facendo ruotare D intorno all'asse z di un angolo pari a π, è misurabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}^3$.



• Posto $B_n = \{(x,y,z)^T : \frac{1}{n} \le z \le \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\}$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$, si ha, integrando per sezioni,

$$\iiint_{B_n} 1\,dx\,dy\,dz = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\iint_{S_z} 1\,dx\,dy\right)dz = \pi\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg} z}\,dz,$$

essendo $S_z = \{(x,y)^T : x^2+y^2 \le \frac{1}{\operatorname{tg} z}\}$ e

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{\sin z}\,dz = \left[\ln(\sin z)\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \simeq \ln n \to +\infty \quad \text{se } n \to +\infty.$$

• In conclusione, E non è misurabile in senso generalizzato.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 4. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = 1 + (y')^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

specificando il massimo intervallo su cui la soluzione esiste.

RISULTATO

$$y(x) = -\ln\left(\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right), \quad -\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{4}$$

SVOLGIMENTO

- Sostituzione: $u(\cdot) = y'(\cdot)$

$$\begin{cases} u' = 1+u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \int_0^x \frac{u'(t)}{1+u^2(t)}\,dt = x \\ u(0) = 1 \end{cases} \iff \int_{u(0)=1}^{u(x)} \frac{1}{1+s^2}\,ds = x \iff$$

$$\arctan(u(x)) - \arctan(1) = x \iff \arctan u(x) = x + \frac{\pi}{4} \iff$$

$$\begin{cases} u(x) = \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \\ \left|x+\frac{\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} y(x) = \int_0^x \tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt = -\ln\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) + \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \\ \quad = -\ln\left(\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ -\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$