Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2014-2015, sessione estiva, II appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______________________ NOME ______________________

N. Matricola ______________________ Anno di corso ______________________

Corso di Studi: Ingegneria Industriale ○ Ingegneria Navale ○

ESERCIZIO N. 1. Si definisca, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ponendo $f_n(x) = \frac{x}{n} - \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

(*i*) Si provi che la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $\varphi(t) = t - \sin t$, è non-decrescente.

$\varphi'(t) = 1 - \cos t \geq 0$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi φ è non-decrescente

(*ii*) Si determini $\text{ord}_0 \varphi$.

$\text{ord}_0 \varphi = 3$, essendo $\lim_{t \to 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \frac{1}{6}$

(*iii*) Si determini l'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, $\text{ord}_{+\infty} f_n(x) \geq 3$ e quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è convergente

(*iv*) Si stabilisca se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente sull'intervallo $[0, 1]$.

Si ha:

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| = f_n(1) =: M_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty,$$

e quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in $[0,1]$, per l'M-test di Weierstrass.

(*v*) Si stabilisca se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente sull'intervallo $[1, +\infty[$.

Si ha:

$\sup_{x \geq 1} f_n(x) = +\infty$ e quindi $(f_n)_n$ non converge uniformemente a 0 in $[1, +\infty[$. Dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ non converge uniformemente in $[1, +\infty[$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $g(x,y) = e^x + x - y^2 + 2y - 2$.

(i) Si provi che $\Gamma = \{(x,y)^T : g(x,y) = 0\}$ è il sostegno di una curva regolare in forma implicita.

Si ha:

$$g \in C^1(\mathbb{R}^2) \quad e \quad \nabla g(x,y) = (e^x+1, -2y+2)^T \neq (0,0)^T$$

e quindi Γ è il sostegno di una curva regolare in forma implicita.

(ii) Si provi che la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x) = e^x + x$ è invertibile.

Si ha:

- $\varphi'(x) = 1+e^x > 0$ in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ φ è iniettiva
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua $\Rightarrow$ $\varphi(\mathbb{R})$ è un intervallo
- $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \pm\infty \Rightarrow \varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, cioè φ è suriettiva

(iii) Si provi che esiste una funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\Gamma = \{(x,y)^T : x = h(y)\}$.

Posto

$$h(y) = \varphi^{-1}(y^2 - 2y + 2),$$

si ha

$$g(x,y) = 0 \iff x = h(y), \quad \text{cioè } \Gamma = G(h).$$

Inoltre $h'(y) = \dfrac{2y-2}{\varphi'(h(y))}$ è continua in $\mathbb{R}$.

(iv) Si determinino i punti di Γ aventi ascissa minima.

Si ha:

$$\lim_{y\to\pm\infty} h(y) = +\infty \quad e \quad h'(y) = 0 \iff y = 1.$$

Quindi 1 è pto di minimo assoluto per h e $h(1) = \varphi^{-1}(1) = 0$. In conclusione, il pto di Γ avente ascissa minima è $(0,1)^T$.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

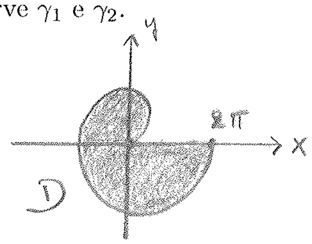
ESERCIZIO N. 3. Siano $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da

$$g(x, y) = (\sin x - y + y^2 \sin x, \cos y + x - 2y \cos x)^T$$

e $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ le curve definite da

$$\gamma_1(t) = (t, 0)^T \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (t \cos t, t \sin t)^T.$$

(*i*) Si calcoli, usando le coordinate polari, l'area del dominio limitato D avente come frontiera i sostegni delle curve γ_1 e γ_2.



La rappresentazione polare di γ_2 è $\rho = t$, $t \in [0, 2\pi]$, essendo $\|\gamma_2(t)\| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = t$.

Quindi si ha:

$$\iint_D 1 \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^t \rho \, d\rho \right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{t^2}{2} \, dt = \frac{1}{6}(2\pi)^3 = \frac{4}{3}\pi^3.$$

(*ii*) Si calcoli $\int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle \, ds$.

$$\int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle \, ds = \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = 0$$

(*iii*) Si calcoli rot $g(x, y)$.

$$\text{rot}\, g(x,y) = (0, 0, 1 + 2y \sin x + 1 - 2y \sin x)^T = (0, 0, 2)^T$$

(*iv*) Si calcoli, usando il teorema del rotore, $\int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle \, ds$.

Si ha:

$$2 \cdot m_2(D) = \iint_D \langle \text{rot}\, g(x,y), e_3 \rangle \, dx\, dy = \int_{+\text{fr}\, D} \langle g, \tau \rangle \, ds =$$

$$= \int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle \, ds - \int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle \, ds = \int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle \, ds$$

e quindi $\int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle \, ds = \frac{8}{3}\pi^3$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \frac{a}{x} y' = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(*i*) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si determini la soluzione $y_a(\cdot)$ del problema di Cauchy

Posto $y' = u$, si ha

$$\begin{cases} u' + \frac{a}{x} u = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

e quindi $u_a(x) = x^{-a}$ in $]0, +\infty[$.

Pertanto si ottiene

$$y_a(x) = \int_1^x u_a(t)\, dt =$$

$$= \begin{cases} \log x & \text{se } a = 1 \\ \frac{x^{1-a} - 1}{1-a} & \text{se } a \neq 1 \end{cases}$$

in $]0, +\infty[$.

(*ii*) Si determino gli $a \in \mathbb{R}$ per cui esiste finito $\lim_{x\to 0^+} y_a(x)$ oppure $\lim_{x\to +\infty} y_a(x)$.

Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} y_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a-1} & \text{se } a < 1 \\ -\infty & \text{se } a \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} y_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Quindi esiste finito $\lim_{x\to 0^+} y_a(x)$ o $\lim_{x\to +\infty} y_a(x)$ se e solo se $a \neq 1$.