Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2014-2015, sessione invernale, I appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di Studi: Ingegneria Industriale ○ Ingegneria Navale ○

ESERCIZIO N. 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si definisca $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo $f_n(x) = nx\exp(-nx)$.

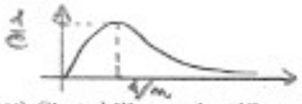
(i) Si determini l'insieme di convergenza puntuale E_p e il limite puntuale f della successione $(f_n)_n$.

$f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} +\infty, & x<0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$; $E_p = [0,+\infty[$; $f(x) = 0$ in E_p

(ii) Si studi, per ogni n, la funzione $|f_n - f|$ in E_p.

$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$ in E_p ; $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$; $f_n(0) = 0$;

$f_n'(x) = n e^{-x}(1-nx)$; $\frac{1}{n}$ è pto di max. ass; $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{e}$



(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $(f_n)_n$ converge uniformemente sull'intervallo $[0,+\infty[$.

$\sup_{[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{e} \not\to 0$, se $n \to +\infty$;

$(f_n)_n$ non conv. unif. in $[0,+\infty[$

(iv) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $(f_n)_n$ converge uniformemente sull'intervallo $[1,+\infty[$.

$\sup_{[1,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = f_n(1) \to 0$, se $n \to +\infty$;

$(f_n)_n$ conv. unif. in $[1,+\infty[$

(v) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.

$\int_0^1 nxe^{-nx}dx = [-xe^{-nx}]_0^1 + \int_0^1 e^{-nx}dx = -e^{-n} - \frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}$;

$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0 = \int_0^1 f(x)\,dx$ (anche se $f_n \overset{u}{\not\to} 0$ in $[0,1]$)

(vi) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx$.

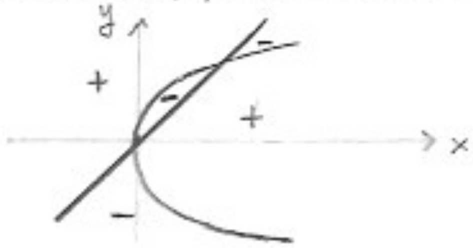
$(f_n)_n$ conv. unif a f in $[1,2]$;

$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx$.

ESERCIZIO N. 2. Si definisca la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ponendo $f(x,y) = x(x-y) + y^2(y-x)$.

(*i*) Si determinino, rappresentandoli nel piano cartesiano, i punti di annullamento e i segni di f.

$f(x,y) = (x-y)(x-y^2)$



(*ii*) Si calcoli il gradiente di f.

$$\nabla f(x,y) = (2x - y - y^2, \; -x - 2xy + 3y^2)^T$$

(*iii*) Si calcoli la matrice Hessiana di f.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1-2y \\ -1-2y & -2x+6y \end{pmatrix}$$

(*iv*) Si determinino i punti critici di f.

$$\begin{cases} 2x - y - y^2 = 0 \\ -x - 2xy + 3y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = y + y^2 \\ y(2y^2 - 3y + 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3}{8} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(*v*) Si studi la natura dei punti critici di f.

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ indef : $(0,0)^T$ pto di sella

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ indef : $(1,1)^T$ pto di sella

$Hf(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 9/4 \end{pmatrix}$ def. pos. : $(\frac{3}{8}, \frac{1}{2})^T$ pto di min.

(*vi*) Si calcolino $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f$.

$\lim_{x \to -\infty} f(0,y) = -\infty$: $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$;

$\lim_{x \to +\infty} f(0,y) = +\infty$: $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$

(*vii*) Si stabilisca, giustificando le riposte, se gli insiemi di livello $L_0 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$ e $L_\pi = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \pi\}$ sono sostegni di curve regolari in forma implicita.

- $(0,0)^T \in L_0$ e $(0,0)^T$ è pto critico : L_0 non è regolare
- $(1,1)^T$, $(\frac{3}{8}, \frac{1}{2})^T \notin L_\pi$ (poiché $f(1,1), f(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{Q}$ e $\pi \notin \mathbb{Q}$)

L_π è regolare

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli la massa del solido

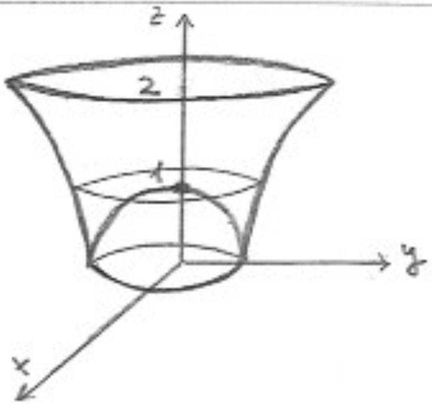
$$E = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1+z^2 \wedge 0 \le z \le 2\right\} \setminus \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1-z^2\right\},$$

avente densità $\mu(x,y,z) = z$.

RISULTATO

$$\frac{23}{4}\pi$$

SVOLGIMENTO



massa $E = \iiint_E z \, dx\, dy\, dz$

Per sezioni:

- $\int_0^1 \left(\iint_{S_z} z \, dx\, dy\, dz \right) = \int_0^1 z\pi\, 2z^2 \, dz = 2\pi \int_0^1 z^3 dz = \frac{\pi}{2}$

  con $S_z = \{(x,y,z)^T : 1-z^2 \le x^2+y^2 \le 1+z^2\}$ se $0 \le z \le 1$.

- $\int_1^2 \left(\iint_{S_z} z \, dx\, dy\, dz \right) = \int_1^2 z\pi(1+z^2)\, dz = \pi \int_1^2 (z+z^3)\, dz = \pi\, \frac{21}{4}$

  con $S_z = \{(x,y,z)^T : x^2+y^2 \le 1+z^2\}$ se $1 \le z \le 2$

- massa $E = \frac{\pi}{2} + \frac{21}{4}\pi = \frac{23}{4}\pi$

COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 4. Si definisca la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ponendo $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1$.

(*i*) Si determini la curva di massima discesa $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$ uscente dal punto $(0, 0)^T$.

$$\nabla f(x,y) = (2x - y + 1, -x + 2y - 1)^T;$$

$$\begin{cases} \gamma'(t) = -\nabla f(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = \underline{0} \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -2x + y - 1 \\ y' = x - 2y + 1 \\ x(0) = 0 = y(0) \end{cases};$$

$$x'' = -2x' + y' = -2x' + x - 2y + 1 = -2x' + x - 2(x' + 2x + 1) + 1 = -4x' - 3x - 1$$

$$x'' + 4x' + 3x = -1 \quad ; \qquad \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \; ; \quad \lambda_1 = -1 \; ; \; \lambda_2 = -3$$

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t} - \frac{1}{3} \\ y(t) = x'(t) + 2x(t) + 1 = -Ae^{-t} - 3Be^{-3t} + 2x(t) + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = A + B - \frac{1}{3} = 0 \\ y(0) = -A - 3B + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3} \right)^T$$

(*ii*) Si calcolino

- $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$

- $\lim_{t \to +\infty} \nabla f(\gamma(t)) = (0, 0)^T$

(*iii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se γ è una curva regolare.

$\gamma'(t) \neq \underline{0}$ per ogni t, per il teorema di Cauchy-Lipschitz (o come si verifica direttamente).