Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2015-2016, sessione estiva, III appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______________________		**NOME** ______________________	
N. Matricola ______________________		**Anno di corso** ______________	
Corso di Studi:	**Ingegneria Industriale** ○		**Ingegneria Navale** ○

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la serie di funzioni complesse

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3-|z-i|)^n}{n\,2^n}.$$

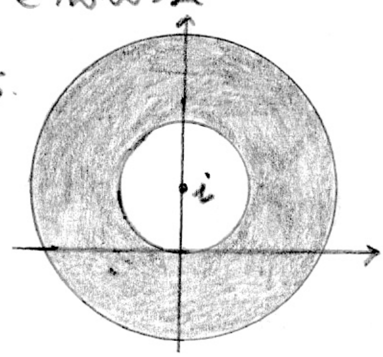
(*i*) Si determini l'insieme di convergenza della serie e lo si rappresenti nel piano di Gauss.

- Poniamo $t = \frac{3-|z-i|}{2}$.
- Si ha che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ converge se e solo se $-1 \leq t < 1$.

Quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3-|z-i|)^n}{n\,2^n}$ converge se e solo se

$-2 \leq 3-|z-i| < 1 \iff 1 < |z-i| \leq 5.$

- $E = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-i| \leq 5\}$



(*ii*) Si determini la somma della serie.

Si ha che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = \int_0^t \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s^{n-1}\right) ds = \int_0^t \frac{1}{1-s}\, ds =$

$= -\left[\log(1-s)\right]_0^t = -\log(1-t)$ se $-1 \leq t < 1$

Quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3-|z-i|)^n}{n\,2^n} = -\log\left(1-\frac{3-|z-i|}{2}\right) = -\log\left(\frac{|z-i|-1}{2}\right)$

se $1 < |z-i| \leq 5$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x, y, z) = x^3 + 2y^2 - xy + z^2$.

(*i*) Si calcoli il gradiente di f.

$$\nabla f(x,y,z) = (3x^2 - y, \; 4y - x, \; 2z)^T$$

(*ii*) Si calcoli la matrice Hessiana di f.

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(*iii*) Si determinino i punti critici di f.

$$\nabla f(x,y,z) = \underline{0} \iff \begin{cases} x = 4y \\ y = 48y^2 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{12} \\ y = \frac{1}{48} \\ z = 0 \end{cases}$$

(*iv*) Si determini la natura dei punti critici di f.

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ indef.} \Rightarrow (0,0,0)^T \text{ pto di sella}$$

$$Hf\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{48}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ def. pos.} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{48}, 0\right) \text{ pto di minimo}$$

(*v*) Si determinino $\inf f$ e $\sup f$.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x,0,0) = +\infty \Rightarrow \sup f = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x,0,0) = -\infty \Rightarrow \inf f = -\infty$

(*vi*) Si stabilisca quali insiemi di livello di f non sono superfici regolari in forma implicita.

$L_k = \{(x,y,z)^T : f(x,y,z) = k\}$ non è sup. regolare in f.i. se e solo se $k = f(0,0,0) \vee k = f\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{48}, 0\right)$

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli la massa del solido $E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 + z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 + z\}$, avente densità $\mu(x, y, z) = 1 + z$.

RISULTATO

$$\frac{\pi}{4}$$

SVOLGIMENTO

Da $1+z^2 \leq 1+z$ segue $0 \leq z \leq 1$. Posto per ogni $z \in [0,1]$

$$S_z = \{(x,y,z)^T : 1+z^2 \leq x^2+y^2 \leq 1+z\},$$

si ha, integrando per sezioni,

$$\iiint_E (1+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\iint_{S_z} (1+z)\,dx\,dy \right) dz =$$

$$= \int_0^1 (1+z)\,\pi(1+z-1-z^2)\,dz =$$

$$= \pi \int_0^1 (z-z^3)\,dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definito da

$$g(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)^T.$$

(*i*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se g è conservativo in $\mathbb{R}^3$.

Poiché

$$\operatorname{rot} g = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & x+y & x+y+z \end{vmatrix} = 1\cdot \underline{e}_1 - 1\cdot \underline{e}_2 - 1 \cdot \underline{e}_3 \neq \underline{0},$$

g è irrotazionale e quindi non è conservativo.

(*ii*) Si determini la linea di campo $\gamma(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))^T$ passante per il punto $(1, 0, 0)^T$ *(cioè la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \gamma'(t) = g(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (1, 0, 0)^T. \end{cases}\Bigg)$$

$$\begin{cases} \gamma'(t) = g(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (1,0,0)^T \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x \\ y' = x + y \\ z' = x + y + z \\ x(0) = 1, \ y(0) = 0, \ z(0) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = e^t \\ y' = y + e^t \\ z' = y + z + e^t \\ y(0) = 0, \ z(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = e^t \\ y = te^t \\ z = z + e^t + te^t \\ z(0) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = te^t \\ z = \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)e^t \end{cases}$$

Dunque $\gamma(t) = \left(e^t, te^t, \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)e^t\right)^T, \quad t \in \mathbb{R}$