Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2016-2017, sessione estiva, III appello
Corso prof. P. Omari

COGNOME ______		**NOME** ______	
N. Matricola ______		**Anno di corso** ______	
Corso di Studi:	**Ingegneria Industriale** ○	**Ingegneria Navale** ○	

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz+2)^n}{n+1}$, con $z \in \mathbb{C}$.

(*i*) Si determini il raggio di convergenza della serie.

- $\frac{|iz+2|^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{|iz+2|^n} = \frac{n+1}{n+2}|iz+2| \longrightarrow |iz+2|$, se $iz+2 \neq 0$;
- per il criterio del rapporto, la serie
  - converge assolutamente se $|iz+2| = |z-2i| < 1$
  - non converge se $|z-2i| > 1$

  $\Rightarrow R = 1$

(*ii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie converge nei punti $z = i$ o $z = 3i$.

- $z = i$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge (serie armonica);
- $z = 3i$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge (criterio di Leibniz).

(*iii*) Si stabilisca se l'insieme di convergenza della serie è

- aperto: no
- chiuso: no
- limitato: sì

(*iv*) Detta $f(z)$ la somma della serie, se ne determini l'espressione esplicita per $z = it$, con $t \in]1,3]$.

- $f(it) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t+2)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t-2)^n}{n+1} = \frac{1}{t-2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t-2)^{n+1}}{n+1}$, se $t \neq 2$;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{s^{n+1}}{n+1} = \log(1+s)$, se $-1 < s \leq 1$;
- $f(it) = \begin{cases} \frac{1}{t-2} \log(t-1), & \text{se } 1 < t \leq 3,\ t \neq 2; \\ 1, & \text{se } t = 2. \end{cases}$

ESERCIZIO N. 2. Posto $E = [-2, 2] \times \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : E \to \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy^2$.

(*i*) Si provi che $f(x, y) \geq 0$ in E.

Essendo $(-2 \leq) x \leq 2$, si ha

$f(x,y) = x^2 + y^2(2-x) \geq 0$ in E.

(*ii*) Si calcoli $\nabla f(x, y)$.

$\nabla f(x,y) = (2x - y^2, 4y - 2xy)^T$

(*iii*) Si calcoli $Hf(x, y)$.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2y \\ -2y & 4-2x \end{pmatrix}$$

(*iv*) Si determinino gli estremi relativi di f nell'interno di E.

- $\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} y^2 = 2x \\ y(2-x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$
- $(0,0)^T \in \operatorname{int} E$, $(2,-2)^T, (2,2)^T \notin \operatorname{int} E$
- $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ def. pos. $\Rightarrow$ $(0,0)^T$ pto di min. rel.

(*v*) Si determinino gli estremi relativi e assoluti di f sulla frontiera di E.

- $f(2,y) = 4$ è costante;
- $f(-2,y) = 4 + 4y^2$ ha min. ass. per $y = 0$;
- $\min\limits_{\operatorname{fr} E} f = 4$; $\sup\limits_{\operatorname{fr} E} f = \sup\limits_{\mathbb{R}} f(-2,y) = +\infty$.

(*vi*) Si determinino $\inf\limits_E f$ e $\sup\limits_E f$, specificando se sono minimo o massimo.

- $f(x,y) \geq 0$ in E e $f(0,0) = 0 \Rightarrow \min\limits_E f = 0$;
- $\sup\limits_E f \geq \sup\limits_{\operatorname{fr} E} f = +\infty$.

COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola ______________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga $E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 - 2 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

(i) Si calcoli il volume di E. Posto $D = \{(x,y)^T : x^2+y^2 \leq 1\}$, si ha

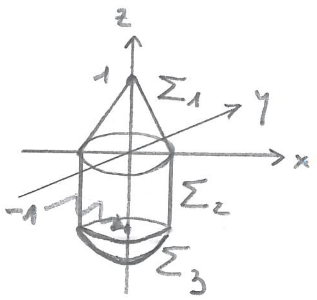
$$m_3(E) = \iiint_E 1\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2-2}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} 1\,dz \right) dx\,dy$$

$$= \iint_D (1 - \sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2 + 2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (3 - \rho - \rho^2)\rho\,d\rho \right) d\vartheta$$

$$= 2\pi \left[\frac{3}{2}\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{11}{6}\pi.$$



(ii) Si calcoli l'area della frontiera di E.

- $A(\mathrm{fr}\, E) = A(\Sigma_1) + A(\Sigma_2) + A(\Sigma_3)$
- $A(\Sigma_1) = \pi\sqrt{2}$
- $A(\Sigma_2) = 2\pi$
- $A(\Sigma_3) = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\,dx\,dy$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho \right) d\vartheta$$

$$= 2\pi \frac{1}{12} \left[(1+4\rho^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right)$$

ESERCIZIO N. 4. Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' - y = e^{-x} + \sin(2x)$ che sono limitate su $[0, +\infty[$.

RISULTATO

$y(x) = Ae^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{5}\sin(2x)$, $A \in \mathbb{R}$

SVOLGIMENTO

- $z'' - z = 0$;

  $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda = \pm 1$;

  $z(x) = Ae^{-x} + Be^{x}$, $A, B \in \mathbb{R}$;

- $y'' - y = e^{-x}$

  $\bar{y}_1(x) = Cxe^{-x}$ è sol. $\iff$ $C = -\frac{1}{2}$

- $y'' - y = \sin(2x)$

  $\bar{y}_2(x) = C\sin(2x)$ è sol. $\iff$ $C = -\frac{1}{5}$

- $y'' - y = e^{-x} + \sin(2x)$

  $y(x) = Ae^{-x} + Be^{x} - \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{5}\sin(2x)$

- $y(x)$ è limitata su $[0, +\infty[$ $\iff$ $B = 0$