Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2014-2015, sessione estiva, II appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________

Corso di Studi: **Ingegneria Industriale** ◯ **Ingegneria Navale** ◯

ESERCIZIO N. 1. Si definisca, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ponendo $f_n(x) = \dfrac{x}{n} - \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

(i) Si provi che la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $\varphi(t) = t - \sin t$, è non-decrescente.

(ii) Si determini $\mathrm{ord}_0 \varphi$.

(iii) Si determini l'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

(iv) Si stabilisca se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente sull'intervallo $[0, 1]$.

(v) Si stabilisca se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente sull'intervallo $[1, +\infty[$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $g(x, y) = e^x + x - y^2 + 2y - 2$.

(i) Si provi che $\Gamma = \{(x, y)^T : g(x, y) = 0\}$ è il sostegno di una curva regolare in forma implicita.

(ii) Si provi che la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x) = e^x + x$ è invertibile.

(iii) Si provi che esiste una funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\Gamma = \{(x, y)^T : x = h(y)\}$.

(iv) Si determinino i punti di Γ aventi ascissa minima.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Siano $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da

$$g(x, y) = (\sin x - y + y^2 \sin x, \cos y + x - 2y \cos x)^T$$

e $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ le curve definite da

$$\gamma_1(t) = (t, 0)^T \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (t \cos t, t \sin t)^T.$$

(i) Si calcoli, usando le coordinate polari, l'area del dominio limitato D avente come frontiera i sostegni delle curve γ_1 e γ_2.

(ii) Si calcoli $\displaystyle\int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle \, ds$.

(iii) Si calcoli rot $g(x, y)$.

(iv) Si calcoli, usando il teorema del rotore, $\displaystyle\int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle \, ds$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{a}{x} y' = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(i) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si determini la soluzione $y_a(\cdot)$ del problema di Cauchy

(ii) Si determino gli $a \in \mathbb{R}$ per cui esiste finito $\lim_{x \to 0^+} y_a(x)$ oppure $\lim_{x \to +\infty} y_a(x)$.