Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2015-2016, sessione invernale, I appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di Studi: **Ingegneria Industriale** ◯ **Ingegneria Navale** ◯

ESERCIZIO N. 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si definisca $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ponendo $f_n(x) = \frac{nx^{10}}{n+x}$.

(i) Si determini l'insieme di convergenza puntuale E_p e il limite puntuale f della successione $(f_n)_n$.

(ii) Si studi, per ogni n, la funzione $|f_n - f|$ in E_p.

(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $(f_n)_n$ converge uniformemente sull'intervallo $[0, +\infty[$.

(iv) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $(f_n)_n$ converge uniformemente sull'intervallo $[0, 10]$.

(v) Si calcoli, giustificando la risposta, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{10} f_n(x)\,dx$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2y + 2.$

(i) Si calcoli il gradiente $\nabla f(x,y)$.

(ii) Si determinino i punti critici di f.

(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $(0,0)^T$ è un punto di estremo relativo per f.

(iv) Si calcoli la matrice Hessiana $Hf(x,y)$.

(v) Si stabilisca la natura degli altri punti critici di f.

(vi) Si provi che esiste $\min\limits_{\mathbb{R}^2} f$ e lo si calcoli.

(vii) Si determini $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f$.

($viii$) Si determinino gli insiemi di livello $L_k(f) = \{(x,y)^T : f(x,y) = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$, che non sono curve regolari in forma implicita.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si definisca $\varphi : K = [-1,1] \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)^T.$$

(i) Si provi che φ è iniettiva in K.

(ii) Si provi che $\|\varphi_u \times \varphi_v\| \neq 0$ in K.

(iii) Si calcoli l'area della superficie $\Sigma = \varphi(K)$.

(iv) Si calcoli il volume del solido E, avente diametro finito, delimitato dalla superficie Σ e dai piani $z = -1$ e $z = 1$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$g(x, y) = (2x - y - 1, y + 1)^T.$$

(i) Si determini la rappresentazione parametrica delle linee di campo passanti per i punti del semiasse positivo delle ordinate.

(ii) Si determini una rappresentazione cartesiana di tali curve e si descriva geometricamente il loro sostegno.