Università degli Studi di Trieste
Corsi di Studi in Ingegneria Industriale e in Ingegneria Navale

Programma del corso di Analisi Matematica II - 9 CFU (041IN)
A. a. 2016-2017
Prof. Pierpaolo Omari

Serie numeriche Motivazioni ed esempi. Serie di numeri reali. Termine generale e somme parziali (ridotte). Serie convergenti, divergenti, indeterminate. La serie geometrica e suo carattere (con dim.). La serie armonica e suo carattere (con dim.). La serie di Mengoli e suo carattere (con dim.). Serie telescopiche. Condizione necessaria per la convergenza: il termine generale dev'essere infinitesimo (con dim.). Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza: il criterio di Cauchy. Serie resto e suo carattere. Funzione a gradino associata a una serie. Relazioni tra serie e integrali generalizzati (con dim.). Stime della somma e stime d'errore. Serie a termini positivi. Aut-aut per le serie a termini positivi (con dim.). Serie armonica generalizzata e suo carattere (con dim.). Criterio del confronto (con dim.). Criterio dell'ordine d'infinitesimo (con dim.). Criterio del rapporto (con dim.). Criterio del rapporto con il limite (con dim.). Criterio della radice (con dim.). Criterio della radice con il limite. Serie con i termini di segno misto. Serie assolutamente e semplicemente convergenti. La convergenza assoluta implica la convergenza (con dim.). Serie con i termini di segno alternato. Criterio di Leibniz (con dim.). Operazioni con le serie: combinazione lineare. Serie di numeri complessi: convergenza, convergenza delle parti reale e immaginaria, convergenza assoluta.

Successioni e serie di funzioni Motivazioni ed esempi. Il problema della sviluppabilità in serie di Taylor e di Fourier. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale di una successione di funzioni. Convergenza uniforme di una successione di funzioni. Continuità del limite uniforme di una successione di funzioni (con dim.). Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata. Serie di funzioni. Convergenza puntuale e uniforme. Condizione necessaria per la convergenza uniforme di una serie di funzioni. Criterio di Cauchy, criterio di Weierstrass e criterio di Leibniz per la convergenza uniforme di una serie di funzioni. Rilettura dei teoremi di passaggio al limite nel caso delle serie. Serie di potenze in $\mathbb{R}$. Esempi preliminari. Lemma di Abel (con dim.). Insieme di convergenza. Raggio di convergenza. Proprietà caratteristiche del raggio di convergenza (con dim.). Struttura dell'insieme di convergenza. Proprietà della funzione somma. Teorema di integrazione a termine a termine (con dim.). Teorema di derivazione a termine a termine. Conseguenze e applicazioni. Sviluppabilità in serie di Taylor in $\mathbb{R}$. La somma di una serie di potenze è sviluppabile in serie di Taylor. Esempio di una funzione di classe C^∞ che non è sviluppabile in serie di Taylor. Condizioni sulle derivate per la sviluppabilità in serie di Taylor in $\mathbb{R}$ (con dim.). Funzioni analitiche in $\mathbb{R}$. Sviluppo in serie di Taylor-Maclaurin delle principali funzioni elementari: $e^x, \sin x, \cos x, \sinh x, \cosh x, (1+x)^\alpha, \log(1+x), \mathrm{arctg} x$. Funzioni complesse di variabile complesssa: limiti, continuità e derivabilità. Serie di potenze in $\mathbb{C}$. Esempi preliminari. Insieme di convergenza. Raggio di convergenza. Proprietà caratteristiche del raggio di convergenza. Cerchio di convergenza. Proprietà della funzione somma. Teorema di derivazione a termite a termine. La somma di una serie di potenze è sviluppabile in serie di Taylor. Funzioni olomorfe e funzioni analitiche in $\mathbb{C}$. Le funzioni $\exp z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$ in $\mathbb{C}$. Proprietà di $\exp z$: $\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w$, le formule di Eulero (con dim.), periodicità, additività . Derivate di $\exp z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$. L'equazione esponenziale in $\mathbb{C}$. Il logaritmo complesso e sue proprietà . La potenza con esponente complesso.

Lo spazio $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ Struttura metrica di $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$: la distanza euclidea in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Proprietà della distanza. Spazio metrico. Le distanze d_p, con $1 \leq p \leq \infty$, in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ e in $C^0([a,b],\mathbb{R})$. Sfere aperte e chiuse. Intorni. Proprietà degli intorni. Punti di accumulazione, punti aderenti, punti interni e punti di frontiera. Chiusura di un insieme e insiemi chiusi. Interno di un insieme e insiemi aperti. Frontiera di un insieme. Insiemi limitati. Funzioni da $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ in $\mathbb{R}^{\mathrm{M}}$. Campi scalari. Insiemi di livello. Curve parametriche. Superfici parametriche. Campi vettoriali. Limiti e continuità di funzioni fra spazi metrici; in particolare per funzioni da $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ in $\mathbb{R}^{\mathrm{M}}$. Insiemi connessi per archi in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Teorema di connessione. Teorema degli zeri (con dim.). Insiemi compatti in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Teorema di compattezza. Teorema di Weierstrass (con dim.). Struttura lineare di $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Prodotto scalare in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Proprietà del prodotto scalare. Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz (con dim.). Angolo fra due vettori in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Teorema di Pitagora (con dim.). Spazio dotato di prodotto scalare. Il prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ in $C^0([a,b],\mathbb{R})$. Norma euclidea in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Proprietà della norma (con dim.). Spazio normato. Le norme $\|\cdot\|_p$, con $1 \leq p \leq \infty$, in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ e in $C^0([a,b],\mathbb{R})$. Applicazioni lineari da $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ in $\mathbb{R}^{\mathrm{M}}$. Applicazioni lineari e matrici associate. Teorema di Riesz in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ (con dim.).

Integrale di Riemann in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ Motivazioni. Rettangoli in $\mathbb{R}^2$. Decomposizioni. Somme inferiori e superiori e relative proprietà. Funzioni integrabili secondo Riemann su un rettangolo. Interpretazione geometrica. Formule di riduzione per gli integrali doppi. Teorema di Fubini. Parallelepipedi rettangoli in $\mathbb{R}^3$. Decomposizioni. Somme inferiori e superiori e relative proprietà. Funzioni integrabili secondo Riemann su un parallelepipedo. Formule di riduzione per gli integrali tripli: per corde e per sezioni. Teorema di Fubini. N-rettangoli in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Applicazioni al calcolo di masse, momenti d'inerzia, potenziali gravitazionali ed elettrici. Una condizione sufficiente per l'integrabilità su un rettangolo: la continuità. Proprietà dell'integrale: linearità, monotonia, teorema del valore assoluto, integrabilità del prodotto, teorema della media, integrabilità della restrizione, additività rispetto al dominio. Integrale di una funzione limitata su un insieme limitato. Misura secondo Peano-Jordan. Insiemi misurabili. Proprietà della misura: additività e monotonia (con dim.). Insiemi di misura nulla e loro caratterizzazione. Il grafico di una funzione integrabile su un $N-$rettangolo ha misura nulla (con dim. se $N = 1$). Una condizione sufficiente per l'integrabilità di una funzione limitata su un rettangolo: la continuità a meno di un insieme di misura nulla. Caratterizzazione degli insiemi misurabili per mezzo della loro frontiera. Una funzione continua su insieme chiuso e misurabile è integrabile (con dim.). Funzioni integrabili che differiscono su un insieme di misura nulla hanno lo stesso integrale. Insiemi normali in $\mathbb{R}^2$. Proprietà dell'integrale su insiemi misurabili. Ogni insieme normale è chiuso e misurabile (con dim.). Formula di riduzione per gli integrali doppi su insiemi normali (con dim.). Insiemi normali in $\mathbb{R}^3$. Ogni insieme normale è chiuso e misurabile. Formula di riduzione per corde per gli integrali tripli. Insiemi sezionabili in $\mathbb{R}^3$. Formula di riduzione per sezioni per gli integrali tripli. Volumi di solidi di rotazione: I formula di Pappo-Guldino. Cambio di variabili negli integrali multipli: riesame del caso unidimensionale. Trasformazioni lineare di coordinate in $\mathbb{R}^2$. Cambiamento di variabili negli integrali doppi. Coordinate polari ed ellittiche in $\mathbb{R}^2$. Cambiamento di variabili negli integrali tripli. Trasformazioni lineare di coordinate. Coordinate sferiche ed ellissoidali in $\mathbb{R}^3$. Integrali generalizzati in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Insiemi localmente misurabili e funzioni localmente integrabili. Integrale generalizzato di una funzione di segno costante. Indipendenza dalla particolare successione invadente. Integrale generalizzato di una funzione di segno qualunque. Una funzione è integrabile in senso generalizzato se e solo se lo è il suo valore assoluto. Insiemi misurabili e misura in senso generalizzato.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ Motivazioni. Derivate direzionali e parziali per campi scalari e vettoriali. Esempi di funzioni discontinue in un punto dotate di derivate direzionali in quel punto. Differenziale di un campo scalare. Approssimante lineare. Piano tangente e sua equazione. La differenziabilità implica la continuità (con dim.). La differenziabilità implica l'esistenza di tutte le derivate direzionali (con dim.). Rappresentazione del differenziale per mezzo della matrice Jacobiana (campi scalari). Gradiente. Proprietà del gradiente: il gradiente individua la direzione orientata di massimo incremento (con dim.) e il gradiente è ortogonale agli insiemi di livello. Una condizione sufficiente per la differenziabilità: teorema del differenziale totale (con dim.). Funzioni di classe C^1. Regole algebriche di differenziazione. Differenziale di funzioni a valori vettoriali. Una funzione a valori vettoriali è differenziabile se e solo se lo sono tutte le sue componenti. Rappresentazione del differenziale per mezzo della matrice Jacobiana (campi vettoriali). Differenziazione della funzione composta: esame di alcuni casi particolari. Teorema del valor medio (con dim.). Funzioni con gradiente nullo su un aperto connesso. Derivate direzionali e parziali di ordine superiore. Funzioni di classe C^k. Teorema di Schwarz. Forme lineari e quadratiche. Differenziale secondo di un campo scalare. Matrice Hessiana. Teorema di Young (sulla simmetria della matrice Hessiana). Una condizione sufficiente affinchè una funzione sia due volte differenziabile (con dim.). Formula di Taylor del secondo ordine (con dim.). Estremi relativi e assoluti. Test delle derivate prime (o del gradiente) per i punti di estremo (con dim.). Punti critici. Punti di sella. Forme quadratiche definite positive, definite negative, o indefinite nel segno. Criterio degli autovalori e criterio di Sylvester. Criteri di definitezza nel caso $N = 2$. Test delle derivate seconde (o della matrice Hessiana) per i punti di estremo (con dim.). Funzioni implicitamente definite. Teorema della funzione implicita (di Dini) in $\mathbb{R}^2$. Curve regolari in forma implicita in $\mathbb{R}^2$. Retta tangente e retta normale. Superfici e curve regolari in forma implicita in $\mathbb{R}^3$. Vincoli. Punti di estremo vincolato. Una condizione necessaria affinchè un punto sia di estremo vincolato su una curva o una superficie in forma parametrica (con dim.). Interpretazione geometrica. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^2$ (curve) (con dim.) e in $\mathbb{R}^3$ (superfici e curve). Interpretazione geometrica. Teorema di derivazione sotto il segno d'integrale.

Curve in $\mathbb{R}^N$ Curve in forma parametrica: rappresentazione parametrica e sostegno. Curve chiuse. Curve semplici. Curve regolari: vettore e versore tangente. Retta tangente ad una curva regolare semplice. Curve regolari in forma cartesiana. Curve regolari in forma polare. Curve regolari in forma implicita in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$. Curve rettificabili e lunghezza di una curva. Rettificabilità di una curva di classe C^1 (con dim.). Formula per il calcolo della lunghezza di una curva di classe C^1. Lunghezza di una curva in forma cartesiana. Lunghezza di una curva in forma polare. Curve equivalenti. Orientazione di curve equivalenti. Il versore tangente di curve equivalenti. Lunghezza di curve equivalenti. Integrale di linea di un campo scalare. Indipendenza dalla rappresentazione parametrica. Interpretazione geometrica. Applicazione al calcolo di masse, baricentri e momenti d'inerzia.

Superfici in $\mathbb{R}^3$ Superfici regolari semplici in forma parametrica: parametrizzazione e sostegno. Linee coordinate. Vettore normale e piano tangente. Superfici regolari in forma cartesiana. Superfici regolari in forma implicita. Superficie regolari cilindriche. Superfici regolari di rotazione. Area di un parallelogramma. Area di una superficie regolare semplice. Area di una superficie cartesiana, di una superficie cilindrica e di una superficie di rotazione: II formula di Pappo-Guldino. Integrale di superficie di un campo scalare e di un campo vettoriale.

Analisi vettoriale Campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$. Integrale di linea di un campo vettoriale. Dipendenza nel segno dalla rappresentazione parametrica. Interpretazione meccanica. La notazione delle forme differenziali. Linee di campo. Campi vettoriali conservativi. Potenziali. Una generalizzazione del teorema di Torricelli per il calcolo dell'integrale curvilineo di un campo conservativo (con dim.). Teorema di conservazione dell'energia meccanica. Caratterizzazione dei potenziali su un aperto connesso (con dim.). Circuitazione di un campo. Campi conservativi e campi a circuitazione nulla. Il rotore di un campo in $\mathbb{R}^3$. Il rotore di un campo in $\mathbb{R}^2$. Rotore e campi conservativi. Campi irrotazionali. Un esempio di campo irrotazionale non conservativo. Insiemi stellati. Lemma di Poincaré sulla caratterizzazione dei campi conservativi su un aperto stellato. La divergenza di un campo vettoriale. Teorema della curva di Jordan. Domini regolari in $\mathbb{R}^2$. Orientazione positiva della frontiera di un dominio regolare e versore normale esterno. Teorema del rotore (di Stokes) in $\mathbb{R}^2$. (dim. nel caso dei domini normali). Formula di Green. Flusso di un campo vettoriale attraverso la frontiera di un dominio regolare in $\mathbb{R}^2$. Teorema della divergenza (di Gauss) in $\mathbb{R}^2$ (con dim.). Significato del rotore e della divergenza di un campo di velocità. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie regolare semplice. Il teorema del rotore in $\mathbb{R}^3$. Domini regolari in $\mathbb{R}^3$. Versore normale esterno. Il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$.

Equazioni differenziali Equazioni differenziali e modelli matematici. Derivazione di un modello matematico da principi generali e da leggi costitutive. Derivazione dell'equazione del trasporto e sua risoluzione. Modelli di decadimento di una sostanza radioattiva, raffreddamentro di un corpo, dinamica di popolazioni in ecosistemi, diffusione di epidemie, dinamica del punto materiale, circuiti elettrici. Equazioni funzionali. Equazioni differenziali ordinarie (EDO) e alle derivate parziali (EDP). Esempio di un'EDP: equazione del trasporto in dimensione spaziale 1 e sua risoluzione. Ordine di un'equazione differenziale. EDO in forma normale. EDO scalari del primo ordine (in forma normale). Definizione di soluzione. Campo vettoriale associato ad un'EDO del primo ordine, curve associate alle soluzioni e relative proprietà. Problema di Cauchy (o ai valori iniziali). Soluzione di un problema di Cauchy. Esempi di non esistenza. Esempi di non unicità. Esempi di non esistenza globale. Teorema di esistenza locale (di Peano). Teorema di esistenza e unicità locale (di Cauchy-Picard). Lemma di prolungamento. Un teorema di esistenza globale sotto condizione di sottolinearità. Equazioni con variabili separate: metodo risolutivo (con dim.). Studio qualitativo delle soluzioni di un'EDO. Equazioni nonlineari ed equazioni linearizzate: metodo di linearizzazione. Confronto fra le rispettive soluzioni (con dim.). EDO del primo ordine scalari omogenee e non omogenee (o complete). Applicazione lineare associata. Struttura dell'insieme delle soluzioni della completa (con dim.). Struttura dell'insieme delle soluzioni dell'omogenea (con dim.). Determinazione di una soluzione particolare della completa: metodo della variazione delle costanti (con dim.). Principio di sovrapposizione (con dim.). L'equazioni di Bernoulli: metodo risolutivo (con dim.). Sistemi di EDO del primo ordine di dimensione N (in forma normale). Definizione di soluzione. Problema di Cauchy. Teoremi di esistenza e unicità locali e globali. Sistemi di EDO lineari del primo ordine di dimensione N: omogenei e non omogenei (o completi). Applicazione lineare associata. Struttura dell'insieme delle soluzioni del completo. L'insieme delle soluzioni dell'omogeneo è uno spazio vettoriale di dimensione N (con dim.). Matrice risolvente. Determinazione di una soluzione particolare del completo: metodo della variazione delle costanti. Determinazione di una base dell'insieme delle soluzioni di un sistema di EDO lineari del primo ordine omogeneo a coefficienti costanti: il caso degli autovalori semplici. Il sistema di Lotka-Volterra (con prelievo e senza prelievo): studio qualitativo delle soluzioni. EDO scalari del secondo ordine (in forma normale). Definizione di soluzione. Problema di Cauchy. Teorema di esistenza e unicità locale e di esistenza globale. Equazioni di Newton autonome e conservative: risoluzione con il metodo dell'energia (con dim.). Applicazioni: velocità di fuga da un pianeta, l'equazione del paracadutista. EDO lineari del secondo ordine scalari con coefficienti costanti omogenee e non omogenee (o complete). Applicazione lineare associata. Struttura dell'insieme delle soluzioni della completa. Equazione caratteristica. Struttura dell'insieme delle soluzioni dell'omogenea e determinazione di una base. Determinazione di una soluzione particolare della completa: metodo del nucleo risolvente. Metodo di somiglianza. Principio di sovrapposizione. Sistemi di EDO lineari del primo ordine di dimensione 2 con coefficienti costanti: risoluzione per mezzo di una riduzione a un'equazione del secondo ordine. EDO lineari di ordine N scalari con coefficienti costanti omogenee e non omogenee (o complete). Equazione caratteristica. Struttura dell'insieme delle soluzioni dell'omogenea e determinazione di una base. Struttura dell'insieme delle soluzioni della completa. Determinazione di una soluzione particolare della completa: metodo del nucleo risolvente. Metodo di somiglianza. Principio di sovrapposizione. Equazioni di Eulero del secondo ordine e applicazioni.

BIBLIOGRAFIA

- E. Giusti, Analisi matematica 2, Bollati-Boringhieri, Torino, 2003.
- C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica, vol. 2, Masson, Milano, 1991.
- V. Barutello, M. Conti, D. L. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, Analisi matematica, vol. 2, Apogeo, Milano, 2008.

Trieste, 21.12.2016