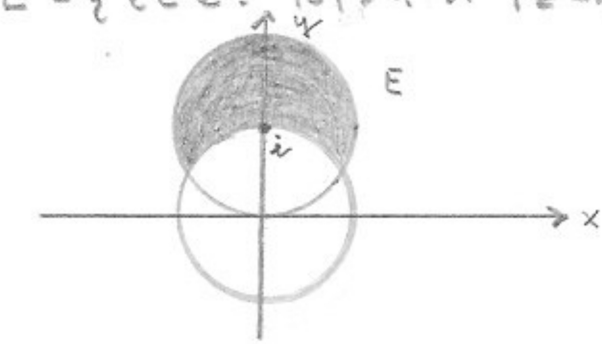
**Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi**
**A.a. 2015-2016, sessione invernale, III appello**
**Corso prof. Omari**

| | |
|---|---|
| **COGNOME** ______ | **NOME** ______ |
| **N. Matricola** ______ | **Anno di corso** ______ |
| **Corso di Studi:** **Ingegneria Industriale** ○ | **Ingegneria Navale** ○ |

**ESERCIZIO N. 1.** Si consideri la serie di funzioni complesse $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{i}{z^n}+(z-i)^n\right)$.

(*i*) Si determini un insieme $E \subset \mathbb{C}$ dove la serie converge e lo si rappresenti nel piano di Gauss.

- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i}{z^n}$ converge se e solo se $|z|>1$.
- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (z-i)^n$ converge se e solo se $|z-i|<1$.
- La serie somma $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{i}{z^n}+(z-i)^n\right)$ converge se $z \in E = \{z \in \mathbb{C} : |z|>1 \wedge |z-i|<1\}$.




(*ii*) Si calcoli la somma della serie in $E$.

Si ha:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i}{z^n} = \frac{i}{1-\frac{1}{z}} - i = \frac{i}{z-1}$ se $|z|>1$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} (z-i)^n = \frac{1}{1-z+i} - 1 = \frac{z-i}{1-z+i}$ se $|z-i|<1$

Quindi

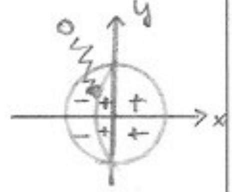
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{i}{z^n}+(z-i)^n\right) = \frac{i}{z-1} + \frac{z-i}{1-z+i} \quad \text{se } z \in E.$$

**ESERCIZIO N. 3.** Si consideri la funzione $f(x,y) = x + \sqrt{1-x^2-y^2}$.

($i$) Si determini il dominio di $f$.

$$\mathrm{dom} f = \{(x,y)^T : x^2+y^2 \le 1\}$$

($ii$) Si determinino i segni di $f$.



Per ogni $(x,y)^T \in \mathrm{dom} f$ :

- $f(x,y) \ge 0$ se $x \ge 0 \vee (x<0 \wedge 2x^2+y^2 \le 1)$
- $f(x,y) \le 0$ se $x \le 0 \wedge 2x^2+y^2 \ge 1$

($iii$) Si calcoli il gradiente di $f$.

$$\nabla f(x,y) = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^T \quad \text{se } x^2+y^2<1$$

($iv$) Si calcoli la matrice Hessiana di $f$.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & \frac{-xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \\ \frac{-xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & \frac{x^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \quad \text{se } x^2+y^2<1$$

($v$) Si determinino i punti critici di $f$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0)^T \iff \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = x \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge 0 \\ 1-2x^2=0 \\ y=0 \end{cases} \quad : \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$$

($vi$) Si stabilisca la natura dei punti critici di $f$.

$$Hf\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(1/2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1/2}{(1/2)^{3/2}} \end{pmatrix} \text{ def. neg. } : \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T \text{ pto di max. relativo}$$

($vii$) Si determinino il massimo e il minimo assoluti di $f$.

Per il teor. di Weierstrass, esistono min $f$ e max $f$. Si ha:

- in int(dom $f$) : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$ pto di max.
- su fr(dom $f$) : $f(x,y) = x$ con $x \in [-1,1] \Rightarrow (-1,0)^T$ pto di min. e $(1,0)^T$ pto di max.

In conclusione:

$$\min f = f(-1,0) = -1 \; ; \quad \max f = f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

**COGNOME e NOME** ______________________________ **N. Matricola** ____________

**ESERCIZIO N. 3.** Si stabilisca se è finito l'integrale generalizzato

$$\iint_E \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

con $E = \{(x,y)^T : (x-1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y)^T : x^2 + y^2 > 4\}$.

**RISULTATO**

Non è finito.

**SVOLGIMENTO**

Poniamo:

$E_1 = \{(x,y)^T : (x-1)^2 + y^2 < 1\}$, $E_2 = \{(x,y)^T : x^2 + y^2 > 4\}$

e, per ogni $n$, $A_n = \{(x,y)^T : 4 < x^2 + y^2 < n^2\}$.

Si ha:

$$\iint_{E_1 \cup A_n} \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{E_1} \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy + \iint_{A_n} \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$\geq \iint_{A_n} \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_2^n \frac{\rho^2 \sin^2\vartheta}{\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\vartheta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\,d\vartheta\right)\cdot\left(\int_2^n \rho\,d\rho\right) =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\,d\vartheta\right)\cdot \frac{1}{2}(n^2-4) \to +\infty,$$

se $n \to +\infty$, essendo $\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\,d\vartheta > 0$.

**ESERCIZIO N. 4.** Si indichi con $y(\cdot)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -xy^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(*i*) Si provi che $y(x) > 0$ per ogni $x$ del suo dominio.

La fne $y_1(\cdot) = 0$ è un equilibrio dell'equazione $y' = -xy^2$. Per il teorema di unicità, dato $y(0) > 0$, dev'essere $y(x) > 0$ per ogni $x \in \operatorname{dom} y(\cdot)$.

(*ii*) Si determinino gli intervalli di crescenza e di decrescenza di $y(\cdot)$.

- $x \in \operatorname{dom} y(\cdot) \cap \mathbb{R}^- \Rightarrow y'(x) > 0 \Rightarrow y(\cdot)$ crescente
- $x \in \operatorname{dom} y(\cdot) \cap \mathbb{R}^+ \Rightarrow y'(x) < 0 \Rightarrow y(\cdot)$ decrescente
- $0$ è pto di max. assoluto

(*iii*) Si provi che $y(x) \leq 1$ per ogni $x$ del suo dominio.

Poichè $0$ è pto di max. assoluto e $y(0) = 1$, si ha $y(x) \leq 1$ per ogni $x \in \operatorname{dom} y(\cdot)$

(*iv*) Si provi che $y(\cdot)$ è definita su $\mathbb{R}$.

Poichè $0 < y(x) \leq 1$ per ogni $x \in \operatorname{dom} y(\cdot)$, il lemma di prolungamento implica che $\operatorname{dom} y(\cdot)$ non può essere inferiormente o superiormente limitato, e quindi $\operatorname{dom} y(\cdot) = \mathbb{R}$.

(*v*) Si determini l'espressione esplicita di $y(\cdot)$.

Essendo $y(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{x^2}{2} = \int_0^x t\,dt = \int_0^x -\frac{y'(t)}{y^2(t)}\,dt = \int_{y(0)=1}^{y(x)} -\frac{1}{s^2}\,ds = \left[\frac{1}{s}\right]_1^{y(x)} = \frac{1}{y(x)} - 1$$

e quindi

$$\frac{1}{y(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} \iff y(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2}}$$

$$\iff y(x) = \frac{2}{2 + x^2}.$$