Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2015-2016, sessione invernale, II appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di Studi: **Ingegneria Industriale** ○ **Ingegneria Navale** ○

ESERCIZIO N. 1. Per ogni $z \in \mathbb{C}$, si definisca $f(z) = \begin{cases} \exp(-z^2) + \frac{i}{z} \sin z & \text{se } z \neq 0, \\ 1+i & \text{se } z = 0. \end{cases}$

(*i*) Si determini lo sviluppo in serie di Taylor di f con punto iniziale $z_0 = 0$.

Per ogni $w \in \mathbb{C}$, si ha

$$e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \quad \text{e} \quad \sin w = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e quindi, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!} \quad \text{e} \quad \frac{i}{z} \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n i \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

In conclusione, si ottiene, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n!} + \frac{i}{(2n+1)!} \right) z^{2n}.$$

(*ii*) Si determini il raggio di convergenza dello sviluppo.

Poichè la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n!} + \frac{i}{(2n+1)!} \right) z^{2n}$ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$, il raggio di convergenza $R = +\infty$.

(*iii*) Si approssimi $f(1) = \frac{1}{e} + i \sin 1$ con un errore inferiore a 10^{-2}.

Si ha $$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n!} + \frac{i}{(2n+1)!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!},$$

dove le due serie verificano le condizioni del criterio di Leibniz e quindi:

- $\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{n!}$ approssima $\frac{1}{e}$ a meno di $\frac{1}{2} 10^{-2}$ se $\frac{1}{(N+1)!} < \frac{1}{2} 10^{-2}$: $\underline{N=5}$
- $\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$ approssima $\sin 1$ a meno di $\frac{1}{2} 10^{-2}$ se $\frac{1}{(2N+3)!} < \frac{1}{2} 10^{-2}$: $\underline{N=2}$

In conclusione, se $N = 5$, allora $\left| \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left(\frac{1}{n!} + \frac{i}{(2n+1)!} \right) - \left(\frac{1}{e} + i \sin 1 \right) \right| \leq$

$$\leq \left| \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{n!} - \frac{1}{e} \right| + \left| \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} - \sin 1 \right| < 2 \cdot \frac{1}{2} 10^{-2} = 10^{-2}.$$

(In realtà, $N = 4$ è sufficiente)

ESERCIZIO N. 3. Si definisca $\varphi : K = \{(u,v)^T : 1 \le u \le 2 + \cos v,\ v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\} \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi(u,v) = (u-2, \sqrt{u}\cos v, \sqrt{u}\sin v)^T.$$

(*i*) Si verifichi che φ è la rappresentazione parametrica di una superficie regolare semplice, provando che

- φ è iniettiva in K: per ogni $(u_1,v_1)^T, (u_2,v_2)^T \in K$, si ha

$$\varphi(u_1,v_1) = \varphi(u_2,v_2) \Rightarrow (u_1 = u_2) \wedge (\cos v_1 = \cos v_2) \wedge (\sin v_1 = \sin v_2)$$
$$\Rightarrow (u_1 = u_2) \wedge (v_1 = v_2)$$

- $\varphi_u \times \varphi_v \neq \underline{0}$ in K: per ogni $(u,v)^T \in K$, si ha

$\varphi_u = (1, \frac{1}{2\sqrt{u}}\cos v, \frac{1}{2\sqrt{u}}\sin v)^T$, $\varphi_v = (0, -\sqrt{u}\sin v, \sqrt{u}\cos v)^T$

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{u}}\cos v & \frac{1}{2\sqrt{u}}\sin v \\ 0 & -\sqrt{u}\sin v & \sqrt{u}\cos v \end{vmatrix} = (\tfrac{1}{2}, -\sqrt{u}\cos v, -\sqrt{u}\sin v)^T \neq \underline{0}$$

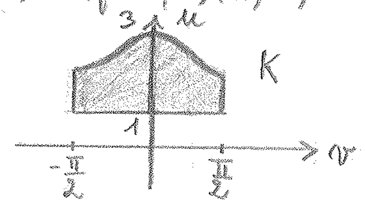
(*ii*) Si determini l'equazione del piano tangente a $\Sigma = \varphi(K)$ nel punto $(-1,1,0)^T = \varphi(1,0)$.

- equazione cartesiana: $\langle (x,y,z)^T - (-1,1,0)^T, (\frac{1}{2}, -1, 0)^T \rangle = 0$
$\iff \frac{1}{2}(x+1) - (y-1) = 0 \iff x - 2y + 3 = 0$

- equazione parametrica: $\begin{cases} x = -1 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 \\ y = 1 + \lambda \cdot \frac{1}{2} + \mu \cdot 0 \\ z = 0 + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \mu \end{cases}$

(*iii*) Si determinino i punti di Σ aventi massima o minima distanza dall'origine.

La fun $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ è continua sull'insieme compatto Σ. Quindi f ha max e min su K.
Per studiare $f|_\Sigma$ si considera $\psi(u,v) = (f \circ \varphi)(u,v) = \sqrt{(u-2)^2 + u} = \sqrt{u^2 - 3u + 4}$ in K.

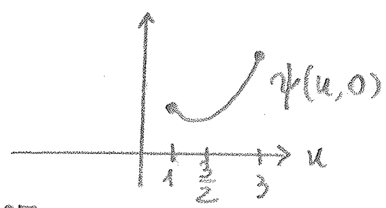


Gli estremi di ψ si trovano sul segmento $(u,0)^T$ con $1 \le u \le 3$. È immediato verificare che

$$\min_{1 \le u \le 3} \psi = \psi(\tfrac{3}{2}, 0) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

e

$$\max_{1 \le u \le 3} \psi = \psi(3,0) = 2.$$



In conclusione, poiché ψ è indipendente da v,

- $\{(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\cos v, \sqrt{\frac{3}{2}}\sin v)^T : (\frac{3}{2}, v)^T \in K\}$: pti di min. distanza
- $\{(1, \sqrt{3}\cos v, \sqrt{3}\sin v)^T : (3, v)^T \in K\}$: pti di max distanza

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Posto, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $A_n = \left\{(x,y)^T : \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n} \le 1 \le nx^2 + n^2y^2\right\}$, si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_{A_n} (1+x^2+y^2)^{-2}\,dx\,dy.$$

RISULTATO

π

SVOLGIMENTO

La successione di insiemi $(A_n)_n$ invade $\mathbb{R}^2$ (*) e quindi, essendo $f(x,y) = (1+x^2+y^2)^{-2} > 0$ e loc. int. in $\mathbb{R}^2$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_{A_n} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} \iint_{B_n} f(x,y)\,dx\,dy,$$

con (per esempio) $B_n = \{(x,y)^T : x^2+y^2 \le n^2\}$.

Risulta, usando coordinate polari,

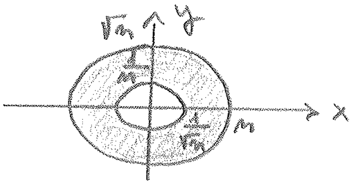
$$\iint_{B_n} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^n (1+\rho^2)^{-2}\rho\,d\rho\right)d\theta = \pi\left[-(1+\rho^2)^{-1}\right]_0^n$$

$$= \pi\left(1-(1+n^2)^{-1}\right) \longrightarrow \pi, \quad \text{se } n \to +\infty,$$

Quindi si può concludere che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \pi$$

(*) Per ogni $n \ge 1$, A_n è la corona ellittica di semiassi interni $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{n}$ ed esterni n, $\sqrt{n}$.



ESERCIZIO N. 4. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

(*i*) Si determini la matrice risolvente del sistema.

• Risoluzione del sistema omogeneo $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$:

$x'' = x' - y' = x' - x - y = 2x' - 2x \Rightarrow x'' - 2x' + 2x = 0$; $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^t \cos t + \beta e^t \sin t \\ y(t) = \alpha e^t \sin t - \beta e^t \cos t \end{cases}$$

• Risoluzione dei pb di Cauchy:

$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0 \end{cases}$ $(e^t \cos t, e^t \sin t)^T$; $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \\ x(0) = 0\ \ y(0) = 1 \end{cases}$ $(-e^t \sin t, e^t \cos t)^T$

• Matrice risolvente:

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}$$

(*ii*) Si utilizzi la matrice risolvente per determinare, al variare di $A \in \mathbb{R}$, la soluzione $(x_A, y_A)^T$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \\ x(0) = y(0) = A. \end{cases}$$

La soluzione generale di $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$ è data da $Z(t) = U(t)C$, con $C = (C_1, C_2)^T$. Quindi si ha

$Z(0) = (A, A)^T \iff U(0)C = (A, A)^T \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$

$\iff C_1 = C_2 = A$.

In conclusione, risulta $(x_A(t), y_A(t))^T = U(t) \cdot \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$.

(*iii*) Si determini il minimo $\bar{t} > 0$ tale che $(x_A(\bar{t}), y_A(\bar{t}))^T$ è parallelo al $(A, A)^T$.

Poiché $(x_A(t), y_A(t))^T = (Ae^t(\cos t - \sin t), Ae^t(\sin t + \cos t))^T$

$= Ae^t(\sqrt{2}\sin(t - \frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4}))^T = \lambda(A, A)^T$, con $\lambda \neq 0$,

se $t = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, si conclude che: $\bar{t} = \pi$.