Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2015-2016, sessione invernale, I appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di Studi: **Ingegneria Industriale** ◯ **Ingegneria Navale** ◯

ESERCIZIO N. 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si definisca $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ponendo $f_n(x) = \frac{nx^{10}}{n+x}$.

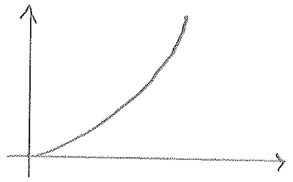
(*i*) Si determini l'insieme di convergenza puntuale E_p e il limite puntuale f della successione $(f_n)_n$.

$f_n(x) = \dfrac{n x^{10}}{n+x} \to f(x) = x^{10}$, se $n \to +\infty$, in $E_p = [0, +\infty[$

(*ii*) Si studi, per ogni n, la funzione $|f_n - f|$ in E_p.

$|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{n x^{10}}{n+x} - x^{10}\right| = \dfrac{x^{11}}{n+x} =: g_n(x)$ in $[0, +\infty[$

g_n crescente, $g_n(x) \to +\infty$, se $x \to +\infty$



(*iii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $(f_n)_n$ converge uniformemente sull'intervallo $[0, +\infty[$.

$\left.\begin{array}{l}\sup\limits_{[0,+\infty[} g_n(x) = +\infty \\ \text{per ogni } n\end{array}\right\} \Longrightarrow$ $(f_n)_n$ non converge uniformemente in $[0, +\infty[$

(*iv*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $(f_n)_n$ converge uniformemente sull'intervallo $[0, 10]$.

$\sup\limits_{[0,10]} g_n(x) = g_n(10) \to 0$, se $n \to +\infty \Longrightarrow (f_n)_n$ converge uniformemente in $[0, 10]$

(*v*) Si calcoli, giustificando la risposta, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{10} f_n(x)\, dx$.

Per il teorema di passaggio al limite sotto il segno d'integrale:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{10} f_n(x)\,dx = \int_0^{10} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = \int_0^{10} x^{10}\,dx = \frac{10^{11}}{11}$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2y + 2$.

(*i*) Si calcoli il gradiente $\nabla f(x,y)$.

$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 2xy,\ 4y^3 - x^2)^T$

(*ii*) Si determinino i punti critici di f.

$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} 2x(2x^2-y)=0 \\ 4y^3 = x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \\ y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-1}{2\sqrt[4]{2}} \\ y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

(*iii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $(0,0)^T$ è un punto di estremo relativo per f.

$f(x,x) = 2x^4 - x^3 + 2$ è decrescente nel pto $x = 0$ e quindi $(0,0)^T$ non è pto di max. nè di min. relativo.

(*iv*) Si calcoli la matrice Hessiana $Hf(x,y)$.

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2y & -2x \\ -2x & 12y^2 \end{pmatrix}$

(*v*) Si stabilisca la natura degli altri punti critici di f.

$Hf\left(\frac{\pm 1}{2\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{32}} & \frac{\mp 2}{\sqrt[4]{32}} \\ \frac{\mp 2}{\sqrt[4]{32}} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ df. pos. $\Rightarrow \left(\frac{\pm 1}{2\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^T$ pti di min. rel.

(*vi*) Si provi che esiste $\min\limits_{\mathbb{R}^2} f$ e lo si calcoli.

$f(x,y) \geq x^4 + y^4 - \frac{1}{2}(x^4 + y^2) + 2 \geq \frac{1}{2}x^4 + y^4 - \frac{1}{2}y^2 + 2 \to +\infty$, se $\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$, cioè f è coerciva; f è continua $\Rightarrow \exists \min\limits_{\mathbb{R}^2} f$;

$\min\limits_{\mathbb{R}^2} f = f\left(\frac{\pm 1}{2\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{127}{64}$

(*vii*) Si determini $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f$.

Dal punto (vi) segue che $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$

(*viii*) Si determinino gli insiemi di livello $L_k(f) = \{(x,y)^T : f(x,y) = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$, che non sono curve regolari in forma implicita.

$L_k(f)$ non è curva regolare in forma implicita per

$k = 2\ (= f(0,0)) \ \vee \ k = \frac{127}{64}\ (= \min\limits_{\mathbb{R}^2} f)$.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ______________

ESERCIZIO N. 3. Si definisca $\varphi : K = [-1,1] \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)^T.$$

(*i*) Si provi che φ è iniettiva in K.

$$\varphi(u_1,v_1) = \varphi(u_2,v_2) \Rightarrow u_1 = u_2 \wedge \cos v_1 = \cos v_2 \wedge \sin v_1 = \sin v_2$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2 \wedge v_1 = v_2$$

per ogni $(u_1,v_1)^T, (u_2,v_2)^T \in K$.

(*ii*) Si provi che $\|\varphi_u \times \varphi_v\| \neq 0$ in K.

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 = (\cosh u \cos v)^2 + (-\cosh u \sin v)^2 + (\sinh u \cosh u)^2$$

$$= \cosh^2 u + \cosh^2 u \sinh^2 u = \cosh^2 u \cdot \cosh^2 u$$

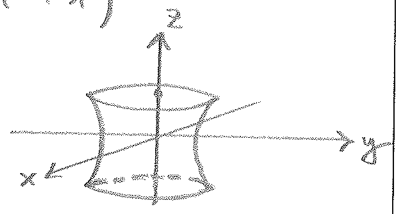
$$= \cosh^4 u > 0 \quad \text{per ogni } (u,v)^T \in K.$$

(*iii*) Si calcoli l'area della superficie $\Sigma = \varphi(K)$.

$$A(\Sigma) = \iint_K \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du\, dv = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^{1} \cosh^2 u \, du\right) dv =$$

$$= 4\pi \int_0^1 \cosh^2 u \, du = 4\pi \tfrac{1}{2}(\cosh 1 \cdot \sinh 1 + 1)$$

$$= 2\pi(\cosh 1 \cdot \sinh 1 + 1),$$



essendo $\int_0^1 \cosh^2 u \, du = \frac{1}{2}(\cosh 1 \cdot \sinh 1 + 1)$.

(*iv*) Si calcoli il volume del solido E, avente diametro finito, delimitato dalla superficie Σ e dai piani $z = -1$ e $z = 1$.

E è un solido di rotazione: posto $S_z = \{(x,y,z)^T : x^2 + y^2 \leq \cosh^2 z\}$ si ha

$$m_3(E) = \int_{-1}^{1}\left(\iint_{S_z} 1 \, dx\, dy\right) dz = \int_{-1}^{1} \pi \cosh^2 z \, dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \cosh^2 z \, dz = 2\pi \cdot \tfrac{1}{2}(\cosh 1 \cdot \sinh 1 + 1)$$

$$= \pi(\cosh 1 \cdot \sinh 1 + 1).$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$g(x, y) = (2x - y - 1, y + 1)^T.$$

(*i*) Si determini la rappresentazione parametrica delle linee di campo passanti per i punti del semiasse positivo delle ordinate.

$$\begin{cases} x' = 2x - y - 1 \\ y' = y + 1 \\ x(0) = 0 \\ y(0) = A (> 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2x - (A+1)e^t \\ x(0) = 0 \\ y(t) = (A+1)e^t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 2x - (A+1)e^t \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad x(t) = (A+1)(e^t - e^{2t})$$

$$\begin{cases} x(t) = (A+1)(e^t - e^{2t}) \\ y(t) = (A+1)e^t - 1 \end{cases} \qquad (A > 0)$$

(*ii*) Si determini una rappresentazione cartesiana di tali curve e si descriva geometricamente il loro sostegno.

Posto $s = e^t > 0$, si ha

$$\begin{cases} x = (A+1)(s - s^2) \\ y = (A+1)s - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (y+1) - \dfrac{(y+1)^2}{A+1} \\ s = \dfrac{y+1}{A+1} (> 0) \end{cases}$$ arco di parabola